

湖北省

普通高等学校招收中职毕业生技能高考复习丛书

数学总复习

《数学总复习》编写组 编

赠精品微课

编者阵容强大

编者均系资深教研员和重点中等职业学校骨干教师

编写内容全面

严格依据湖北省技能高考方案及考纲编写

配套教学资源

配套教学资料包，内含教学课件等教学资料

湖北省普通高等学校招收中职
毕业生技能高考复习丛书

语文

语文总复习

语文同步强化检测

语文考前冲刺模拟卷

数学

数学总复习

数学同步强化检测

数学考前冲刺模拟卷

英语

英语总复习

英语同步强化检测

英语考前冲刺模拟卷

数学总复习

《数学总复习》编写组 编

ISBN 978-7-5608-9052-4



定价：49.80元

免费提供

精品教学资料包

服务热线：400-615-1233
www.huatengzy.com

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

X3

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

湖北省

普通高等学校招收中职毕业生技能高考复习丛书

数学总复习

《数学总复习》编写组 编
本册主编 盛其杰



同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

· 上海 ·

内 容 提 要

全书包括集合与充要条件、不等式、函数、指数函数与对数函数、三角函数、数列、平面向量、直线和圆的方程、立体几何、概率与统计初步共十章内容. 每章根据考纲的要求详述相关知识点. 全书体例科学, 栏目丰富, “考纲要求”详细分析了考试大纲对每一章的要求; “命题趋势”和“真题在线”从命题的角度对真题进行剖析, 使考生准确把握考点, 快速找到解题思路; “知识结构”对本章内容进行了总结; “知识梳理”对每一个知识点、考点进行了细致的讲解; “巩固练习”针对考点设置了练习题, 帮助学生巩固所学知识, 提高答题能力.

本书既可以作为普通高等学校招收中职毕业生技能高考的复习用书, 也可以作为广大中等职业学校学生的学习资料.

图书在版编目(CIP)数据

数学总复习 / 《数学总复习》编写组编. --上海:
同济大学出版社, 2021. 8(2025. 9 重印)

ISBN 978 - 7 - 5608 - 9052 - 4

I. ①数… II. ①数… III. ①数学课 - 中等专业学校
- 升学参考资料 IV. ①G634. 603

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2021) 第 150595 号

数学总复习

《数学总复习》编写组 编

责任编辑 张平官 责任校对 王有文 封面设计 黄燕美

出版发行 同济大学出版社 www.tongjipress.com.cn
(地址: 上海市四平路 1239 号 邮编: 200092 电话: 021 - 65985622)

经 销 全国各地新华书店
印 刷 大厂回族自治县聚鑫印刷有限责任公司
开 本 880 mm×1 230 mm 1/16
印 张 12.75
字 数 318 000
版 次 2021 年 8 月第 1 版
印 次 2025 年 9 月第 5 次印刷
书 号 ISBN 978 - 7 - 5608 - 9052 - 4

定 价 49.80 元

本书若有印装质量问题, 请向本社发行部调换 版权所有 侵权必究

Preface

前言



通过多年的摸索与实践,普通高等学校招收中职毕业生技能高考越来越规范有序.从考试内容和考试形式上来看,参加考试的考生将面临更大的挑战,多数考生为如何在短期内熟悉考试形式、了解考试内容、把握考试重难点、弥补“短板”备受困扰,亟须通过高效的学习来快速提升应试能力,在考试中脱颖而出.

为了帮助广大考生在较短的时间内高效、便捷、准确地把握考试的脉络,我们特组织多所一线院校的任课教师,根据考试科目的大纲要求,深入研究了近几年湖北省考试的命题情况,针对命题中出现的最新变化,精心编写了这套“湖北省普通高等学校招收中职毕业生技能高考复习丛书”,供广大考生在复习时使用.

本书是该系列丛书之《数学总复习》.数学是技能高考的必考科目之一,其内容知识点较多、难度较大,也是考生备考的重点和难点所在.本书在编写时紧扣考试大纲,紧密结合真题,内容充实,结构严谨,要点突出,指导性强,是广大考生进行考试复习和储备知识的重要参考资料.

本书有以下鲜明特色:

1. 编写阵容强大,熟知学情考情

编写组成员均系湖北省中等职业学校的骨干教师,他们始终在教学第一线,常年从事中职毕业生技能高考的命题研究工作,对考试规律和命题形式有深入的研究,能够精准把握考试的命题趋势,在知识点的讲解和试题的选择上,符合湖北省的要求.

2. 立足考试大纲,全面服务考生

本书是为参加湖北省普通高等学校招收中职毕业生技能高考的考生量身定做的复习用书.知识点的选取、题型、试题难度等设计均参照了历年考试真题和最新考试大纲,体现出考试特色,做到既能把握考试的命题特点,又体现其发展趋势.

3. 合理编排,设计科学

本书对考点进行归纳和整理,使之前复习过的零散知识形成有机整体,从而使考生掌握知识规律和技能,形成解题方法.每章按照“考纲要求”——“命题趋势”——“知识结构”——“知识梳理”——“典例解析”——“巩固练习”——“真题在线”的框架编写.

“考纲要求”详细分析了考试大纲对每一知识点的要求.

“命题趋势”对各考点的命题情况进行了分析.

“知识结构”对本章知识点进行了总结.

“知识梳理”对每一个知识点、考点进行了细致的讲解.

“典例解析”对题目进行讲解,给出详细的解题思路.

“巩固练习”针对书中考点设置了练习题,以帮助学生巩固所学知识,提高答题能力.

“真题在线”从命题的角度对真题进行剖析,使考生准确把握考点,快速找到解题思路.

4. 配套齐全,全方位助力备考

本书配套《数学同步强化检测》和《数学考前冲刺模拟卷》.《数学同步强化检测》与本书的章节同步,是课堂练习和课后巩固的配套习题集.《数学考前冲刺模拟卷》立足真题,题型、题量和难度均符合湖北省的实际情况,是考生考前模拟冲刺的重要复习资料.

衷心希望本套技能高考用书能为广大考生的复习备考带来实质性的帮助.对书中的不足之处,敬请各位专家、同仁及读者不吝指正.

最后,预祝广大考生在考试中取得好成绩!

