

重庆市中职毕业生
参加高职分类考试系列丛书

全解总复习

全解总复习 • 语文

全解总复习 • 数学

全解总复习 • 英语

全解总复习 • 计算机

同步巅峰训练卷

同步巅峰训练卷 • 语文

同步巅峰训练卷 • 数学

同步巅峰训练卷 • 英语

模拟预测试卷

模拟预测试卷 • 文化素质

模拟预测试卷 • 计算机

ISBN 978-7-5608-9322-8



9 787560 893228

定价: 49.80元

重庆市中职毕业生参加高职分类考试系列丛书

全解总复习 • 数学

最新修订

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

X3

华腾新思®

重庆市中职毕业生参加高职分类考试系列丛书

全解总复习 数学

主编 徐劲松 马法拉 邱 姣

最新修订

同时适用于中高职贯通培养转段考试

阵容强大

编者均系资深教研员和重点中等职业学校骨干教师

内容全面

严格依据重庆市中职生参加高职分类考试考试说明编写

体例成熟

紧扣教学大纲和考纲，侧重导向，利于指导复习



同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

重庆市中职毕业生参加高职分类考试系列丛书

全解总复习

数学

主 编	徐劲松	马法拉	邱 姣	
副主编	周召荣	黎 丽	周继洪	胡 冬
	周友权	李 强	张素君	谭术清
	常祺中	任 宏	刘作琦	钟仕娟
	王祖华	邓 凡		
参 编	廖文宁	周光华	马春艳	张有恒
	罗 婧			



同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

· 上海 ·

内 容 提 要

全书分为集合、不等式、函数、数列、排列组合、三角函数、解析几何七章。每章根据考试大纲要求,对考点知识进行归纳和整理,使之前复习过的零散知识形成有机整体,从而掌握知识规律和技能,形成解题方法。

本书适合作为对口招生考试的复习教材,也可作为广大中等职业学校学生的学习资料。

图书在版编目(CIP)数据

全解总复习. 数学 / 徐劲松, 马法拉, 邱姣主编
--上海: 同济大学出版社, 2020. 7(2025. 9 重印)
ISBN 978-7-5608-9322-8
I. ①全… II. ①徐… ②马… ③邱… III. ①数学课
-中等专业学校-升学参考资料 IV. ①G634
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2020)第 112710 号

全解总复习·数学

徐劲松 马法拉 邱 姣 主编

责任编辑 刘丽丽 刘睿 责任校对 罗 琳 封面设计 刘文东

出版发行 同济大学出版社 www.tongjipress.com.cn
(地址: 上海市四平路 1239 号 邮编: 200092 电话: 021-65985622)
经 销 全国各地新华书店
印 刷 大厂回族自治县聚鑫印刷有限责任公司
开 本 880 mm×1 230 mm 1/16
印 张 14.5
字 数 305 000
版 次 2020 年 7 月第 1 版
印 次 2025 年 9 月第 5 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5608-9322-8

定 价 49.80 元

本书若有印装质量问题, 请向本社发行部调换 版权所有 侵权必究

经过多年的摸索与实践,重庆市对口高职分类考试越来越规范有序。从考试内容和考试形式上来看,考生将面临更大的挑战,多数考生为如何在短期内熟悉考试形式、了解考试内容、把握考试重难点、弥补“短板”备受困扰,亟须通过高效的学习来快速提升应试能力,以期在考试中脱颖而出。

为了帮助广大考生在较短的时间内高效、便捷、准确地把握考试的脉络,我们特组织多所中职学校一线任课教师,根据各考试科目的大纲要求,深入研究了近几年对口高职分类考试的命题情况,针对命题中出现的最新变化,精心编写了这套重庆市中职毕业生参加高职分类考试系列丛书,供广大考生在复习时使用。

本书是该系列丛书之《全解总复习·数学》。数学是对口高职分类考试的必考科目之一,其内容知识点较多、难度较大,也是考生备考的重点和难点所在。本书在编写时紧扣《重庆市中职毕业生参加高职分类考试招生文化素质考试说明》,紧密结合真题,内容充实、结构严谨、重点突出、指导性强,是广大考生进行考试复习和储备知识的重要参考资料。

本书具有以下鲜明特色:

1. 编写阵容强大,熟知学情考情

本书编写成员均系重庆市中等职业学校的骨干教师,来自重庆市梁平职业教育中心、重庆市忠县职业教育中心、重庆市丰都职业教育中心、重庆市永川职业教育中心、重庆市巫山职业教育中心、重庆市垫江职业教育中心、重庆市公共卫生学校、重庆市大足职业教育中心等重点学校。编写成员始终工作在教学一线,熟悉考情和学生的备考情况,使本书具有极高的权威性。

2. 依据最新大纲,体现命题趋势

本书在编写时紧扣《重庆市中职毕业生参加高职分类考试招生文化素质考

试说明》，深入、细致地研究了其中的考试目标、考试内容模块与要求、试卷结构和题型示例，凝聚了中职学校一线教师的经验和智慧，旨在帮助考生切中考试重点，少走弯路，缩短备考时间，提高备考效率。

3. 体例科学，结构合理

本书设置了“考情观察室”“真题回放站”“知识面面观”“课堂讲与练”“巩固与提升”等栏目，所设栏目环环相扣，科学实用，使考生能够系统准确地掌握重点知识，迅速捕捉考试要点，强化学习效果。

4. 知识点翔实，讲解深入浅出

本书根据《重庆市中职毕业生参加高职分类考试招生文化素质考试说明》要求，设置了集合、不等式、函数、数列、排列组合、三角函数、平面解析几何共7章内容，涵盖了所有考点，并进行了适当的拓展与延伸。知识讲解深入浅出，既全面透彻，又通俗易懂，方便考生迅速理清头绪，准确把握考试脉络，有针对性地进行复习。

5. 讲练结合，解析精当

本书采取了讲练结合的方式，讲解内容后设置了许多例题，使考生能轻松地理解和掌握所阐述的知识点；同时，本书还在每一节后设置了“巩固与提升”，大量的试题配备了详尽的解析，帮助考生及时查漏补缺，做到学练结合，从而有步骤、有计划地提高应试能力。

衷心希望本套对口高职分类考试用书能为广大考生的复习备考带来实质性的帮助。对书中的不足之处，敬请各位专家、同仁及读者不吝指正。

最后，预祝广大考生在考试中取得好成绩！

编者

Contents

目 录

第一章	集合	1
	第一节 集合的概念与集合之间的关系	2
	第二节 集合的运算	7
	第三节 充要条件	11
第二章	不等式	15
	第一节 不等式的基本性质	16
	第二节 一元一次不等式(组)	20
	第三节 一元二次不等式	25
	第四节 含绝对值的不等式	30
第三章	函数	34
	第一节 函数的概念及表示方法	35
	第二节 函数的性质	40
	第三节 指数与指数函数	47
	第四节 对数与对数函数	52
	第五节 函数的应用举例	58

