安徽省 普通高校分类考试和对口招生考试复习丛书

语文	语文总复习
	语文重点强化与难点突破
	语文考前冲刺模拟试卷
数学	**数学总复习**
	数学重点强化与难点突破
	数学考前冲刺模拟试卷
英语	英语总复习
	英语重点强化与难点突破
	英语考前冲刺模拟试卷

欢迎使用
华腾刷题宝
海量题库自主练习

ISBN 978-7-5608-9494-2
9 787560 894942 >
定价：65.00元

安徽省 普通高校分类考试和对口招生考试复习丛书

数学总复习

《数学总复习》编写组 编

同济大学出版社 TONGJI UNIVERSITY PRESS

华腾新思

安徽省

普通高校分类考试和对口招生考试复习丛书

数学总复习

《数学总复习》编写组 编

内容权威 严格依据**安徽省分类考试大纲**编写，针对性强

考点全面 涵盖考纲要求的**全部考点**，准确把握**命题趋势**

讲练结合 **知识讲解与练习**同步进行，**学完即练**，巩固所学知识

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

安徽省

普通高校分类考试和对口招生考试复习丛书

数学总复习

《数学总复习》编写组　编

本 册 主 编　许富松　王启荣　徐之永

副　主　编　周晓明　张　静　俞秀兵

参　　　编　张　冬　吴　倩　吴晓晨

　　　　　　侯翠侠　薛鹏飞　宋玉兰

同济大学出版社

TONGJI UNIVERSITY PRESS

·上海·

内容提要

全书共十章,包括集合、不等式、函数、指数函数与对数函数、三角函数、数列、平面向量、平面解析几何、立体几何、概率与统计初步.每章根据考纲的要求详述相关知识点,并配有相关练习题.全书体例科学,栏目丰富,“知识结构”对本章知识点进行了总结;“命题趋势”统计了近三年各考点的命题情况,并对命题趋势进行了分析;“知识梳理”对每一个知识点进行了细致的讲解;“典例解析”对题目进行讲解,给出详细的解题思路;“巩固练习”针对书中考点设置了练习题,以帮助学生巩固所学知识,提高答题能力;“真题链接”从命题的角度对真题进行剖析,使考生准确把握考点,快速找到解题思路.

本书适合作为普通高校分类考试和对口招生考试复习教材,也可作为广大中等职业学校学生的学习资料.

图书在版编目(CIP)数据

数学总复习 /《数学总复习》编写组编. --上海：同济大学出版社，2020.8(2025.7 重印)

ISBN 978-7-5608-9494-2

Ⅰ.①数… Ⅱ.①数… Ⅲ.①数学课-中等专业学校-升学参考资料 Ⅳ.①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2020)第 171254 号

数学总复习

《数学总复习》编写组 编

责任编辑 刘 睿 **责任校对** 杨 艳 **封面设计** 刘文东

出版发行 同济大学出版社 www.tongjipress.com.cn

(地址：上海市四平路 1239 号 邮编：200092 电话：021-65985622)

经 销 全国各地新华书店

印 刷 三河市骏杰印刷有限公司

开 本 880 mm×1 230 mm 1/16

印 张 17

字 数 352 000

版 次 2020 年 8 月第 1 版

印 次 2025 年 7 月第 6 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5608-9494-2

定 价 65.00 元

Preface 前言

安徽省普通高校分类考试招生和对口招生文化素质测试是具有安徽省高考(含对口招生考试)报名资格的应历届普通高中毕业生、应历届中职(含技工学校、职业高中)毕业生,包括具有高中阶段学历的农民工、退役士兵、企事业单位在职职工、失业人员等参加的文化素质测试.测试具有较高的信度、效度和必要的区分度.

为了帮助广大考生在较短的时间内高效、便捷、准确地把握考试的脉络,我们特组织多所一线院校的任课教师,根据各考试科目的大纲要求,深入研究了近几年考试的命题情况,针对命题中出现的最新变化,精心编写了这套安徽省普通高校分类考试和对口招生考试复习丛书(以下简称"复习丛书"),供广大考生在复习时使用.