《数学总复习》编写组

Contents 目 录



第一章 集合与充要条件

- 第一节 集合的概念与集合之间的关系 2
- 第二节 集合的运算 8
- 第三节 充要条件 13

第二章 不等式

- 第一节 不等式的基本性质与区间 19
- 第二节 一元一次不等式 24
- 第三节 一元二次不等式 29
- 第四节 含绝对值的不等式 34

第三章 函数

- 第一节 函数的概念及其表示 40
- 第二节 函数的性质 48
- 第三节 函数的实际应用 55

第四章 指数函数与对数函数

- 第一节 实数指数幂 64
- 第二节 指数函数 69
- 第三节 对数 74
- 第四节 对数函数 77

第五章 三角函数

- 第一节 角的概念推广与弧度制 87
- 第二节 任意角的三角函数 91
- 第三节 同角三角函数的基本关系 96
- 第四节 诱导公式 99
- 第五节 三角函数的图像与性质 103

第六节 已知三角函数值求角 108

第六章 数列

第一节 数列的概念 117
 第二节 等差数列及其应用 123
 第三节 等比数列及其应用 130

第七章 平面向量

第一节 平面向量的概念及线性运算 140
 第二节 平面向量的坐标表示 147
 第三节 平面向量的内积 151

第八章 直线和圆的方程

第一节 两点间的距离公式与线段中点的坐标 159
 第二节 直线的方程 162
 第三节 两直线的位置关系 167
 第四节 圆 171

第九章 立体几何

柱、锥、球及其简单组合体 181

第十章 概率与统计初步

概率 192

第一章

集合与充要条件



考纲要求

考试内容	考核要求		
	了解	理解	掌握
集合、元素及其关系		✓	
常用数集,空集,全集		✓	
集合的表示法(列举法、描述法)			✓
集合之间的关系(子集、真子集、相等)			✓
集合的运算(交、并、补)		✓	
充分条件,必要条件,充要条件	✓		



命题趋势

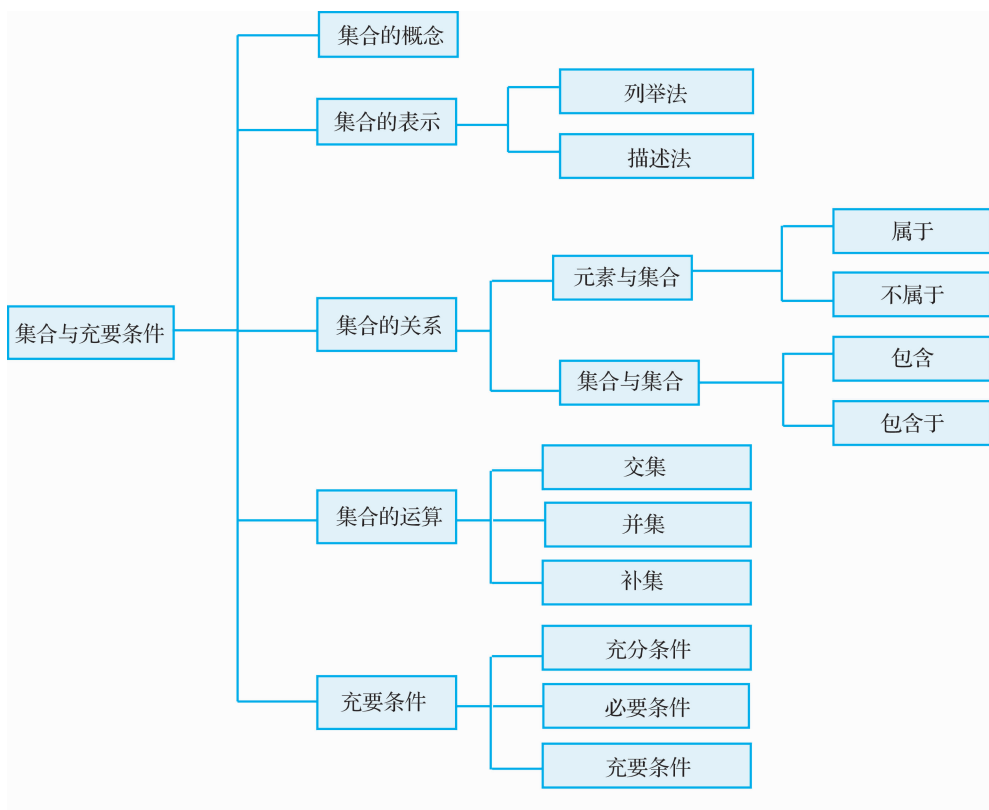
本章内容在历年真题中多以选择题形式出现,要求不高,难度不大. 主要从三个方面考查:

- 一是考查集合的概念、集合的基本关系及常用数集的符号表示;
- 二是考查集合的基本运算. 命题常以两个集合的交集、并集和补集运算为主,多与绝对值、不等式等相结合;
- 三是考查充分条件、必要条件和充要条件的判定,多与不等式、函数等相结合.

本章是考试的必考内容,也是比较容易拿分的知识,其中,集合的运算和充要条件是每年必考的内容.



知识结构



第一节

集合的概念与集合之间的关系



知识梳理

知识点一

集合的概念

1. 集合

将某些确定的对象看成一个整体就构成一个集合,简称为集,常用大写英文字母 $A, B, C, \dots$ 表示.

2. 元素

组成集合的对象叫作这个集合的元素,常用小写英文字母 $a, b, c, \dots$ 表示.

3. 元素与集合的关系及性质

如果 a 是集合 A 的元素,就说 a 属于 A ,记作 $a \in A$;如果 a 不是集合 A 的元素,就说 a 不属于 A ,记作 $a \notin A$. 集合中的元素具有确定性、互异性、无序性的特征.

4. 集合的分类

(1)按元素个数分类:

- ①有限集:含有元素的个数有限的集合叫作有限集.
- ②无限集:含有元素的个数无限的集合叫作无限集.
- ③空集:不含任何元素的集合叫作空集,记作 $\emptyset$.

注意: $\emptyset$ 不是 $\{0\}$.

(2)按元素的特征分类:数集、点集等.

5. 常用的集合

常用的集合有正整数集($\mathbf{N}_+$ 或 $\mathbf{N}^*$)、自然数集($\mathbf{N}$)、整数集($\mathbf{Z}$)、有理数集($\mathbf{Q}$)、实数集($\mathbf{R}$).

- (1)正整数集:所有正整数组成的集合叫作正整数集,记作 $\mathbf{N}_+$ 或 $\mathbf{N}^*$.
- (2)自然数集:所有自然数组成的集合叫作自然数集,记作 $\mathbf{N}$.
- (3)整数集:所有整数组成的集合叫作整数集,记作 $\mathbf{Z}$.
- (4)有理数集:所有有理数组成的集合叫作有理数集,记作 $\mathbf{Q}$.
- (5)实数集:所有实数组成的集合叫作实数集,记作 $\mathbf{R}$.

知识点二 集合的表示法

1. 列举法

将集合的元素一一列出,用逗号分隔,再用花括号括为一个整体,这种表示集合的方法叫作列举法.

注意:用列举法表示集合时,要注意以下几点:

- (1)元素之间用逗号“,”隔开.
- (2)元素不能重复(满足集合中元素的互异性).
- (3)元素不能遗漏.
- (4)当集合中的元素较少时,用列举法比较简单;当集合中的元素较多或无限,但存在一定的规律时,在不发生误解的情况下,也可以用列举法表示.

2. 描述法

利用元素的特征性质来表示集合的方法称为描述法.

具体方法是:在花括号中画一条竖线,竖线的左侧写上集合的代表元素 x ,并标出元素的取值范围,竖线的右侧写出元素所具有的特征性质.

注意:用描述法表示集合时,要注意以下几点:

- (1)写清楚集合中元素的代表形式(一般用小写字母表示).
- (2)写明集合中元素的特征或性质.
- (3)用于描述元素特征的语句要力求简明、准确,不产生歧义;多层描述时,应当准确使用“且”“或”等关联词.
- (4)所有描述的内容都要写在大括号内.
- (5)在不引起混淆的情况下,用描述法表示集合有时也可以省去竖线和竖线左边的部分.例如,正整数的集合可简记为{正整数},但是,集合 $\{x|x>1\}$ 就不能省略竖线及其左边的“ x ”.