第四章	数列	63
第一节	数列的概念	64
第二节	等差数列及其应用	69
第三节	等比数列及其应用	74
第五章	排列组合	79
第一节	计数的基本原理	80
第二节	排列组合的计算及其应用	83
第六章	三角函数	89
第一节	三角函数的概念与计算	90
第二节	同角三角函数的基本关系式及诱导公式 ...	96
第三节	两角和与差的三角函数公式及二倍角 公式	103
第四节	三角函数的图像与性质	108
第五节	解三角形	116
第七章	平面解析几何	123
第一节	直线方程与两直线的位置关系	124
第二节	圆的方程及直线与圆的位置关系	132
第三节	椭圆	138
第四节	双曲线	148
第五节	抛物线	154

第一节 集合的概念与集合之间的关系



(2021·重庆市对口高职)集合 $\{0,1\}$ 的所有子集为().

- A. $\{0\}, \{1\}$
B. $\emptyset, \{0\}, \{1\}$
C. $\{0\}, \{1\}, \{0, 1\}$
D. $\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}$

【专家详解】由子集的概念进行求解, 答案选 D.

(2023·重庆市对口高职)与集合 $\{x \mid x^2 - 4 = 0\}$ 相等的是().

- A. $\{x \mid x-2=0\}$ B. $\{x \mid -2 < x < 2\}$ C. $\{2\}$ D. $\{-2, 2\}$

【专家详解】由 $x^2-4=0$ 解得 $x=\pm 2$, 所以集合 $\{x \mid x^2-4=0\}=\{-2, 2\}$. 故选 D.

(2024·重庆市对口高职) 下列集合中是集合 $\{x|2x<5, x\in\mathbf{N}^*\}$ 的子集的是().

- A. $\{-1\}$ B. $\{2\}$ C. $\{1, 3\}$ D. $\{2, 3\}$

【专家详解】解不等式 $2x < 5$, 可得 $x < \frac{5}{2}$, 因为 $x \in \mathbf{N}^*$, 所以 $x=1$ 或 $x=2$. 故选 B.



一、集合的概念与表示法

1. 集合

把具有某种属性的一些确定的对象看成一个整体,便形成一个集合,一般用大写英文字母 $A, B, C, \dots$ 表示.

2. 元素

集合中的每一个确定的对象叫作这个集合的元素,常用小写字母 $a, b, c, \dots$ 表示.

3. 元素与集合的关系

如果 a 是集合 A 的一个元素,就说 a 属于 A ,记作 $a \in A$;如果 a 不是集合 A 的元素,就说 a 不属于 A ,记作 $a \notin A$.

4. 元素的特征

- (1) 确定性: 任何一个对象或者是这个集合的元素, 或者不是它的元素.
- (2) 互异性: 集合中任何两个元素都是互不相同的, 相同的对象只能算作这个集合的一个元素.
- (3) 无序性: 一个集合中, 通常不考虑元素之间的顺序, 也就是说由 a, b 两个元素组成的集合与由 b, a 两个元素组成的集合是相同的.

5. 集合的分类

元素个数有限的集合称为有限集,元素个数无限的集合称为无限集.不含任何元素的集合叫作空集.记作 $\emptyset$.

6. 常见的数集

正整数集($\mathbf{N}_+$ 或 $\mathbf{N}^*$)、自然数集($\mathbf{N}$)、整数集($\mathbf{Z}$)、有理数集($\mathbf{Q}$)、实数集($\mathbf{R}$).

7. 集合的三种表示法

(1)列举法. 把集合的元素一一列举出来, 写在大括号内, 这种表示集合的方法叫作列举法.

注意: 用列举法表示集合时, 要注意以下几点:

①元素之间用逗号“,”隔开.

②元素不能重复(满足集合中元素的互异性).

③元素不能遗漏.

④当集合中的元素较少时用列举法比较简单; 若集合中的元素较多或无限, 但存在一定的规律性, 在不发生误解的情况下, 也可以用列举法表示.

(2)描述法. 用集合所含元素的共同特性表示集合的方法称为描述法.

描述法表示的一般形式是 $\{x | p(x)\}$, 其中“ x ”是集合中元素的代表形式, “ $p(x)$ ”是集合中元素的共同特征, 两者之间的竖线不可省略.

注意: 用描述法表示集合时, 要注意以下几点:

①写清楚集合中元素的代表形式(一般用小写字母表示).

②写明集合中元素的特征或性质.

③用于描述元素特征的语句要力求简明、准确, 不产生歧义; 多层描述时, 应当准确使用“且”“或”等关联词.

④所有描述的内容都要写在大括号内.

⑤在不引起混淆的情况下, 用描述法表示集合时也可以省去竖线和竖线左边的部分. 例如, 正整数的集合可简记为{正整数}, 但是, 集合 $\{x | x > 1\}$ 就不能省略竖线及其左边的 x .

(3)图形法. 用平面区域来表示集合之间关系的方法, 一般用平面上的矩形表示一个集合, 是集合的一种直观表示.

二、集合间的关系

1. 子集

一般地, 对于两个集合 A, B , 如果集合 A 中任何一个元素都是集合 B 的元素, 那么, 集合 A 就叫作集合 B 的子集, 记作 $A \subseteq B$ 或者 $B \supseteq A$, 读作“ A 包含于 B ”, 或“ B 包含 A ”.

当集合 A 不包含于集合 B , 或集合 B 不包含集合 A 时, 记作 $A \not\subseteq B$ 或 $B \not\supseteq A$.

性质: 任何一个集合是它本身的子集, 即 $A \subseteq A$; 空集是任何集合的子集, 即 $\emptyset \subseteq A$; 对集合 A, B, C , 若 $A \subseteq B, B \subseteq C$, 则 $A \subseteq C$.

注意: 不能把子集说成由原来集合中的部分元素组成的集合, 因为 A 的子集包括它本身, 而这个子集由 A 的全体元素组成; 空集也是 A 的子集, 但这个子集中不包括 A 中的任何元素.

2. 真子集

如果 A 是 B 的子集, 并且 B 中至少有一个元素不属于 A , 则 A 是 B 的真子集(A 包含于 B 但不等于 B), 记作 $A \subsetneq B$ 或 $B \supsetneq A$.