《数学总复习》是复习丛书中的一本.数学是考试的必考科目之一,其知识点较多、难度较大,是考生备考的重点和难点所在.本书在编写时紧扣大纲,紧密结合真题,内容充实,结构严谨,要点突出,指导性强,是广大考生进行考试复习和储备知识的重要参考资料.

本书有以下鲜明特色.

1. 立足考试大纲,全面服务考生

本书是为参加安徽省普通高校分类考试招生和对口招生文化素质测试的考生量身定做的复习用书.知识点的选取、试题难度等设计均参照了历年考试真题和最新考试大纲,体现出考试特色,做到既能把握考试的命题特点,又体现其发展趋势.

2. 编排合理,设计科学

本书共十章,包括集合、不等式、函数、指数函数与对数函数、三角函数、数列、平面向量、平面解析几何、立体几何、概率与统计初步.每章根据考纲的要求详述相关知识点.

"知识结构"对本章知识点进行了总结.

"命题趋势"统计了近三年各考点的命题情况,并对命题趋势进行了分析.

"知识梳理"对每一个知识点进行了细致的讲解.

"典例解析"对题目进行讲解,给出详细的解题思路.

"巩固练习"针对书中考点设置了练习题,以帮助学生巩固所学知识,提高答题能力.

"真题链接"从命题的角度对真题进行剖析,使考生准确把握考点,快速找到解题思路.

3. 配套齐全,全方位助力备考

本书配套《数学重点强化与难点突破》和《数学考前冲刺模拟试卷》.《数学重点强化与难点突破》与本书的章节同步,是课堂练习和课后巩固的配套习题集.《数学考前冲刺模拟试卷》立足真题,题型、题量和难度均符合安徽省普通高校分类考试招生和对口招生文化素质测试的实际情况,是考生考前模拟冲刺的重要复习资料.

本书由宣城市信息工程学校许富松、天长市工业学校王启荣、定远化工学校徐之永任主编,淮南市职业教育中心周晓明、安徽蚌埠技师学院张静、霍山职业学校俞秀兵任副主编.阜阳卫生学校张冬、吴倩、吴晓晨、侯翠侠,阜阳市医药科技工程学校薛鹏飞,亳州幼儿师范学校宋玉兰参与编写.

衷心希望复习丛书能为广大考生的复习备考带来实质性的帮助.对书中的不足之处,敬请各位读者不吝指正.

最后,预祝广大考生在考试中取得好成绩!