知识点三 集合间的关系

1. 子集

一般地,对于两个集合 A, B ,如果集合 A 中任何一个元素都是集合 B 的元素,那么,集合 A 就叫做集合 B 的子集,记作 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$,读作“ A 包含于 B ”或“ B 包含 A ”.

当集合 A 不包含于集合 B 或集合 B 不包含集合 A 时,记作 $A \not\subseteq B$ 或 $B \not\supseteq A$.

性质:(1)任何一个集合是它本身的子集,即 $A \subseteq A$;(2)空集是任何集合的子集,即 $\emptyset \subseteq A$;(3)对集合 A, B, C ,若 $A \subseteq B, B \subseteq C$,则 $A \subseteq C$.

注意:不能把子集说成由原来集合中的部分元素组成的集合,因为 A 的子集包括它本身,而这个子集由 A 的全体元素组成;空集也是 A 的子集,但这个子集中不包括 A 中的任何元素.

2. 真子集

如果 A 是 B 的子集,并且 B 中至少有一个元素不属于 A ,则 A 是 B 的真子集(A 包含于 B 但不等于 B),记作 $A \subsetneq B$ 或 $B \supsetneq A$.

性质:空集是任何非空集合的真子集;对于集合 A, B, C ,若 $A \subsetneq B, B \subsetneq C$,则 $A \subsetneq C$.

注意:元素与集合之间是属于关系,集合与集合之间是包含关系.

3. 集合的相等

一般地,如果两个集合的元素完全相同,我们就说这两个集合相等,集合 A 等于集合 B ,记作 $A = B$ (A, B 的所有元素均相同).

注意:(1)两个集合所含元素完全相同,即“集合 A 中的任何一个元素都是集合 B 的元素,同时集合 B 中的任何一个元素都是集合 A 的元素”.

(2)要判断两个集合是否相等,对于元素较少的有限集,主要看它们的元素是否完全相同;若是无限集,则从“互为子集”入手进行判断.



典例解析

例 1 在下列每组对象中:

- (1)我国著名的数学家;
- (2)超过 10 的所有自然数;
- (3)某校 2020 年新入学的高个子学生;
- (4)方程 $x-1=0$ 的实数解;
- (5)在直角坐标平面内,第二象限的所有点.

其中能构成集合的是().

A. (1)(2)(3)

B. (2)(3)(4)

C. (2)(4)(5)

D. (3)(4)(5)



解析

(1)“我国著名的数学家”不是一个明确的标准,不能构成一个集合;(3)“高个子学生”这一标准也不确定,无法判定某人是高还是矮,也不能构成集合;(2)(4)的对象是确定的;(5)的对象虽然有无限个,但它是确定的.因此选 C.



技巧点拨

判断某组对象能否构成集合,关键看对象是否为整体的和确定的.标准一定要是明确的,不能模糊,否则无法判断.



变式训练 1

下列语句中,能构成集合的是().

A. 我班数学好的男生

B. 与 0 接近的全体实数

C. 大于 π 的自然数

D. 优秀的中等职业学校

例 2 已知集合 $A = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 3, x \in \mathbf{Z}, y \in \mathbf{Z}\}$, 则 A 中元素的个数为().

A. 9

B. 8

C. 5

D. 4



解析

由 $x^2 + y^2 \leq 3$ 可知, $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$, $-\sqrt{3} \leq y \leq \sqrt{3}$. 又因为 $x \in \mathbf{Z}, y \in \mathbf{Z}$, 所以 $x \in \{-1, 0, 1\}, y \in \{-1, 0, 1\}$. 所以 A 中元素的个数为 9.



技巧点拨

对于求解集合中元素个数的题目,首先求出集合,然后根据集合中元素的互异性求出集合中元素的个数,或利用数形结合的方法求出集合中元素的个数.



变式训练 2

已知集合 $A = \{1, 2, 4\}$, 集合 $B = \{x | x = a + b, a \in A, b \in A\}$, 则集合 B 中元素的个数为_____.

例 3 用列举法表示下列集合.

(1) $A = \{x | -2 < x < 5, x \in \mathbf{Z}\}$;

(2) $B = \{(x, y) | 2x + y = 5, x \in \mathbf{N}, y \in \mathbf{N}\}$.



解析

(1) $A = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$; (2) $B = \{(0, 5), (1, 3), (2, 1)\}$.



技巧点拨

掌握集合的两种表示方法.



变式训练 3

用合适的方法表示下列集合.

(1) $\{11, 12, 13, 14, 15, \dots\}$;

(2) $\{1, 4, 9, 16, 25, 36\}$.

例 4 设集合 $A = \{0\}$, 下列结论正确的是().

A. $A = 0$

B. $A \subseteq \emptyset$

C. $0 \in A$

D. $\emptyset \in A$



解析

本题考查了元素与集合、集合与集合之间的关系. 答案选 C.



技巧点拨

正确理解符号 $\in, \notin, \subseteq, \supseteq$ 的意义, 是正确处理此类问题的关键.



变式训练 4

下列说法中,正确的有().

①空集没有子集;②任何集合至少有两个子集;③空集是任何集合的真子集;④若 $\emptyset \subsetneq A$,则 $A \neq \emptyset$.

- A. 1 个
B. 2 个
C. 3 个
D. 4 个

例 5 已知集合 $A = \{x | x^2 - x - 2 = 0\}$, $B = \{x | x^2 - 4x + p = 0\}$, 若 $B \subseteq A$, 求实数 p 的取值范围.



解析

由题意得: $A = \{-1, 2\}$, 因为 $B \subseteq A$, 所以 $B = \emptyset$ 或 $B = \{-1\}$ 或 $B = \{2\}$ 或 $B = \{-1, 2\}$.

又因为 $B = \{x | x^2 - 4x + p = 0\}$, 所以 $B = \{-1, 2\}$ 不成立.

当 $B = \emptyset$ 时, $\Delta = (-4)^2 - 4p = 16 - 4p < 0$, 解得 $p > 4$;

当 $B = \{-1\}$ 时, $\begin{cases} \Delta = 16 - 4p = 0, \\ (-1)^2 - 4 \times (-1) + p = 0 \end{cases}$ 无解;

当 $B = \{2\}$ 时, $\Delta = 16 - 4p = 0$, $2^2 - 4 \times 2 + p = 0$, 解得 $p = 4$.

综上, 实数 p 的取值范围是 $[4, +\infty)$.



技巧点拨

两个集合包含或相等关系的问题, 通过建立方程(组), 然后解出未知数, 最后利用集合元素的特征进行检验即可.



变式训练 5

已知集合 $A = \{1, 1+m, 1+2m\}$, $B = \{1, n, n^2\}$, 其中 $m, n \in \mathbf{R}$, 若 $A = B$, 求 m, n 的值.



巩固练习

基础巩固

一、选择题

1. 下列命题所列对象中能组成集合的是().