性质: 空集是任何非空集合的真子集; 对于集合 A, B, C , 若 $A \subsetneq B, B \subsetneq C$, 则 $A \subsetneq C$.

注意: 1. 元素与集合之间是属于关系, 集合与集合之间是包含关系.

2. 若集合 A 中有 $n(n \in \mathbf{N}_+)$ 个元素, 则 A 的子集有 2^n 个, 真子集有 $2^n - 1$ 个, 非空真子集有 $2^n - 2$ 个.

3. 集合相等

一般地,对于两个集合 A 与 B ,如果集合 A 中的任何一个元素都是集合 B 的元素,同时集合 B 中的任何一个元素都是集合 A 的元素,我们就说集合 A 等于集合 B ,记作 $A=B$ (A, B 的所有元素均相等).

注意: (1)若两个集合相等,则两个集合所含元素完全相同,反之亦然.

(2)要判断两个集合是否相等,对于元素较少的有限集,主要看它们的元素是否完全相同;若是无限集,则从“互为子集”入手进行判断.



课堂讲与练

【例 1】 设集合 $A=\{a\}$, 下列结论正确的是().

A. $a \in A$

B. $a \notin A$

C. $a \subseteq A$

D. $a \not\subseteq A$

【解析】 本题考查了元素与集合、集合与集合之间的关系, 答案选 A.

【技巧点拨】 正确理解符号 $\in, \notin, \subseteq, \not\subseteq$ 的意义, 是正确处理此类问题的关键.

变式训练 1

下列说法正确的有()个.

①空集没有子集; ②任何集合至少有两个子集; ③空集是任何集合的真子集; ④若 $\emptyset \subsetneq A$, 则 $A \neq \emptyset$.

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【例 2】 集合的表示:

(1)用列举法表示集合 $A=\{x|-2 < x < 5, x \in \mathbf{Z}\}$;

(2)用列举法表示集合 $B=\{(x, y) | 2x+y=5, x \in \mathbf{N}, y \in \mathbf{N}\}$;

(3)用描述法表示在直角坐标系中, 由第一象限所有点组成的集合.

【解析】 (1) $A=\{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$. (2) $B=\{(0, 5), (1, 3), (2, 1)\}$. (3) $\{(x, y) | x > 0, y > 0\}$.

【技巧点拨】 掌握集合的两种表示方法.

变式训练 2

用合适的方法表示下列集合:

(1)在直角坐标系中, 由第四象限所有点组成的集合;

(2) $\{1, 4, 9, 16, 25, 36\}$.

【例 3】 已知集合 $A=\{x|x^2-x-2=0\}$, $B=\{x|x^2-4x+p=0\}$, 若 $B \subseteq A$, 求实数 p 的取值范围.

【解析】 由题意得: $A=\{-1, 2\}$, 因为 $B \subseteq A$, 所以 $B=\emptyset$ 或 $B=\{-1\}$ 或 $B=\{2\}$ 或 $B=\{-1, 2\}$.

当 $B=\emptyset$ 时, $\Delta=(-4)^2-4p=16-4p<0$, 解得 $p>4$;

当 $B=\{-1\}$ 时, $\begin{cases} \Delta=16-4p=0 \\ (-1)^2-4\times(-1)+p=0 \end{cases}$, 无解;

当 $B=\{2\}$ 时, $\begin{cases} \Delta=16-4p=0, \\ 2^2-4\times 2+p=0, \end{cases}$ 解得 $p=4$.

当 $B=\{-1, 2\}$ 时, 方程只可能为 $(x+1)(x-2)=0$, 即 $x^2-x-2=0$ 与 $x^2-4x+p=0$ 矛盾. 不合题意, 舍去.

综上, 实数 p 的取值范围是 $[4, +\infty)$.

【技巧点拨】解决两个集合包含或相等关系的问题, 通过建立方程(组)或不等式(组), 然后解出未知数或其取值范围, 最后利用集合元素的特征进行检验即可.

变式训练 3

已知集合 $A=\{-1, 3, 2m-1\}$, 集合 $B=\{3, m^2\}$, 且 $B\subseteq A$, 则 $m=$ _____.

【例 4】 已知集合 $A=\{(x, y) \mid x^2+y^2\leq 3, x\in\mathbf{Z}, y\in\mathbf{Z}\}$, 则 A 中元素的个数为().

A. 9

B. 8

C. 5

D. 4

【解析】由 $x^2+y^2\leq 3$, 知 $-\sqrt{3}\leq x\leq\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}\leq y\leq\sqrt{3}$. 又 $x\in\mathbf{Z}, y\in\mathbf{Z}$, 所以 $x\in\{-1, 0, 1\}, y\in\{-1, 0, 1\}$. 所以 A 中元素的个数为 9. 故答案为 A.

【技巧点拨】对于求解集合中元素个数的题目, 可根据集合中元素的互异性求出集合中元素的个数, 利用数形结合的方法或排列组合的知识能简便运算.

变式训练 4

已知集合 $A=\{1, 2, 4\}$, 集合 $B=\{x \mid x=a+b, a\in A, b\in A\}$, 则集合 B 中元素的个数为_____.



巩固与提升

基础训练

一、选择题

1. 下列所列对象能组成集合的是().

A. 好人

B. 非常小的数

C. 有趣的书

D. 小于 5 的数

2. 给出下面四个关系: ① $0\in\mathbf{Q}$; ② $\sqrt{3}\notin\mathbf{Q}$; ③ $\mathbf{Z}\subseteq\mathbf{Q}$; ④ $\emptyset\subseteq\{0\}$, 其中正确的个数为().

A. 4

B. 3

C. 2

D. 1

3. 用列举法表示集合 $\{x \mid x^2-3x+2=0\}$ 的结果是().

A. $(1, 2)$

B. 1, 2

C. $\{1, 2\}$

D. 以上都不是

4. 集合 $\{1, 2, 3, 4\}$ 所有子集的个数是().

A. 8

B. 14

C. 15

D. 16

5. 下列选项中表述正确的是().

- A. 由 1, 3, 5, 7, 5, 3 组成的集合中有 6 个元素
 B. 周长为 16 cm 的三角形组成的集合是有限集合
 C. 集合 $\{0\}$ 是空集
 D. 一年级(3)班的所有同学可以组成集合

6. 用列举法表示“大于 2 且小于 9 的偶数的全体”构成的集合是().

- A. $\emptyset$ B. $\{4, 6, 8\}$ C. $\{3, 5, 7\}$ D. $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

二、填空题

1. 用适当的符号($\in, \notin, \subseteq, \supseteq, =$)填空.