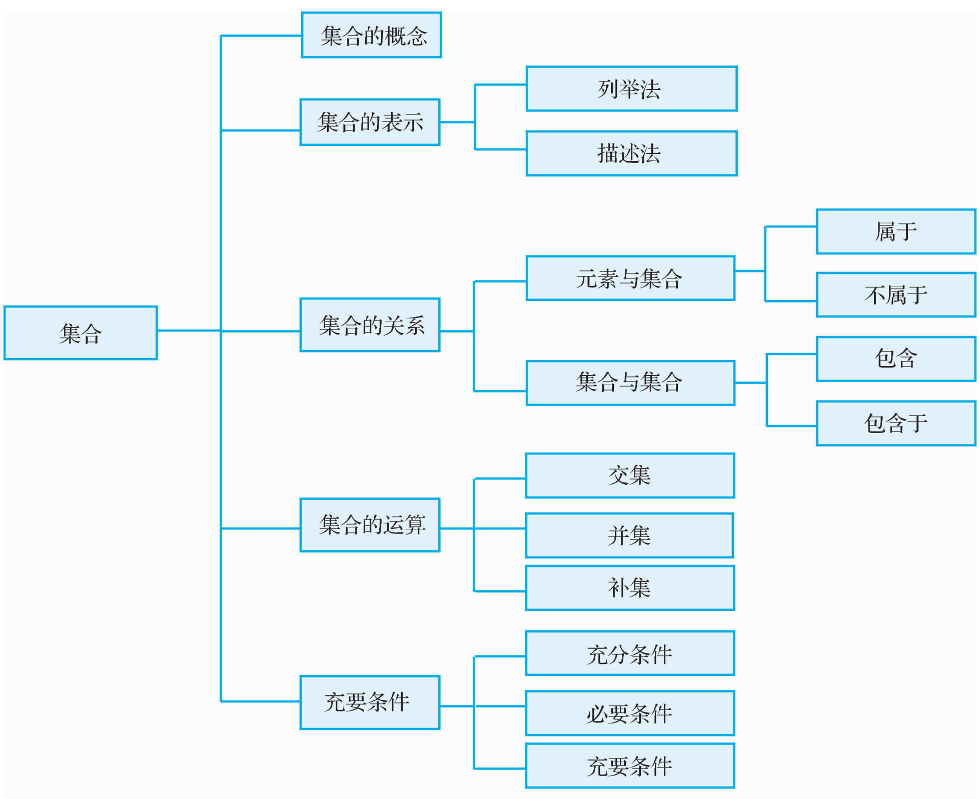
《数学总复习》编写组

Contents
目录

第一章

集合

知识结构



命题趋势

本章内容在历年真题中出题数量基本保持在两道，要求不高，难度不大. 涉及的知识有：集合间的关系，集合的运算，充分条件、必要条件与充要条件的判定. 常与不等式、函数等内容相交汇.

第一节 集合的概念及表示

知识梳理

知识点一 集合的概念

1. 集合

把具有某种属性的一些确定的对象看成一个整体，便形成一个集合，常用大写的拉丁字母 A,B,C 等表示.

2. 元素

集合中的每一个确定的对象叫作这个集合的元素，常用小写字母 a,b,c 等表示.

3. 元素与集合的关系及性质

如果 a 是集合 A 的一个元素，就说 a 属于 A，记作 $a\in A$；如果 a 不是集合 A 的元素，就说 a 不属于 A，记作 $a\notin A$. 集合中的元素具有确定性、互异性、无序性的特征.

4. 集合的分类

(1)按元素个数分类：

①有限集. 含有元素的个数有限的集合叫作有限集.

②无限集. 含有元素的个数无限的集合叫作无限集.

③空集. 不含任何元素的集合叫作空集，记作$\varnothing$.

注意：$\varnothing$不是$\{0\}$.

(2)按元素的特征分类：数集、点集等.

5. 常用的集合

常用的集合有正整数集($\mathbf{N}_+$或$\mathbf{N}^*$)、自然数集($\mathbf{N}$)、整数集($\mathbf{Z}$)、有理数集($\mathbf{Q}$)、实数集($\mathbf{R}$).

(1)正整数集：所有正整数组成的集合叫作正整数集，记作$\mathbf{N}_+$或$\mathbf{N}^*$.

(2)自然数集：所有自然数组成的集合叫作自然数集，记作$\mathbf{N}$.

(3)整数集：所有整数组成的集合叫作整数集，记作$\mathbf{Z}$.

(4)有理数集：所有有理数组成的集合叫作有理数集，记作$\mathbf{Q}$.

(5)实数集：所有实数组成的集合叫作实数集，记作$\mathbf{R}$.

知识点二 集合的表示法

1. 列举法

把集合的元素一一列举出来，写在大括号内，这种表示集合的方法叫作列举法.

注意:用列举法表示集合时,要注意以下几点:

(1)元素之间用逗号“,”隔开.

(2)元素不能重复(满足集合中元素的互异性).

(3)元素不能遗漏.

(4)当集合中的元素较少时,用列举法比较简单;当集合中的元素较多或无限,但存在一定的规律时,在不发生误解的情况下,也可以用列举法表示.

2. 描述法

用集合所含元素的共同特征表示集合的方法称为描述法.

描述法表示集合的一般形式是$\{x|p(x)\}$,其中“x”是集合中元素的代表形式,“$p(x)$”是集合中元素的共同特征,两者之间的竖线不可省略.

注意:用描述法表示集合时,要注意以下几点:

(1)写清楚集合中元素的代表形式(一般用小写字母表示).

(2)写明集合中元素的特征或性质.

(3)用于描述元素特征的语句要力求简明、准确,不产生歧义;多层描述时,应当准确使用“且”“或”等关联词.

(4)所有描述的内容都要写在大括号内.

(5)在不引起混淆的情况下,用描述法表示集合有时也可以省去竖线和竖线左边的部分.例如,正整数的集合可简记为{正整数},但是,集合$\{x|x>1\}$就不能省略竖线及其左边的“x”.