- A. 好人
B. 非常小的数
C. 有趣的书
D. 小于 5 的数

2. 给出下面四个关系: ① $0 \in \mathbf{Q}$; ② $\sqrt{3} \notin \mathbf{Q}$; ③ $\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Q}$; ④ $\emptyset \subsetneq \{0\}$, 其中正确的个数为().

- A. 4
B. 3
C. 2
D. 1

3. 用列举法表示集合 $\{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$ 的结果是().

- A. $\{1, 2\}$
B. 1, 2
C. $\{1, 2\}$
D. 以上都不是

4. 集合 $\{1,2,3,4\}$ 所有子集的个数是().

- A. 8
B. 14
C. 15
D. 16

5. 下列选项中表述正确的是().

- A. 由 $1,3,5,7,5,3$ 组成的集合中有6个元素
B. 周长为16 cm的三角形组成的集合是有限集合
C. 集合 $\{0\}$ 是空集
D. 一年级(3)班的所有同学可以组成集合

6. 用列举法表示“大于2且小于9的偶数的全体”构成的集合是().

- A. $\emptyset$
B. $\{4,6,8\}$
C. $\{3,5,7\}$
D. $\{3,4,5,6,7,8\}$

二、填空题

1. 用适当的符号($\in, \notin, \subseteq, \supseteq, =$)填空.

3 _____ $\{2,3\}$; π _____ $\mathbf{Q}$; $\{1,2,3\}$ _____ $\mathbf{Z}$;
 $\mathbf{N}^*$ _____ $\mathbf{Z}$; $\{-3,3\}$ _____ $\{x|x^2=9\}$.

2. 绝对值等于1的所有整数组成的集合是_____.

3. 已知集合 $P=\{x|2<x<a, x\in\mathbf{N}\}$, 且集合 P 中恰有3个元素, 则整数 a =_____.

4. 下列六个关系式: ① $\{a,b\}\subseteq\{b,a\}$; ② $\{a,b\}=\{b,a\}$; ③ $0=\emptyset$; ④ $0\in\{0\}$; ⑤ $\emptyset\in\{0\}$; ⑥ $\emptyset\subseteq\{0\}$. 其中正确的个数为_____.

三、解答题

1. 已知集合 $A=\{0,1,2\}$, 集合 $B=\{x|x=ab, a\in A, b\in A\}$.

(1) 用列举法写出集合 B ;

(2) 判断集合 B 和集合 A 的关系.

2. 写出集合 $\{-3,-1,1,3\}$ 的所有子集, 并指出哪些是真子集.

3. 已知集合 $\{1, a, b\}$ 与 $\{-1, -b, 1\}$ 是同一集合, 求实数 a, b 的值.

能力提升

1. 满足 $\{a, b\} \subsetneq A \subseteq \{a, b, c, d, e\}$ 的集合 A 的个数是().

A. 9

B. 8

C. 7

D. 6

2. 已知集合 $A = \{x | ax^2 + 2x + 1 = 0, x \in \mathbf{R}\}$.

(1) 若 A 中只有一个元素, 求 a 的值;

(2) 若 A 中恰有两个元素, 求 a 的取值范围;

(3) 若 A 中至多只有一个元素, 求 a 的取值范围.

3. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $B = \{x | ax + 2 = 0\}$, 且 $B \subseteq A$, 求实数 a 的值组成的集合.

第二节 集合的运算



知识梳理

1. 交集

一般地, 对于两个给定的集合 A, B , 由既属于 A 又属于 B 的所有元素组成的集合, 叫作集合 A 与集合 B 的交集, 记作 $A \cap B$, 读作“ A 交 B ”. 即 $A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$.

性质:

- (1) $A \cap B = B \cap A$.
- (2) $A \cap A = A$.
- (3) $A \cap \emptyset = \emptyset$.
- (4) $A \cap B \subseteq A, A \cap B \subseteq B$.
- (5) 若 $A \subseteq B$, 则 $A \cap B = A$.

2. 并集

一般地, 对于两个给定的集合 A, B , 由集合 A, B 的所有元素所组成的集合, 叫作集合 A 与集合 B 的并集, 记作 $A \cup B$, 读作“ A 并 B ”. 即 $A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$.

性质:

- (1) $A \cup B = B \cup A$.
- (2) $A \cup A = A$.
- (3) $A \cup \emptyset = A$.
- (4) $A \subseteq A \cup B, B \subseteq A \cup B$.
- (5) 若 $A \subseteq B$, 则 $A \cup B = B$.

3. 图示两个集合的交集、并集

(1) 用 Venn 图表示两个集合的交集、并集(图 1-1).

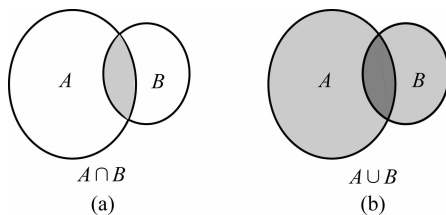


图 1-1

(2) 借助数轴表示数集的交集、并集(图 1-2).

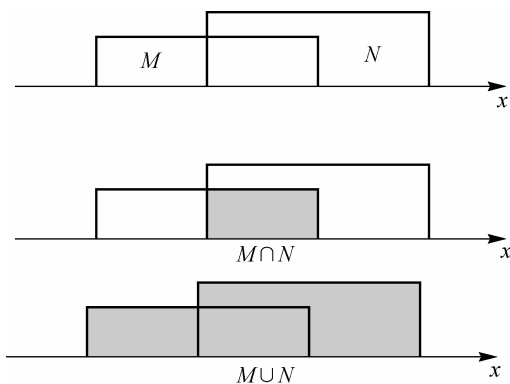


图 1-2

4. 全集

如果一个集合含有我们所研究问题中涉及的所有元素, 则称这个集合为全集, 通常用 U 表示.

注意: 全集是一个相对的概念, 在不同的情况下全集的概念也不同.

5. 补集

如果集合 A 是全集 U 的子集,那么,由 U 中不属于集合 A 的所有元素组成的集合叫作集合 A 在全集 U 中的补集,简称集合 A 的补集,记作 $\complement_U A$,读作“ A 在 U 中的补集”.即 $\complement_U A = \{x | x \in U \text{ 且 } x \notin A\}$.

性质:

- (1) $\complement_U (\complement_U A) = A$.
- (2) $\complement_U \emptyset = U, \complement_U U = \emptyset$.
- (3) $A \cup (\complement_U A) = U$.
- (4) $A \cap (\complement_U A) = \emptyset$.



典例解析

例 1 (1) 设集合 $A = \{1, 2, 3\}, B = \{3, 4\}$, 则 $A \cup B = (\quad)$.

- A. $\{3\}$ B. $\{3, 4\}$ C. $\{1, 2, 3\}$ D. $\{1, 2, 3, 4\}$

(2) 设集合 $A = \{1, 2, 3\}, B = \{2, 3, 4\}$, 则 $A \cap B = (\quad)$.

- A. $\emptyset$ B. $\{2, 3\}$ C. $\{1, 4\}$ D. $\{1, 2, 3, 4\}$

(3) 已知集合 $A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, a\}, A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.



解析 (1) $A \cup B$ 是由集合 A 和集合 B 中所有元素组成的, 因为 $A = \{1, 2, 3\}, B = \{3, 4\}$, 所以 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$. 故选 D.