3 _____ $\{2, 3\}$; π _____ $\mathbf{Q}$; $\{1, 2, 3\}$ _____ $\mathbf{Z}$;

$\mathbf{N}^*$ _____ $\mathbf{Z}$; $\{-3, 3\}$ _____ $\{x | x^2 = 9\}$.

2. 绝对值等于 1 的所有整数组成的集合是_____.

3. 已知集合 $P = \{x | 2 < x < a, x \in \mathbf{N}\}$, 已知集合 P 中恰有 3 个元素, 则整数 $a =$ _____.

4. 下列六个关系式: ① $\{a, b\} \subseteq \{b, a\}$; ② $\{a, b\} = \{b, a\}$; ③ $0 = \emptyset$; ④ $0 \in \{0\}$; ⑤ $\emptyset \in \{0\}$; ⑥ $\emptyset \subseteq \{0\}$. 其中正确的个数为_____.

三、解答题

1. 已知集合 $A = \{0, 1, 2\}$, 集合 $B = \{x | x = ab, a \in A, b \in A\}$.

(1) 用列举法写出集合 B ;

(2) 判断集合 B 和集合 A 的关系.

2. 写出集合 $\{-3, -1, 1, 3\}$ 的所有子集, 并指出哪些是真子集.

3. 已知集合 $\{1, a, b\}$ 与 $\{-1, -b, 1\}$ 是同一集合, 求实数 a, b 的值.

提升训练

1. 满足 $\{a, b\} \subsetneq A \subseteq \{a, b, c, d, e\}$ 的集合 A 的个数是().

- A. 9 B. 8 C. 7 D. 6

2. 已知集合 $A = \{x | ax^2 + 2x + 1 = 0, x \in \mathbf{R}\}$.

(1) 若 A 中只有一个元素, 求 a 的值;

(2) 若 A 中恰有两个元素, 求 a 的取值范围;

(3) 若 A 中至多有一个元素, 求 a 的取值范围.

3. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $B = \{x | ax + 2 = 0\}$, 且 $B \subseteq A$, 求实数 a 的值组成的集合.

第二节 集合的运算



真题回放站

(2020 · 重庆市对口高职) 设集合 $A = \{0, 1\}$, $B = \{-1, 0, 1\}$. 则 $A \cup B =$ ().

A. $\{-1\}$

B. $\{0, 1\}$

C. $\{-1, 1\}$

D. $\{-1, 0, 1\}$

【专家详解】 根据并集定义可知选 D.

(2021 · 重庆市对口高职) 已知集合 $A = \{x | x^2 - 4x + 3 > 0\}$, $B = \{x | |2x + 1| \leq 5\}$, 求 $A \cap B$.

【专家详解】 不等式 $x^2 - 4x + 3 > 0$ 变形为 $(x - 1)(x - 3) > 0$,

解得 $x < 1$ 或 $x > 3$.

所以集合 $A = \{x | x < 1 \text{ 或 } x > 3\}$;

不等式 $|2x + 1| \leq 5$ 变形为 $-5 \leq 2x + 1 \leq 5$,

解得 $-3 \leq x \leq 2$,

所以集合 $B = \{x | -3 \leq x \leq 2\}$,

故 $A \cap B = \{x | -3 \leq x < 1\}$.

(2022 · 重庆市对口高职) 设集合 $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, 则 $A \cup B =$ ().

A. $\{3\}$

B. $\{1, 5\}$

C. $\{1, 2, 4, 5\}$

D. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

【专家详解】 $A \cup B = \{1, 3, 5\} \cup \{2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 故选 D.

(2022 · 重庆市对口高职) 设 $A = \{x | x^2 - 4x - 12 > 0\}$, $B = \{x | |x + 2| \leq 9\}$, 求 $A \cap B$.

【专家详解】 $A = \{x | x^2 - 4x - 12 > 0\} = \{x | (x - 6)(x + 2) > 0\} = \{x | x > 6 \text{ 或 } x < -2\}$,

$B = \{x | |x + 2| \leq 9\} = \{x | -9 \leq x + 2 \leq 9\} = \{x | -11 \leq x \leq 7\}$,

所以 $A \cap B = \{x | -11 \leq x < -2 \text{ 或 } 6 < x \leq 7\}$.

(2025 · 重庆市对口高职) 设集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$, C 是 A 或 B 中的偶数, 则 $C =$ ().

A. $\{4\}$

B. $\{2, 4, 6\}$

C. $\{2, 4, 6, 8\}$

D. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

【专家详解】 由题意得, 集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$, $C = \{x | x \text{ 是 } A \text{ 或 } B \text{ 中的偶数}\}$, 则 $C = \{2, 4, 6\}$. 故选 B.



知识面面观

1. 交集

一般地,由既属于集合 A 又属于集合 B 的所有元素组成的集合,称为集合 A 与集合 B 的交集,记作 $A \cap B$,即 $A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$.

性质: (1) $A \cap B = B \cap A$.

(2) $A \cap A = A$.

(3) $A \cap \emptyset = \emptyset$.

(4) $A \cap B \subseteq A, A \cap B \subseteq B$.

(5) 若 $A \subseteq B$,则 $A \cap B = A$.

2. 并集

一般地,由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素组成的集合,称为集合 A 与集合 B 的并集,记作 $A \cup B$,即 $A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$.

性质: (1) $A \cup B = B \cup A$.

(2) $A \cup A = A$.

(3) $A \cup \emptyset = A$.

(4) $A \subseteq A \cup B, B \subseteq A \cup B$.

(5) 若 $A \subseteq B$,则 $A \cup B = B$.

3. 全集

如果一个集合含有我们所研究问题中涉及的所有元素,则称这个集合为全集,通常用 U 表示.

注意: 全集是一个相对的概念,在不同的情况下全集的概念也不同.

4. 补集

对于一个集合 A ,由全集 U 中不属于集合 A 的所有元素组成的集合称为集合 A 相对于全集 U 的补集,简称为集合 A 的补集,记作 $\complement_U A$,即 $\complement_U A = \{x | x \in U \text{ 且 } x \notin A\}$.

性质: (1) $\complement_U (\complement_U A) = A$.

(2) $\complement_U \emptyset = U, \complement_U U = \emptyset$.

(3) $A \cup (\complement_U A) = U$.

(4) $A \cap (\complement_U A) = \emptyset$.

注意: 补集可以这样理解,补集 $\complement_U A$ 就是全集 U 与集合 A 的差集.



课堂讲与练

【例 1】 (1) 设集合 $A = \{1, 2, 3\}, B = \{3, 4\}$, 则 $A \cup B =$ ().