典例解析

例 1　在下列每组对象中:

(1)我国著名的数学家;

(2)超过 10 的所有自然数;

(3)某校 2020 年新入学的高个子学生;

(4)方程 $x-1=0$ 的实数解;

(5)在直角坐标平面内,第二象限的所有点.

其中能构成集合的是(　　).

A.(1)(2)(3)　　B.(2)(3)(4)

C.(2)(4)(5)　　D.(3)(4)(5)

解析　(1)“我国著名的数学家”不是一个明确的标准,不能构成一个集合;(3)“高个子学生”这一标准也不确定,无法判定某人是高还是矮,也不能构成集合;(4)的对象是确定的;(2)(5)的对象虽然有无限个,但它是确定的.因此选 C.

技巧点拨　判断某组对象能否构成集合,关键看对象是否为确定的,标准一定要是明确的,不能模糊,否则无法判断.

变式训练 1

下列语句中,能构成集合的是(　　).

A. 我班数学好的男生　　B. 与 0 接近的全体实数

C. 大于 π 的自然数　　D. 优秀的中等职业学校

例 2　已知集合 $A=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 3,x\in\mathbf{Z},y\in\mathbf{Z}\}$,则 A 中元素的个数为(　　).

A. 9　　B. 8

C. 5　　D. 4

解析　由 $x^2+y^2\leqslant 3$ 可知,$-\sqrt{3}\leqslant x\leqslant\sqrt{3}$,$-\sqrt{3}\leqslant y\leqslant\sqrt{3}$. 又因为 $x\in\mathbf{Z}$,$y\in\mathbf{Z}$,所以 $x\in\{-1,0,1\}$,$y\in\{-1,0,1\}$. 所以 A 中元素的个数为 9.

技巧点拨　对于求解集合中元素个数的题目,首先求出集合,然后根据集合中元素的互异性求出集合中元素的个数,或利用数形结合的方法求出集合中元素的个数.

变式训练 2

已知集合 $A=\{1,2,4\}$,集合 $B=\{x\mid x=a+b,a\in A,b\in A\}$,则集合 B 中元素的个数为________.

例 3　用列举法表示下列集合.

(1) $A=\{x\mid -2<x<5,x\in\mathbf{Z}\}$;

(2) $B=\{(x,y)\mid 2x+y=5,x\in\mathbf{N},y\in\mathbf{N}\}$.

解析　(1) $A=\{-1,0,1,2,3,4\}$;(2) $B=\{(0,5),(1,3),(2,1)\}$.

技巧点拨　掌握集合的两种表示方法.

变式训练 3

用合适的方法表示下列集合.

(1) $\{11,12,13,14,15,\cdots\}$

(2) $\{1,4,9,16,25,36\}$.

巩固练习

1. 下列命题所列对象中,能组成集合的是(　　).

A. 有趣的书　　B. 非常小的数

C. 好听的歌　　D. 小于 3 的数

2. 用列举法表示集合$\{x|x^2-3x+2=0\}$的结果是(　　).

A. $(1,2)$　　B. $1,2$

C. $\{1,2\}$　　D. 以上都不是

3. 用列举法表示"大于 2 且小于 9 的偶数的全体"构成的集合是(　　).

A. $\varnothing$　　B. $\{4,6,8\}$

C. $\{3,5,7\}$　　D. $\{3,4,5,6,7,8\}$

4. 用描述法表示"绝对值等于 1 的所有整数"组成的集合是(　　).

A. $\{-1,1\}$　　B. $(-1,1)$

C. $\{x||x|=1,x\in\mathbf{Z}\}$　　D. $\{x|x=1,x\in\mathbf{Z}\}$

5. 下列命题中,可以确定一个集合的是(　　).

A. 全体有理数　　B. 无限趋近于 2 的实数

C. 由 1,2,3,3,4,4,5,6,8 构成的全体　　D. 本班性格外向的同学

6. 不大于 3 的正整数的集合是(　　).

A. $\{0,1,2,3\}$　　B. $\{1,2,3\}$

C. $\{x|0\leqslant x\leqslant 3\}$　　D. $\{x|x\leqslant 3\}$

7. 由坐标平面内不在坐标轴上的点组成的集合是(　　).