(2) $A \cap B$ 是由集合 A 和集合 B 中相同的元素组成的, 集合 $A = \{1, 2, 3\}, B = \{2, 3, 4\}$, 所以 $A \cap B = \{2, 3\}$. 故选 B.

(3) 根据并集运算可知 $a = 4$.



技巧点拨 明确交集与并集之间的关系.



变式训练 1

1. 设集合 $A = \{0, 1, 2\}, B = \{1, 3\}$, 则 $A \cap B = (\quad)$.

- A. $\{0, 1, 2\}$ B. $\{1, 3\}$ C. $\{1\}$ D. $\{0, 1, 2, 3\}$

2. 设集合 $A = \{0, 1\}, B = \{-1, 0\}$, 则 $A \cup B = (\quad)$.

- A. $\emptyset$ B. $\{0\}$ C. $\{-1, 0, 1\}$ D. $\{0, 1\}$

例 2 设全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x | 0 \leq x < 2\}$, 集合 $B = \{x | x^2 - 2x - 3 < 0\}$, 求 $A \cap B, A \cup B, \complement_U A \cap B$.



解析 $B = \{x | x^2 - 2x - 3 < 0\} = \{x | -1 < x < 3\}, \complement_U A = \{x | x < 0 \text{ 或 } x \geq 2\}$, 所以 $A \cap B = \{x | 0 \leq x < 2\}, A \cup B = \{x | -1 < x < 3\}, \complement_U A \cap B = \{x | -1 < x < 0 \text{ 或 } 2 \leq x < 3\}$.



技巧点拨 考查对集合运算的理解及性质的运用.





变式训练 2

设全集 $U = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, 集合 $A = \{0, 1, 2, 3\}$, 集合 $B = \{2, 3, 4\}$, 求 $A \cap B, A \cup B, \complement_U A \cup \complement_U B$.

例 3 已知集合 $M = \{x | a \leq x \leq a+3\}$, $N = \{x | x < -1 \text{ 或 } x > 5\}$, 若 $M \cap N = \emptyset$, 求实数 a 的取值范围.



解析

如图 1-3 所示, 要使 $M \cap N = \emptyset$, 必须满足 $\begin{cases} a+3 \leq 5, \\ a \geq -1, \end{cases}$ 解得 $-1 \leq a \leq 2$, 所以实数 a 的取值范围为 $\{a | -1 \leq a \leq 2\}$.

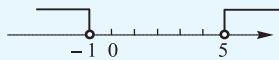


图 1-3



技巧点拨

解题时利用数轴表示集合, 便于寻求满足条件的实数 a . 特别需要注意的是“端点值”的问题, 是能取“=”还是不能取“=”.



变式训练 3

已知 $A = \{x | a \leq x \leq a+3\}$, $B = \{x | x > 1 \text{ 或 } x < -6\}$.

- (1) 若 $A \cap B = \emptyset$, 求 a 的取值范围;
- (2) 若 $A \cup B = B$, 求 a 的取值范围.



巩固练习

基础巩固

一、选择题

1. 已知集合 $A = \{2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, 则 $A \cap B = (\quad)$.
 A. $\{2\}$ B. $\{2, 4\}$
 C. $\{2, 3, 4, 6, 8\}$ D. $\{3, 6, 8\}$
2. 已知集合 $U = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $A = \{1, 5, 7\}$, 则 $\complement_U A = (\quad)$.
 A. $\{1, 3\}$ B. $\{3, 7, 9\}$
 C. $\{3, 5, 9\}$ D. $\{3, 9\}$

3. 设集合 $A = \{x | -2 < x < 3\}$, $B = \{x | x \geq 1\}$, 则 $A \cup B =$ ().

- A. $\{x | 1 \leq x < 3\}$ B. $\{x | x < -2 \text{ 或 } x > 3\}$
C. $\{x | x > -2\}$ D. $\{x | x < -2 \text{ 或 } x \geq 1\}$

4. 设集合 $A = \{1, 2, 3\}$, 集合 B 满足 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$, 则集合 B 的个数为 ().

- A. 2 B. 4 C. 8 D. 16

5. 设集合 $A = \{x | 2 \leq x < 4\}$, $B = \{x | 3x - 7 \geq 8 - 2x\}$, 则 $A \cup B$ 等于 ().

- A. $\{x | x \geq 3\}$ B. $\{x | x \geq 2\}$ C. $\{x | 2 \leq x < 3\}$ D. $\{x | x \geq 4\}$

6. 集合 $A = \{0, 2, a\}$, $B = \{1, a^2\}$. 若 $A \cup B = \{0, 1, 2, 4, 16\}$, 则 a 的值为 ().

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

二、填空题

1. 已知集合 $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, 则 $A \cap B =$ _____.

2. 已知集合 $A = \{(x, y) | x + y = 1\}$, $B = \{(x, y) | 2x - y = 2\}$, 则 $A \cap B =$ _____.

3. 已知集合 $A = \{x | x + 1 > 0\}$, $B = \{x | 3x - 6 < 0\}$. 则 $A \cap B =$ _____.

4. 50 名学生参加甲、乙两项体育活动, 每人至少参加了一项, 参加甲项的学生有 30 名, 参加乙项的学生有 25 名, 则参加了两项活动的学生人数为 _____.

三、解答题

1. 已知集合 $A = \{1, 5\}$, $B = \{1, 2, x^2 - 1\}$, 若 $A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$, 求 x 及 $A \cap B$.

2. 设全集 $U = \{0, 1, 2, 5, 7\}$, 集合 $A = \{0, 1, 2, 5\}$, 集合 $B = \{2, 5, 7\}$, 求 $A \cap B, A \cup B, \complement_U A \cup \complement_U B$.

3. 已知集合 $A = \{-4, 2a - 1, a^2\}$, $B = \{a - 5, 1 - a, 9\}$, 若 $A \cap B = \{9\}$, 求 a 的值.

能力提升

1. 已知集合 $A = \{x | x^2 - px + 16 = 0\}$, $B = \{x | x^2 - 5x + q = 0\}$, 且 $A \cap B = \{2\}$. 求 $A \cup B$.

2. 已知集合 $A = \{y | y = x^2 - 2x + 5, y \in \mathbf{N}\}$, $B = \{y | y = -x^2 - 4x + 10, y \in \mathbf{N}\}$. 求 $A \cap B$ 中所有元素的和.

第三节 充要条件



知识梳理

1. 命题的概念

在数学中,我们把用语言、符号或式子表达的,可以判断真假的陈述句叫作命题. 正确的命题叫作真命题,记作 T;错误的命题叫作假命题,记作 F. T 和 F 叫作命题的真值(有的书上用 0 和 1 作为命题的真值). p 与 q 为等值的命题记作 $p = q$.

2. 充要条件的定义

(1)对于两个命题 p, q ,如果有 $p \Rightarrow q$,则称 p 是 q 的充分条件, q 是 p 的必要条件.

注意: p 是 q 的充分条件是指只要具备了条件 p ,那么 q 就一定成立,即命题中的条件是充分的; q 是 p 的必要条件是指如果不具备条件 q ,则 p 就不能成立,即 q 是 p 成立的必不可少的条件.