A. $\{3\}$

B. $\{3, 4\}$

C. $\{1, 2, 3\}$

D. $\{1, 2, 3, 4\}$

(2) 设集合 $A = \{1, 2, 3\}, B = \{2, 3, 4\}$, 则 $A \cap B =$ ().

A. $\emptyset$

B. $\{2, 3\}$

C. $\{1, 4\}$

D. $\{1, 2, 3, 4\}$

(3) 已知集合 $A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, a\}, A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$, 则 $a =$ _____.

【解析】 (1) $A \cup B$ 是由集合 A 和集合 B 中所有元素组成的, 因为 $A = \{1, 2, 3\}, B = \{3, 4\}$, 则

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$. 故选 D.

(2) $A \cap B$ 是由集合 A 和集合 B 中相同的元素组成的, 集合 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, 所以 $A \cap B = \{2, 3\}$. 故选 B.

(3) 根据并集运算可知 $a = 4$.

【技巧点拨】理解交集、并集、补集的概念.

变式训练 1

1. 设集合 $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$, 则 $A \cap B = (\quad)$.

A. $\{0, 1, 2\}$

B. $\{1, 3\}$

C. $\{1\}$

D. $\{0, 1, 2, 3\}$

2. 设集合 $A = \{0, 1\}$, $B = \{-1, 0\}$, 则 $A \cup B = (\quad)$.

A. $\emptyset$

B. $\{0\}$

C. $\{-1, 0, 1\}$

D. $\{0, 1\}$

【例 2】 设全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x | 0 \leq x < 2\}$, 集合 $B = \{x | x^2 - 2x - 3 < 0\}$, 求 $A \cap B$, $A \cup B$, $\complement_U A \cap B$.

【解析】 $B = \{x | x^2 - 2x - 3 < 0\} = \{x | -1 < x < 3\}$, $\complement_U A = \{x | x < 0 \text{ 或 } x \geq 2\}$,

所以 $A \cap B = \{x | 0 \leq x < 2\}$, $A \cup B = \{x | -1 < x < 3\}$, $\complement_U A \cap B = \{x | -1 < x < 0 \text{ 或 } 2 \leq x < 3\}$.

【技巧点拨】考查对集合运算的理解及性质的运用.

变式训练 2

设全集 $U = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, 集合 $A = \{0, 1, 2, 3\}$, 集合 $B = \{2, 3, 4\}$, 求 $A \cap B$, $A \cup B$, $\complement_U A \cup \complement_U B$.

【例 3】 已知集合 $M = \{x | a \leq x \leq a + 3\}$, $N = \{x | x < -1 \text{ 或 } x > 5\}$, 若 $M \cap N = \emptyset$, 求实数 a 的取值范围.

【解析】 如图所示, 要使 $M \cap N = \emptyset$, 必须满足 $\begin{cases} a + 3 \leq 5 \\ a \geq -1 \end{cases}$, 解得 $-1 \leq a \leq 2$, 所以实数 a 的取值范围为 $\{a | -1 \leq a \leq 2\}$.



【技巧点拨】解题时利用数轴表示集合, 便于寻求满足条件的实数 a . 特别需要注意的是“端点值”的问题, 是能取“=”还是不能取“=”.

变式训练 3

已知 $A = \{x | a \leq x \leq a + 3\}$, $B = \{x | x > 1 \text{ 或 } x < -6\}$.

(1) 若 $A \cap B = \emptyset$, 求 a 的取值范围;

(2) 若 $A \cup B = B$, 求 a 的取值范围.



巩固与提升

基础训练

一、选择题

1. 已知集合 $A = \{2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$. 则 $A \cap B =$ ().
 A. $\{2\}$ B. $\{2, 4\}$
 C. $\{2, 3, 4, 6, 8\}$ D. $\{3, 6, 8\}$
2. 已知集合 $U = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $A = \{1, 5, 7\}$. 则 $\complement_U A =$ ().
 A. $\{1, 3\}$ B. $\{3, 7, 9\}$
 C. $\{3, 5, 9\}$ D. $\{3, 9\}$
3. 设集合 $A = \{x | -2 < x < 3\}$, $B = \{x | x \geq 1\}$. 则 $A \cup B =$ ().
 A. $\{x | 1 \leq x < 3\}$ B. $\{x | x < -2 \text{ 或 } x > 3\}$
 C. $\{x | x > -2\}$ D. $\{x | x < -2 \text{ 或 } x \geq 1\}$
4. 设集合 $A = \{1, 2, 3\}$, 集合 B 满足 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$, 则集合 B 的个数为 ().
 A. 2 B. 4 C. 8 D. 16
5. 设集合 $A = \{x | 2 \leq x < 4\}$, $B = \{x | 3x - 7 \geq 8 - 2x\}$, 则 $A \cup B$ 等于 ().
 A. $\{x | x \geq 3\}$ B. $\{x | x \geq 2\}$ C. $\{x | 2 \leq x < 3\}$ D. $\{x | x \geq 4\}$
6. 集合 $A = \{0, 2, a\}$, $B = \{1, a^2\}$. 若 $A \cup B = \{0, 1, 2, 4, 16\}$, 则 a 的值为 ().
 A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

二、填空题

1. 已知集合 $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, 则 $A \cap B =$ _____.
2. 已知集合 $A = \{(x, y) | x + y = 1\}$, $B = \{(x, y) | 2x - y = 2\}$, 则 $A \cap B =$ _____.
3. 已知集合 $A = \{x | x + 1 > 0\}$, $B = \{x | 3x - 6 < 0\}$. 则 $A \cap B =$ _____.
4. 50 名学生参加甲、乙两项体育活动, 每人至少参加了一项, 参加甲项的学生有 30 名, 参加乙项的学生有 25 名, 则仅参加了两项活动的学生人数为 _____.

三、解答题

1. 已知集合 $A = \{1, 5\}$, $B = \{1, 2, x^2 - 1\}$, 若 $A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$, 求 x 及 $A \cap B$.
2. 设全集 $U = \{x | -2 \leq x \leq 4\}$, 集合 $A = \{x | 0 < x \leq 1\}$, 集合 $B = \{x | 1 \leq x < 3\}$, 求 $A \cap B$, $A \cup B$, $\complement_U(A \cap B)$, $\complement_U(A \cup B)$.

3. 已知集合 $A = \{x | 1 \leq x \leq 2\}$, 集合 $B = \{x | x \leq a\}$, 若 $A \cap B \neq \emptyset$, 求实数 a 的取值范围.

提升训练

1. 已知集合 $A = \{-4, 2a-1, a^2\}$, $B = \{a-5, 1-a, 9\}$, 若 $A \cap B = \{9\}$, 求 a 的值.