A. $\{(x,y)|x\neq 0\}$　　B. $\{(x,y)|y\neq 0\}$

C. $\{(x,y)|xy\neq 0\}$　　D. $\{(x,y)|xy=0\}$

8. 用列举法表示"大于 2 且小于 5 的整数"构成的集合是(　　).

A. $\{x|2<x<5\}$　　B. $\{x|2<x<5,x\in\mathbf{Z}\}$

C. $\{2,3,4,5\}$　　D. $\{3,4\}$

9. 下列选项中,表述正确的是(　　).

A. 由 1,3,5,7,5,3 组成的集合中有 6 个元素

B. 周长为 16 cm 的三角形组成的集合是有限集合

C. 集合$\{0\}$是空集

D. 一年级(3)班的所有同学可以组成集合

10. 已知集合 $A=\{x|1<x<2\}$,$a=\sqrt{5}$,则下列关系中,正确的是(　　).

A. $a\in A$　　B. $a\notin A$

C. $\{a\}\in A$　　D. $\{a\}\notin A$

第二节 集合的关系及运算

知识梳理

知识点一 集合间的关系

1. 子集

一般地，对于两个集合 A，B，如果集合 A 中任何一个元素都是集合 B 的元素，那么，集合 A 就叫作集合 B 的子集，记作 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$，读作"A 包含于 B"或"B 包含 A".

当集合 A 不包含于集合 B 或集合 B 不包含集合 A 时，记作 $A\nsubseteq B$ 或 $B\nsupseteq A$.

性质：任何一个集合是它本身的子集，即 $A\subseteq A$；空集是任何集合的子集，即 $\varnothing\subseteq A$；对集合 A，B，C，若 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$.

注意：不能把子集说成由原来集合中的部分元素组成的集合，因为 A 的子集包括它本身，而这个子集由 A 的全体元素组成；空集也是 A 的子集，但这个子集中不包括 A 中的任何元素.

2. 真子集

如果 A 是 B 的子集，并且 B 中至少有一个元素不属于 A，则 A 是 B 的真子集（A 包含于 B 但不等于 B），记作 $A\subsetneqq B$ 或 $B\supsetneqq A$.

性质：空集是任何非空集合的真子集；对于集合 A，B，C，若 $A\subsetneqq B$，$B\subsetneqq C$，则 $A\subsetneqq C$.

注意：元素与集合之间是属于关系，集合与集合之间是包含关系.

3. 集合相等

一般地，对于两个集合 A 与 B，如果集合 A 中的任何一个元素都是集合 B 的元素，同时集合 B 中的任何一个元素都是集合 A 的元素，我们就说集合 A 等于集合 B，记作 $A=B$（A，B 的所有元素均相等）.

注意：(1)若两个集合相等，则两个集合所含元素完全相同，反之亦然.

(2)要判断两个集合是否相等，对于元素较少的有限集，主要看它们的元素是否完全相同；若是无限集，则从"互为子集"入手进行判断.

知识点二 集合的运算

1. 交集

一般地，由既属于集合 A 又属于集合 B 的所有元素组成的集合，称为集合 A 与集合 B 的交集，记作 $A\cap B$，即 $A\cap B=\{x|x\in A 且 x\in B\}$.

性质：

(1)$A\cap B=B\cap A$.

(2) $A \cap A = A$.

(3) $A \cap \varnothing = \varnothing$.

(4) $A \cap B \subseteq A$，$A \cap B \subseteq B$.

(5) 若 $A \subseteq B$，则 $A \cap B = A$.

2. 并集

一般地，由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素组成的集合，称为集合 A 与集合 B 的并集，记作 $A \cup B$，即 $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$.

性质：

(1) $A \cup B = B \cup A$.

(2) $A \cup A = A$.

(3) $A \cup \varnothing = A$.

(4) $A \subseteq A \cup B$，$B \subseteq A \cup B$.

(5) 若 $A \subseteq B$，则 $A \cup B = B$.

3. 图示两个集合的交集、并集

(1)用 Venn 图表示两个集合的交集、并集(图 1-1).