(2)如果 $p \Rightarrow q$ 且 $q \Rightarrow p$,即 $p \Leftrightarrow q$,则 p 是 q 的充分必要条件,简称充要条件.

注意:①当 $p \Leftrightarrow q$ 时,也称 p 与 q 是等价的.

②与充要条件等价的词语有“当且仅当”“等价于”“有且只有”“反过来也成立”等.

3. 充要条件的判断方法

(1) 从逻辑推理关系上判断(定义法).

- ① 若 $p \Rightarrow q$ 但 $q \nRightarrow p$, 则 p 是 q 的充分条件.
- ② 若 $p \nRightarrow q$ 但 $q \Rightarrow p$, 则 p 是 q 的必要条件.
- ③ 若 $p \Rightarrow q$ 且 $q \Rightarrow p$, 则 p 是 q 的充要条件.
- ④ 若 $p \nRightarrow q$ 且 $q \nRightarrow p$, 则 p 是 q 的既不充分也不必要条件.

(2) 从命题所对应的集合与集合之间的关系上判断(集合法). 设命题 p 对应的集合为 A , 命题 q 对应的集合为 B .

- ① 若 $A \subseteq B$, 则 p 是 q 的充分条件.
- ② 若 $A \supseteq B$, 则 p 是 q 的必要条件.
- ③ 若 $A \subseteq B$ 且 $A \supseteq B$, 即 $A = B$, 则 p 是 q 的充要条件.
- ④ 若 $A \not\subseteq B$ 且 $A \not\supseteq B$, 则 p 是 q 的既不充分也不必要条件.



典例解析

例 1 已知 $p: |3x-5| < 4, q: (x-1)(x-2) < 0$, 则 p 是 q 的().

- A. 充分不必要条件
- B. 必要不充分条件
- C. 充要条件
- D. 既不充分也不必要条件



解析

$p: |3x-5| < 4 \Rightarrow p: \frac{1}{3} < x < 3, q: (x-1)(x-2) < 0 \Rightarrow q: 1 < x < 2$. 所以 $p \nRightarrow q$ 但 $q \Rightarrow p$, 所以 p 是 q 的必要不充分条件. 故选 B.



技巧点拨

判断充分必要条件时, 先要分清条件和结论, 进而找到条件与结论之间的逻辑推理关系.



变式训练 1

设命题甲为 $0 < x < 5$, 命题乙为 $|x-2| < 3$, 那么甲是乙的().

- A. 充分条件
- B. 必要条件
- C. 充要条件
- D. 既不充分也不必要条件

例 2 已知集合 $A = \left\{ y \mid y = x^2 - \frac{3}{2}x + 1, x \in \left[\frac{3}{4}, 2 \right] \right\}, B = \{ x \mid x + m^2 \geq 1 \}, p: x \in A, q: x \in B$, 并且 p 是 q 的充分条件, 求实数 m 的取值范围.



解析

由题意得 $A = \left[\frac{7}{16}, 2 \right], B = [1 - m^2, +\infty)$, 由于 p 是 q 的充分条件, 所以 $A \subseteq B$, 故 $1 - m^2 \leq \frac{7}{16}$, 解得 $m \geq \frac{3}{4}$ 或 $m \leq -\frac{3}{4}$, 即实数 m 的取值范围是 $(-\infty, -\frac{3}{4}] \cup [\frac{3}{4}, +\infty)$.



技巧点拨

本题主要考查集合的运算以及充要条件的判断, 解题的关键是不等式之间的关系.



变式训练 2

已知 $p: x^2 - 2x - 3 < 0$, $q: -a < x - 1 < a$. 若 q 是 p 的一个必要条件, 求实数 a 的取值范围.



巩固练习

基础巩固

一、选择题

1. “ $x < -2$ ”是不等式“ $x^2 - 4 > 0$ ”成立的().
A. 充分条件 B. 必要条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
2. “ $A \cap B = A$ ”是“ $A \subseteq B$ ”的().
A. 充分条件 B. 必要条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
3. 设甲是乙的充分条件, 乙是丙的充要条件, 丁是丙的必要条件, 则甲是丁的().
A. 充分条件 B. 必要条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
4. “ $|x| \geq 1$ ”是“ $x \geq 1$ ”的().
A. 充分条件 B. 必要条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
5. “ $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ”是“ $\tan \alpha = 1$ ”的().
A. 充分条件 B. 必要条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
6. 命题“ $x = 3$ ”是命题“ $x^2 = 9$ ”的().
A. 充分条件 B. 必要条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

二、填空题

1. “ $x \in \mathbf{N}$ ”是“ $x \in \mathbf{Z}$ ”的_____条件.
2. “ $x = 0$ 或 $y = 0$ ”是“ $xy = 0$ ”的_____条件.
3. “ $ab = 0$ ”是“ $a^2 + b^2 = 0$ ”的_____条件.
4. “ $x = \frac{\pi}{4}$ ”是“ $y = \sin 2x$ 取得最大值”的_____条件.

三、解答题

1. 判断下列问题中, p 是 q 的什么条件?

(1) $p: x^2 \geq y^2, q: x \geq y$.

(2) $p: x \in A \cup B, q: x \in A \cap B$;

(3) $p: x > 3, q: x > 2$;

(4) $p: a$ 是有理数, $q: a+2$ 是有理数.

2. 求一个对于一切实数 x 都有 $ax^2 - ax + 1 > 0$ 成立的充要条件.

能力提升

1. 已知 p 是 q 的充分条件, s 是 r 的必要条件, p 是 s 的充要条件, 则 q 是 r 的_____条件.

2. 已知 $p: -2 \leq x \leq 10, q: x^2 - 2x + 1 - m^2 \leq 0 (m > 0)$, 若 p 是 q 的充分条件, 求实数 m 的取值范围.

湖北省普通高等学校招收中职毕业生技能高考复习丛书

数学总复习

参考答案及解析

目 录

第一章	集合与充要条件	1
第二章	不等式	5
第三章	函数	11
第四章	指数函数与对数函数	16
第五章	三角函数	22
第六章	数列	29
第七章	平面向量	37
第八章	直线和圆的方程	41
第九章	立体几何	47
第十章	概率与统计初步	49

第一章 集合与充要条件

第一节 集合的概念与集合之间的关系

【典例解析】

变式训练 1 C 解析:由集合元素的确定性可知,“数学好”“与 0 接近”“优秀的”都是不确定的,故选 C.

变式训练 2 6 解析:由题意可知 $B=\{2,3,4,5,6,8\}$,个数为 6.

变式训练 3

解:(1) $11,12,13,14,15,\dots=\{x|x=n+10,n\in\mathbf{N}^*\}$.

(2) $\{1,4,9,16,25,36\}=\{x|x=n^2,1\leq n\leq 6 \text{ 且 } n\in\mathbf{Z}\}$.

变式训练 4 A 解析:由空集的性质可知,①、②、③是错误的,故选 A.