2. 已知集合 $A = \{x | x^2 - px + 16 = 0\}$, $B = \{x | x^2 - 5x + q = 0\}$, 且 $A \cap B = \{2\}$. 求 $A \cup B$.

3. 已知全集 $U = \{x \in \mathbf{N}^* | x \leq 10\}$, $A \cap B = \{4, 5\}$, $A \cap \complement_U B = \{1, 2, 3\}$, $\complement_U (A \cup B) = \{6, 7, 8\}$, 求 A, B .

第三节 充要条件



知识面面观

1. 命题的概念

在数学中, 我们把用语言、符号或式子表达的, 可以判断真假的陈述句叫命题. 正确的命题叫真命题, 记作 T; 错误的命题叫假命题, 记作 F, T 和 F 叫作命题的真值 (有的书上用 1 和 0 作为命题的真值). p 与 q 为等值的命题记作 $p = q$.

2. 充分、必要条件的定义

(1) 对于两个命题 p, q , 若 $p \Rightarrow q$, 则称 p 是 q 的充分条件, q 是 p 的必要条件.

注意: p 是 q 的充分条件, 是指只要具备了条件 p , 那么 q 就一定成立, 即命题中的条件是充分的; q 是 p 的必要条件, 是指若不具备条件 q , 则 p 就不能成立, 即 q 是 p 成立的必不可少的条件.

(2) 若 $p \Rightarrow q$ 且 $q \Rightarrow p$, 即 $p = q$, 则 p 是 q 的充分且必要条件, 简称充要条件.

注意: ① 当 $p \Leftrightarrow q$ 时, 也称 p 与 q 是等价的.

② 与充要条件等价的词语有: “当且仅当”“等价于”“有且只有”“必须且只需”“……, 反过来也成立”等.

3. 充分、必要条件的判断方法

(1) 从逻辑推理关系上判断(定义法):

- ① 若 $p \Rightarrow q$, 则 p 是 q 的充分条件.
- ② 若 $p \Leftarrow q$, 则 p 是 q 的必要条件.
- ③ 若 $p \Rightarrow q$ 且 $p \Leftarrow q$, 即 $p \Leftrightarrow q$, 则 p 是 q 的充要条件.

(2) 从命题所对应的集合与集合之间的关系上判断(集合法):

设命题 p 对应的集合为 A , 命题 q 对应的集合为 B .

- ① 若 $A \subseteq B$, 则 p 是 q 的充分条件.
- ② 若 $A \supseteq B$, 则 p 是 q 的必要条件.
- ③ 若 $A \subseteq B$ 且 $A \supseteq B$, 即 $A = B$, 则 p 是 q 的充要条件.



课堂讲与练

【例 1】 已知 $p: |3x-5| < 4, q: (x-1)(x-2) < 0$, 则 p 是 q 的().

- A. 充分不必要条件
- B. 必要不充分条件
- C. 充要条件
- D. 既不充分也不必要条件

【解析】 $p: |3x-5| < 4 \Rightarrow p: \frac{1}{3} < x < 3, q: (x-1)(x-2) < 0 \Rightarrow q: 1 < x < 2$. 所以 $p \Rightarrow q$ 但 $q \not\Rightarrow p$, 所以 p 是 q 的必要不充分条件. 故选 B.

【技巧点拨】 判断充分、必要条件时, 先要分清条件和结论, 进而找到条件与结论之间的逻辑推理关系.

变式训练 1

设命题甲为 $0 < x < 5$, 命题乙为 $|x-2| < 3$, 那么甲是乙的().

- A. 充分不必要条件
- B. 必要不充分条件
- C. 充要条件
- D. 既不充分也不必要条件

【例 2】 已知 $p: -2 \leq x \leq 10, q: 1-m \leq x \leq 1+m (m > 0)$, 若 p 是 q 的充分条件, 求实数 m 的取值范围.

【解析】 由于 p 是 q 的充分条件, 所以 $\begin{cases} m > 0 \\ 1-m \leq -2, \text{解得 } m \geq 9, \text{即实数 } m \text{ 的取值范围是 } [9, +\infty). \\ 1+m \geq 10 \end{cases}$

【技巧点拨】 本题主要考查充要条件的判断, 根据不等式之间的关系是解题的关键.

变式训练 2

已知命题 $p: \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x-10 \leq 0 \end{cases}$, 命题 $q: 1-m < x < 1+m (m > 0)$, 且 p 是 q 的必要不充分条件, 求实数 m 的取值范围.



巩固与提升

基础训练

一、选择题

- “ $x < -2$ ”是不等式“ $x^2 - 4 > 0$ ”成立的().
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
- “ $A \cap B = A$ ”是“ $A \subseteq B$ ”的().
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
- 设甲是乙的充分不必要条件, 乙是丙的充要条件, 丁是丙的必要非充分条件, 则甲是丁的().
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
- “ $|x| \geq 1$ ”是“ $x \geq 1$ ”的().
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
- “ $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ”是“ $\tan \alpha = 1$ ”的().
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
- 设 $p: |x| < a, q: 0 < x < 1$, 若 p 是 q 的必要不充分条件, 则实数 a 的取值范围是().
A. $a \leq 0$ B. $a > 0$
C. $a \geq \frac{1}{2}$ D. $a \geq 1$

二、填空题

- “ $x \in \mathbf{N}$ ”是“ $x \in \mathbf{Z}$ ”的_____条件.
- “ $x=0$ 或 $y=0$ ”是“ $xy=0$ ”的_____条件.

3. “ $ab=0$ ”是“ $a^2+b^2=0$ ”的_____条件.

4. “ $x=\frac{\pi}{4}$ ”是“ $y=\sin 2x$ 取得最大值”的_____条件.

三、解答题

判断下列问题中, p 是 q 的什么条件.

(1) $p: x^2 \geq y^2, q: x \geq y$;

(2) $p: x \in A \cup B, q: x \in A \cap B$;

(3) $p: x > 3, q: x > 2$;

(4) $p: a$ 是有理数, $q: a+2$ 是有理数.

提升训练

1. 已知 p 是 q 的充分条件, s 是 r 的必要条件, p 是 s 的充要条件, 则 q 是 r 的_____条件.

2. 已知 $p: -2 \leq x \leq 10, q: x^2 - 2x + 1 - m^2 \leq 0 (m > 0)$, 若 p 是 q 的充分条件, 求实数 m 的取值范围.