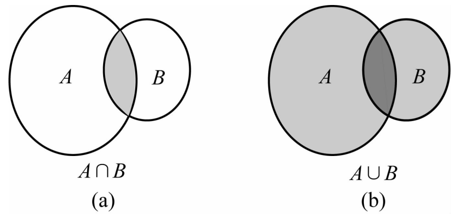


图 1-1

(2)借助数轴表示数集的交集、并集(图 1-2).

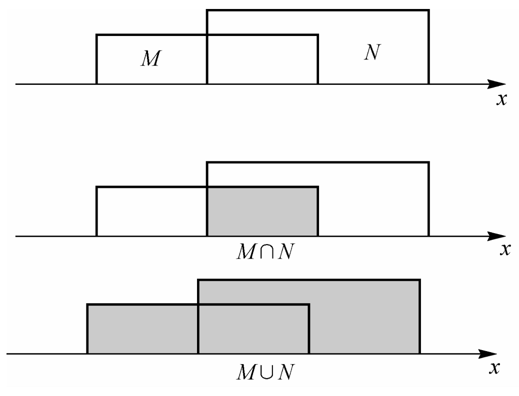


图 1-2

4. 全集

如果一个集合含有我们所研究问题中涉及的所有元素，则称这个集合为全集，通常用 U 表示.

注意：全集是一个相对的概念，在不同的情况下全集的概念也不同.

5. 补集

对于一个集合 A，由全集 U 中不属于集合 A 的所有元素组成的集合称为集合 A 相对于全集 U 的补集，简称集合 A 的补集，记作 $\complement_U A$，即 $\complement_U A=\{x|x\in U$ 且 $x\notin A\}$.

性质：

(1) $\complement_U(\complement_U A)=A$.

(2) $\complement_U\varnothing=U$，$\complement_U U=\varnothing$.

(3) $A\cup(\complement_U A)=U$.

(4) $A\cap(\complement_U A)=\varnothing$.

典例解析

例 1 设集合 $A=\{0\}$，下列结论正确的是(　　).

A. $A=0$　　　　B. $A\subseteq\varnothing$

C. $0\in A$　　　　D. $\varnothing\in A$

解析 本题考查了元素与集合、集合与集合之间的关系. 答案选 C.

技巧点拨 正确理解符号 $\in$，$\notin$，$\subseteq$，$\subsetneqq$ 的意义，是正确处理此类问题的关键.

变式训练 1

下列说法中，正确的有(　　).

①空集没有子集；②任何集合至少有两个子集；③空集是任何集合的真子集；④若 $\varnothing\subsetneqq A$，则 $A\neq\varnothing$.

A. 1 个　　　　B. 2 个

C. 3 个　　　　D. 4 个

例 2 已知集合 $A=\{x|x^2-x-2=0\}$，$B=\{x|x^2-4x+p=0\}$，若 $B\subseteq A$，求实数 p 的取值范围.

解析 由题意得 $A=\{-1,2\}$，因为 $B\subseteq A$，所以 $B=\varnothing$ 或 $B=\{-1\}$ 或 $B=\{2\}$ 或 $B=\{-1,2\}$.

又因为 $B=\{x|x^2-4x+p=0\}$，$-1+2=1\neq4$，所以 $B=\{-1,2\}$ 不成立.

当 $B=\varnothing$ 时，$\Delta=(-4)^2-4p=16-4p<0$，解得 $p>4$；

当 $B=\{-1\}$ 时，$\begin{cases}\Delta=16-4p=0,\\(-1)^2-4\times(-1)+p=0,\end{cases}$ 无解；

当 $B=\{2\}$ 时，$\begin{cases}\Delta=16-4p=0,\\2^2-4\times2+p=0,\end{cases}$ 解得 $p=4$.

综上，实数 p 的取值范围是 $[4,+\infty)$.

技巧点拨 两个集合包含或相等关系的问题，通过建立方程(组)，然后解出未知数，最后利用集合元素的特征进行检验即可.

变式训练 2

已知集合 $A=\{1,1+m,1+2m\}$，$B=\{1,n,n^2\}$，其中 $m,n\in\mathbf{R}$，若 $A=B$，求 m,n 的值.