变式训练 5

解:因为 $A=B$,所以 $\begin{cases} 1+m=n, \\ 1+2m=n^2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 1+m=n^2, \\ 1+2m=n, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} m=0, \\ n=1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m=-\frac{3}{4}, \\ n=-\frac{1}{2}. \end{cases}$

当 $m=0, n=1$ 时,集合元素不满足互异性,舍去.故 $m=-\frac{3}{4}, n=-\frac{1}{2}$.

【巩固练习】

基础巩固

一、选择题

1. D 解析:“好”“非常小”“有趣”都是不确定的,故选 D.
2. A 解析:正确理解符号 $\in, \notin, \subseteq, \supseteq$ 的意义.
3. C 解析:掌握集合的两种表达方法.
4. D 解析:子集的个数是 2^n 个.
5. D 解析:掌握集合的概念及其特征.
6. B

二、填空题

1. $\in; \notin; \subseteq; \supseteq; =$
2. $\{-1, 1\}$
3. 6 解析:根据集合元素的特征可知集合 $P=\{3,4,5\}$,故 $a=6$.
4. 4 解析:①②④⑥正确.

三、解答题

1. 解:(1) $B=\{0,1,2,4\}$,
(2)集合 A 中的元素都在集合 B 中,所以 $A\subseteq B$.

2. 解: 子集: $\emptyset, \{-3\}, \{-1\}, \{1\}, \{3\}, \{-3, -1\}, \{-3, 1\}, \{-3, 3\}, \{-1, 1\}, \{-1, 3\}, \{1, 3\}, \{-3, -1, 1\}, \{-3, -1, 3\}, \{-3, 1, 3\}, \{-1, 1, 3\}, \{-3, -1, 1, 3\}$;

真子集: $\emptyset, \{-3\}, \{-1\}, \{1\}, \{3\}, \{-3, -1\}, \{-3, 1\}, \{-3, 3\}, \{-1, 1\}, \{-1, 3\}, \{1, 3\}, \{-3, -1, 1\}, \{-3, -1, 3\}, \{-3, 1, 3\}, \{-1, 1, 3\}$.

3. 解: 因为集合 $\{1, a, b\}$ 与 $\{-1, -b, 1\}$ 是同一集合, 所以 $\begin{cases} a = -1, \\ b = -b \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a = -b, \\ b = -1. \end{cases}$

若 $a = -1, b = -b = 0$, 符合题意.

若 $a = -b, b = -1$, 则 $a = 1$, 不合题意, 舍去.

综上, $a = -1, b = 0$.

能力提升

1. C 解析: 确定集合 A 中元素的组成情况即可. 由已知得集合必含 a, b , 且至少有一个不同于 a, b 的元素, 符合条件的集合共 7 个.

2. 解: (1) 若 A 中只有一个元素, 分两种情况讨论:

当 $a = 0$ 时, $A = \{x \mid 2x + 1 = 0\} = \{-\frac{1}{2}\}$.

当 $a \neq 0$ 时, 则 $ax^2 + 2x + 1 = 0$ 有两个相等的根, 即 $\Delta = 4 - 4a = 0$, 解得 $a = 1$.

所以 $a = 0$ 或 $a = 1$, A 中只有一个元素.

(2) 若 A 中恰有两个元素, 则 $ax^2 + 2x + 1 = 0$ 有两个不相等的根, 即 $\begin{cases} a \neq 0, \\ \Delta = 4 - 4a > 0, \end{cases}$ 解得 $a < 1$ 且 $a \neq 0$,

所以 $a < 1$ 且 $a \neq 0$ 时, A 中恰有两个元素.

(3) 若 A 中至多只有一个元素包含两种情况: A 中只有一个元素或 A 为 $\emptyset$.

由(1)可知 $a = 0$ 或 $a = 1$, A 中只有一个元素.

若 A 为 $\emptyset$, 则 $ax^2 + 2x + 1 = 0$ 无解, 即 $\begin{cases} a \neq 0, \\ \Delta = 4 - 4a < 0, \end{cases}$ 解得 $a > 1$.

所以当 $a \geq 1$ 或 $a = 0$ 时, A 中至多只有一个元素.

3. 解: $A = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\} = \{1, 2\}$.

因为 $B \subseteq A$, 所以 B 为 $\emptyset, \{1\}$ 或 $\{2\}$. B 为 $\emptyset$ 时, $a = 0$; B 为 $\{1\}$ 时, $a = -2$; B 为 $\{2\}$ 时, $a = -1$.

所以实数 a 的值组成的集合为 $\{-2, -1, 0\}$.

第二节 集合的运算

【典例解析】

变式训练 1

1. C 解析: 由于 $A = \{0, 1, 2\}, B = \{1, 3\}$, 根据交集的定义可得 $A \cap B = \{1\}$.

2. C 解析: 由于 $A = \{0, 1\}, B = \{-1, 0\}$, 根据并集的定义可得 $A \cup B = \{-1, 0, 1\}$.

变式训练 2

解: $A \cap B = \{2, 3\}, A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$,

$\complement_U A = \{4\}, \complement_U B = \{0, 1\}$, 所以 $\complement_U A \cup \complement_U B = \{0, 1, 4\}$.

变式训练 3

解: (1) 由题意得 $\begin{cases} a + 3 \leq 1, \\ a \geq -6, \end{cases}$ 解得 $-6 \leq a \leq -2$.

(2)由题意得 $a+3 < -6$ 或 $a > 1$, 解得 $a > 1$ 或 $a < -9$.

【巩固练习】

基础巩固

一、选择题

1. B 解析: 由于集合 A, B 中有共同元素 2, 4, 故 $A \cap B = \{2, 4\}$.
2. D 解析: 理解补集的定义, 由已知可得 $\complement_U A = \{3, 9\}$. 故选 D.
3. C 解析: 由已知可得 $A \cup B = \{x | x > -2\}$.
4. C 解析: 根据题意可知集合 B 必包含元素 4. 根据 $\{1, 2, 3\}$ 的子集个数为 $2^3 = 8$, 故集合 B 的个数为 8.
5. B 解析: $B = \{x | 3x - 7 \geq 8 - 2x\} = \{x | x \geq 3\}$, 根据并集的定义可知 $A \cup B = \{x | x \geq 2\}$.
6. D 解析: 由题意可知 $A \cup B = \{0, 1, 2, a, a^2\} = \{0, 1, 2, 4, 16\}$. 所以 $\begin{cases} a=4, \\ a^2=16 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=16, \\ a^2=4, \end{cases}$ 解得 $a=4$ 或无解, 故选 D.

二、填空题

1. $\{1, 2\}$ 解析: $A = \{0, 1, 2\}, B = \{1, 2, 3\}$, 根据交集的定义可得 $A \cap B = \{1, 2\}$.
2. $\{(1, 0)\}$ 解析: 根据题意得 $\begin{cases} x+y=1, \\ 2x-y=2, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=1, \\ y=0. \end{cases}$ 所以 $A \cap B = \{(1, 0)\}$.
3. $\{x | -1 < x < 2\}$ 解析: $A = \{x | x+1 > 0\} = \{x | x > -1\}$, $B = \{x | 3x-6 < 0\} = \{x | x < 2\}$. 则 $A \cap B = \{x | -1 < x < 2\}$.
4. 5 解析: 设两项都参加的有 x 人, 则只参加甲项的有 $(30-x)$ 人, 只参加乙项的有 $(25-x)$ 人. 根据题意得 $(30-x) + x + (25-x) = 50$, 解得 $x=5$.