重庆市中职毕业生参加高职分类考试系列丛书

全解总复习

数 学

参考答案及解析

目 录

第一章 集合	1
第二章 不等式	6
第三章 函数	15
第四章 数列	26
第五章 排列组合	33
第六章 三角函数	36
第七章 平面解析几何	51

第一章 集 合

第一节 集合的概念与集合之间的关系

【课堂讲与练】

变式训练 1 A 解析:由空集的性质可知,①②③是错误的,④是正确的,故选 A.

变式训练 2

解析:(1) $\{(x,y)|x>0,y<0\}$.

(2) $\{1,4,9,16,25,36\}=\{x|x=n^2,1\leq n\leq 6 \text{ 且 } n\in\mathbf{Z}\}$.

变式训练 3 1 解析:因为 $B\subseteq A$,所以 $m^2=2m-1$ 或 $m^2=-1$ (舍去).解得 $m=1$.

变式训练 4 6 解析:由题意可知 $B=\{2,3,4,5,6,8\}$,个数为 6.

【巩固与提升】

基础训练

一、选择题

1. D 解析:“好”“非常小”“有趣”都是不确定的,故选 D.
2. A 解析:正确理解符号 $\in, \notin, \subseteq, \subset$ 的意义.
3. C 解析:掌握集合的表示方法.
4. D 解析:子集的个数是 2^n 个.
5. D 解析:掌握集合的概念及其特征.
6. B

二、填空题

1. $\in; \notin; \subseteq; \subset; =$
2. $\{-1,1\}$
3. 6 解析:根据集合中元素的特征可知集合 $P=\{3,4,5\}$. 故 $a=6$.
4. 4 解析:①②④⑥正确.

三、解答题

1. 【参考答案】(1) $B=\{0,1,2,4\}$,

(2)集合 A 中的元素都在集合 B 中. 集合 B 的元素 $4\notin A$,所以 $A\subsetneq B$.

2. 【参考答案】子集: $\emptyset, \{-3\}, \{-1\}, \{1\}, \{3\}, \{-3,-1\}, \{-3,1\}, \{-3,3\}, \{-1,1\}, \{-1,3\}, \{1,3\}, \{-3,-1,1\}, \{-3,-1,3\}, \{-3,1,3\}, \{-1,1,3\}, \{-3,-1,1,3\}$;

真子集: $\emptyset, \{-3\}, \{-1\}, \{1\}, \{3\}, \{-3,-1\}, \{-3,1\}, \{-3,3\}, \{-1,1\}, \{-1,3\}, \{1,3\}, \{-3,-1,1\}, \{-3,-1,3\}, \{-3,1,3\}, \{-1,1,3\}$.

3.【参考答案】因为集合 $\{1, a, b\}$ 与 $\{-1, -b, 1\}$ 是同一集合,

$$\text{所以 } \begin{cases} a=-1 \\ b=-b \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a=-b \\ b=-1 \end{cases}.$$

若 $a=-1, b=-b=0$,符合题意.

若 $a=-b, b=-1$,则 $a=1$,不合题意,舍去.

综上, $a=-1, b=0$.

提升训练

1. C 解析:确定集合 A 中元素的组成情况即可.由已知得集合必含 a, b ,且至少有一个不同于 a, b 的元素,符合条件的集合共7个.

2.【参考答案】(1)若 A 中只有一个元素,分两种情况讨论:

$$\text{当 } a=0 \text{ 时, } A=\{x \mid 2x+1=0\}=\left\{-\frac{1}{2}\right\}.$$

当 $a \neq 0$ 时,则 $ax^2+2x+1=0$ 有两个相等的实根,即 $\Delta=4-4a=0$,解得 $a=1$.

所以 $a=0$ 或 $a=1$, A 中只有一个元素.

(2)若 A 中恰有两个元素,则 $ax^2+2x+1=0$ 有两个不相等的实根,即 $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta=4-4a > 0 \end{cases}$,

解得 $a < 1$ 且 $a \neq 0$,所以 $a < 1$ 且 $a \neq 0$ 时, A 中恰有两个元素.

(3)若 A 中至多有一个元素包含两种情况: A 中只有一个元素和 A 为 $\emptyset$.

由(1)可知 $a=0$ 或 $a=1$ 时, A 中只有一个元素.

若 A 为 $\emptyset$,则 $ax^2+2x+1=0$ 无解,即 $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta=4-4a < 0 \end{cases}$,解得 $a > 1$.

所以当 $a \geq 1$ 或 $a=0$ 时, A 中至多有一个元素.

3.【参考答案】 $A=\{x \mid x^2-3x+2=0\}=\{1, 2\}$.

因为 $B \subseteq A$,所以 B 可能为 $\emptyset, \{1\}$ 或 $\{2\}$.当 $B=\emptyset$ 时, $a=0$;当 $B=\{1\}$ 时, $a=-2$;当 $B=\{2\}$ 时, $a=-1$.所以实数 a 的值组成的集合为 $\{-2, -1, 0\}$.

第二节 集合的运算

【课堂讲与练】

变式训练 1

1. C 解析:由于 $A=\{0, 1, 2\}, B=\{1, 3\}$,根据交集的定义可得 $A \cap B=\{1\}$.

2. C 解析:由于 $A=\{0, 1\}, B=\{-1, 0\}$,根据并集的定义可得 $A \cup B=\{-1, 0, 1\}$.

变式训练 2

解析: $A \cap B=\{2, 3\}, A \cup B=\{0, 1, 2, 3, 4\}$,

$\complement_U A=\{4\}, \complement_U B=\{0, 1\}$,所以 $\complement_U A \cup \complement_U B=\{0, 1, 4\}$.

变式训练 3

解析:(1)由题意得 $\begin{cases} a+3 \leq 1 \\ a \geq -6 \end{cases}$,解得 $-6 \leq a \leq -2$.

(2)由题意得 $a+3 < -6$ 或 $a > 1$, 解得 $a > 1$ 或 $a < -9$.

【巩固与提升】

基础训练

一、选择题

1. B 解析: 由于集合 A, B 中有共同元素 2, 4, 故 $A \cap B = \{2, 4\}$.
2. D 解析: 由已知可得 $\complement_U A = \{3, 9\}$. 故选 D.
3. C 解析: 由已知可得 $A \cup B = \{x | x > -2\}$.
4. C 解析: 根据题意可知集合 B 必包含元素 4. 根据 $\{1, 2, 3\}$ 的子集个数为 $2^3 = 8$. 故集合 B 的个数为 8.
5. B 解析: $B = \{x | 3x - 7 \geq 8 - 2x\} = \{x | x \geq 3\}$, 根据并集的定义可知 $A \cup B = \{x | x \geq 2\}$.
6. D 解析: 由题意可知 $A \cup B = \{0, 1, 2, a, a^2\} = \{0, 1, 2, 4, 16\}$. 所以 $\begin{cases} a=4 \\ a^2=16 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=16 \\ a^2=4 \end{cases}$. 解得 $a=4$, 故选 D.

二、填空题

1. $\{1, 2\}$ 解析: $A = \{0, 1, 2\}, B = \{1, 2, 3\}$, 根据交集的定义可得 $A \cap B = \{1, 2\}$.
2. $\{(1, 0)\}$ 解析: 根据题意得 $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x-y=2 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$. 所以 $A \cap B = \{(1, 0)\}$.
3. $\{x | -1 < x < 2\}$ 解析: $A = \{x | x+1 > 0\} = \{x | x > -1\}, B = \{x | 3x-6 < 0\} = \{x | x < 2\}$. 则 $A \cap B = \{x | -1 < x < 2\}$.
4. 5 解析: 设两项都参加的有 x 人, 则只参加甲项的有 $(30-x)$ 人, 只参加乙项的有 $(25-x)$ 人. 根据题意得 $(30-x) + x + (25-x) = 50$, 解得 $x=5$.

三、解答题

1. 【参考答案】由 $A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}, B = \{1, 2, x^2 - 1\}$ 得 $x^2 - 1 = 3$. 解得 $x = \pm 2$. 此时 $B = \{1, 2, 3\}$. 所以 $A \cap B = \{1\}$.
2. 【参考答案】由数轴可得 $A \cap B = \{1\}, A \cup B = \{x | 0 < x < 3\}$,
 $\complement_U(A \cap B) = \{x | -2 \leq x < 1 \text{ 或 } 1 < x \leq 4\}$,
 $\complement_U(A \cup B) = \{x | -2 \leq x \leq 0 \text{ 或 } 3 \leq x \leq 4\}$.
3. 【参考答案】因为 $A \cap B \neq \emptyset$, 用数轴表示集合 A 与集合 B 要有相交部分. 所以 $a \geq 1$,
 故 a 的取值范围为 $\{a | a \geq 1\}$.

提升训练

1. 【参考答案】因为 $A \cap B = \{9\}$, 所以 $9 \in A$, 即 $2a-1=9$ 或 $a^2=9$. 解得 $a=5$ 或 $a=\pm 3$.

当 $a=5$ 时, $A=\{-4, 9, 25\}$, $B=\{0, -4, 9\}$, 此时 $A \cap B = \{-4, 9\}$ 与题干矛盾. 故 $a=5$ 舍去.

当 $a=3$ 时, $B=\{-2, -2, 9\}$ 不满足集合元素的互异性, 故 $a=3$ 舍去.

经检验可知 $a=-3$ 符合题意.

故 a 的值为 -3 .

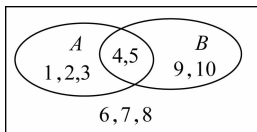
2. 【参考答案】由于 $A \cap B = \{2\}$, 则 $2 \in A$ 且 $2 \in B$.

将 $x=2$ 分别代入集合 A 和集合 B 中得到 $p=10, q=6$.

所以 $A = \{x | x^2 - 10x + 16 = 0\} = \{2, 8\}$, $B = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0\} = \{2, 3\}$.

从而求得 $A \cup B = \{2, 3, 8\}$.

3. 【参考答案】 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, 用韦恩图可表示为:



所以 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{4, 5, 9, 10\}$.

第三节 充要条件

【课堂讲与练】

变式训练 1 A 解析: 解不等式 $|x-2| < 3$ 得 $-1 < x < 5$. 因为 $0 < x < 5 \Rightarrow -1 < x < 5$, 但 $-1 < x < 5 \not\Rightarrow 0 < x < 5$, 所以甲是乙的充分不必要条件, 故选 A.

变式训练 2

解析: 命题 $p: -2 \leq x \leq 10$,

命题 $q: 1-m < x < 1+m (m > 0)$,

因为 p 是 q 的必要不充分条件,

$$\text{所以 } \begin{cases} 1-m \geq -2 \\ 1+m < 10 \\ m > 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} 1-m > -2 \\ 1+m \leq 10 \\ m > 0 \end{cases}, \text{ 解得 } 0 < m \leq 3.$$

综上所述, 实数 m 的取值范围是 $\{m | 0 < m \leq 3\}$.

【巩固与提升】

基础训练

一、选择题

1. A 解析: $x < -2 \Rightarrow x^2 - 4 > 0$, 而 $x^2 - 4 > 0 \not\Rightarrow x < -2$, 所以答案选 A.

2. A 解析: $A \cap B = A \Rightarrow A \subseteq B$, 而 $A \subseteq B \not\Rightarrow A \cap B = A$. 所以答案选 A.

3. A 解析: 根据题意, $甲 \Rightarrow 乙$, $乙 \Leftrightarrow 丙$, $丙 \Rightarrow 丁$, 所以 $甲 \Rightarrow 丁$. 答案选 A.

4. B 解析: $x \geq 1 \Rightarrow |x| \geq 1$, 而 $|x| \geq 1 \nRightarrow x \geq 1$, 所以答案选 B.

5. A 解析: $\alpha = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \tan \alpha = 1$, 而 $\tan \alpha = 1 \nRightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$, 所以答案选 A.

6. D 解析: 由已知可得命题 $p: -a < x < a (a > 0)$, 因为 p 是 q 的必要不充分条件, 则 $(0, 1) \subsetneq (-a, a)$, 所以 $\begin{cases} a \geq 1 \\ -a \leq 0 \end{cases}$, 解得 $a \geq 1$, 故选 D.

二、填空题

1. 充分

2. 充要

3. 必要

4. 充分

三、解答题

【参考答案】(1)既不充分也不必要条件.

(2)必要不充分条件.

(3)充分不必要条件.

(4)充要条件.

提升训练

1. 必要

2. 【参考答案】 $q: x^2 - 2x + 1 - m^2 \leq 0 (m > 0) \Leftrightarrow [x - (1 - m)][x - (1 + m)] \leq 0$.

因为 $m > 0$, 所以不等式 $[x - (1 - m)][x - (1 + m)] \leq 0$ 的解集为 $\{x | 1 - m \leq x \leq 1 + m\}$.

因为 p 是 q 的充分条件, 所以 $[-2, 10] \subseteq [1 - m, 1 + m]$,

从而得 $\begin{cases} 1 - m \leq -2 \\ 1 + m \geq 10 \end{cases} \Rightarrow m \geq 9$.

所以实数 m 的取值范围为 $[9, +\infty)$.