三、解答题

1. 解: 由 $A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}, B = \{1, 2, x^2-1\}$ 得 $x^2-1=3$, 解得 $x=\pm 2$. 此时 $B = \{1, 2, 3\}$. 所以 $A \cap B = \{1\}$.
2. 解: 因为 $A = \{0, 1, 2, 5\}, B = \{2, 5, 7\}, U = \{0, 1, 2, 5, 7\}$. 所以 $\complement_U A = \{7\}, \complement_U B = \{0, 1\}$. 从而得到 $A \cap B = \{2, 5\}$.
 $A \cup B = \{0, 1, 2, 5, 7\}$.
 $\complement_U A \cup \complement_U B = \{0, 1, 7\}$.
3. 解: 因为 $A \cap B = \{9\}$, 所以 $9 \in A$, 即 $2a-1=9$ 或 $a^2=9$, 解得 $a=5$ 或 $a=\pm 3$.
 当 $a=5$ 时, $A = \{-4, 9, 25\}, B = \{0, -4, 9\}$, 此时 $A \cap B = \{-4, 9\}$ 与题干矛盾, 故 $a=5$ 舍去.
 当 $a=3$ 时, $B = \{-2, -2, 9\}$ 不满足集合的互异性, 故 $a=3$ 舍去.
 经检验可知 $a=-3$ 符合题意.
 故 a 的值为 -3 .

能力提升

1. 解: 由于 $A \cap B = \{2\}$, 则 $2 \in A$ 且 $2 \in B$.
 将 $x=2$ 分别代入集合 A 和集合 B 中得到 $p=10, q=6$.
 所以 $A = \{x | x^2 - 10x + 16 = 0\} = \{2, 8\}, B = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0\} = \{2, 3\}$.
 从而求得 $A \cup B = \{2, 3, 8\}$.

2. 解: $y = x^2 - 2x + 5 = (x-1)^2 + 4$, 故 $A = \{y | y \geq 4, y \in \mathbf{N}\}$. $y = -x^2 - 4x + 10 = -(x+2)^2 + 14$, 故 $B = \{y | y \leq 14, y \in \mathbf{N}\}$, 故 $A \cap B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$. 所有元素的和为 $4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14=99$.

第三节 充要条件

【典例解析】

变式训练 1 A 解析: 解不等式 $|x-2| < 3$ 得 $-1 < x < 5$. 因为 $0 < x < 5 \Rightarrow -1 < x < 5$, 但 $-1 < x < 5 \not\Rightarrow 0 < x < 5$, 所以甲是乙的充分条件, 故选 A.

变式训练 2

解: 因为 $p: x^2 - 2x - 3 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 3$,

$q: -a < x-1 < a, 1-a < x < 1+a (a > 0)$.

由于 q 是 p 的一个必要条件, 则 $\{x | -1 < x < 3\} \subseteq \{x | 1-a < x < 1+a\} (a > 0)$.

所以 $\begin{cases} 1-a \leq -1, \\ 1+a \geq 3, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 1-a < -1, \\ 1+a \geq 3, \end{cases}$ 解得 $a > 2$. 即实数 a 的取值范围为 $(2, +\infty)$.

【巩固练习】

基础巩固

一、选择题

1. A 解析: $x < -2 \Rightarrow x^2 - 4 > 0$, 而 $x^2 - 4 > 0 \not\Rightarrow x < -2$, 所以答案选 A.
2. C 解析: $A \cap B = A \Rightarrow A \subseteq B$, 且 $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$, 所以答案选 C.
3. A 解析: 根据题意, 甲 $\Rightarrow$ 乙, 乙 $\Leftrightarrow$ 丙, 丙 $\Rightarrow$ 丁, 所以甲 $\Rightarrow$ 丁. 答案选 A.
4. B 解析: $x \geq 1 \Rightarrow |x| \geq 1$, 而 $|x| \geq 1 \not\Rightarrow x \geq 1$, 所以答案选 B.
5. A 解析: $\alpha = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \tan \alpha = 1$, 而 $\tan \alpha = 1 \not\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$, 所以答案选 A.
6. A

二、填空题

1. 充分
2. 充要
3. 必要
4. 充分

三、解答题

1. 解: (1) 既不充分也不必要条件;
(2) 必要条件;
(3) 充分条件;
(4) 充要条件.

2. 解: 分两种情况进行讨论:

当 $a=0$ 时, 不等式 $1 > 0$ 恒成立.

当 $a \neq 0$ 时, 对于一切实数 x 都有 $ax^2 - ax + 1 > 0$ 成立, 则 $a > 0$ 且 $\Delta = a^2 - 4a < 0$, 解得 $0 < a < 4$.

综上所述, a 的取值范围为 $0 \leq a < 4$.

能力提升

1. 必要

2. 解: $q: x^2 - 2x + 1 - m^2 \leq 0 (m > 0) \Leftrightarrow [x - (1 - m)][x - (1 + m)] \leq 0$.

因为 $m > 0$, 所以不等式 $[x - (1 - m)][x - (1 + m)] \leq 0$ 的解集为 $1 - m \leq x \leq 1 + m$.

因为 p 是 q 的充分条件, 所以不等式 $-2 \leq x \leq 10$ 的解集是 $x^2 - 2x + 1 - m^2 \leq 0 (m > 0)$ 解集的子集.

从而得 $\begin{cases} 1 - m \leq -2 \\ 1 + m \geq 10 \end{cases} \Rightarrow m \geq 9$.

实数 m 的取值范围为 $[9, +\infty)$.

第二章 不等式

第一节 不等式的基本性质与区间

【典例解析】

变式训练 1

解: (1) 因为

$$(a+1)(a+3) - (a-1)(a+5) = a^2 + 4a + 3 - (a^2 + 4a - 5) = 8 > 0,$$

所以 $(a+1)(a+3) > (a-1)(a+5)$.

(2) 因为 $a^2 + 10 - 6a = (a-3)^2 + 1 > 0$, 所以 $a^2 + 10 > 6a$.

变式训练 2 D 解析: 取特殊值代入验证, 令 $a=10, b=5, c=2$, 可知选项 A、B、C 正确, 选项 D 错误, 所以答案选 D.

变式训练 3

解: 设 $z = 2x - 3y = a(x+y) + b(x-y)$.

因为 $\begin{cases} a+b=2, \\ a-b=-3, \end{cases}$ 所以 $\begin{cases} a=-\frac{1}{2}, \\ b=\frac{5}{2}. \end{cases}$

又因为 $-2 < -\frac{1}{2}(x+y) < \frac{1}{2}, 5 < \frac{5}{2}(x-y) < \frac{15}{2}$.

所以 $3 < -\frac{1}{2}(x+y) + \frac{5}{2}(x-y) < 8$, 即 $3 < 2x - 3y < 8$.

变式训练 4

解: $A \cup B = (-1, 4], A \cap B = [1, 3]$.

【巩固练习】

基础巩固

一、选择题

1. C

2. D 解析: 取特殊值法.