例 3 设全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x|0\leqslant x<2\}$，集合 $B=\{x|x^2-2x-3<0\}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$，$(\complement_U A)\cap B$.

解析 $B=\{x|x^2-2x-3<0\}=\{x|-1<x<3\}$，$\complement_U A=\{x|x<0$ 或 $x\geqslant 2\}$，所以 $A\cap B=\{x|0\leqslant x<2\}$，$A\cup B=\{x|-1<x<3\}$，$(\complement_U A)\cap B=\{x|-1<x<0$ 或 $2\leqslant x<3\}$.

技巧点拨 考查对集合运算的理解及性质的运用.

变式训练 3

设全集 $U=\{0,1,2,3,4\}$，集合 $A=\{0,1,2,3\}$，集合 $B=\{2,3,4\}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$，$(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$.

例 4 已知集合 $M=\{x|a\leqslant x\leqslant a+3\}$，$N=\{x|x<-1$ 或 $x>5\}$，若 $M\cap N=\varnothing$，求实数 a 的取值范围.

解析 如图 1-3 所示，要使 $M\cap N=\varnothing$，必须满足 $\begin{cases}a+3\leqslant 5,\\ a\geqslant -1,\end{cases}$ 解得 $-1\leqslant a\leqslant 2$，所以实数 a 的取值范围为 $\{a|-1\leqslant a\leqslant 2\}$.

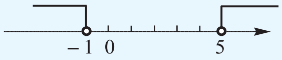


图 1-3

技巧点拨 解题时利用数轴表示集合，便于寻求满足条件的实数 a. 特别需要注意的是“端点值”的问题，是能取“=”还是不能取“=”.

变式训练 4

已知 $A=\{x|a\leqslant x\leqslant a+3\}$，$B=\{x|x>1$ 或 $x<-6\}$.

(1)若 $A\cap B=\varnothing$，求 a 的取值范围；

(2)若 $A\cup B=B$，求 a 的取值范围.

例 5　已知 U 为全集，集合 $M\subsetneqq U$，$N\subsetneqq U$，且 $N\subseteq M$，则(　　).

A. $(\complement_U M)\supseteq(\complement_U N)$　　B. $(\complement_U M)\supseteq N$

C. $(\complement_U M)\subseteq(\complement_U N)$　　D. $M\supseteq(\complement_U N)$

解析　根据各集合之间的关系作图(图 1-4)，这样就很容易做出判断，故选 C.

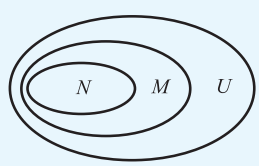


图 1-4

技巧点拨　(1)考虑集合之间的关系，用图形解答比较方便.

(2)在数学中利用“数形结合”的思想，往往能使问题简单化.

变式训练 5

U 为全集，M，N 为两个非空集合，且满足 $M\cap N=M$，则下列正确的是(　　).

A. $M\subsetneqq N$　　B. $N\subsetneqq M$

C. $M=N$　　D. $M\cap(\complement_U N)=\varnothing$

巩固练习

一、选择题

1. 下面四个关系中,正确的个数为(　　).

①$0\in\mathbf{Q}$; ②$\sqrt{2}\notin\mathbf{Q}$; ③$\mathbf{Z}\subseteq\mathbf{Q}$; ④$\varnothing\subsetneqq\{0\}$.

A. 4个　　B. 3个

C. 2个　　D. 1个

2. 集合$\{1,2,3,4\}$所有子集的个数是(　　).

A. 8　　B. 14

C. 15　　D. 16

3. 设集合$A=\{1,2,3\}$,$B=\{4,5,6\}$,则$A\cap B=$(　　).

A. $\varnothing$　　B. $\{3\}$

C. $\{1,2\}$　　D. $\{1,2,3,4,5,6\}$

4. 设集合$A=\{0,1,2,3\}$,$B=\{-1,0,1\}$,则$A\cap B=$(　　).

A. $\varnothing$　　B. $\{0,1\}$

C. $\{-1,0,1\}$　　D. $\{0,1,2,3\}$

5. 设集合$A=\{0,1\}$,$B=\{-1,0\}$,则$A\cup B=$(　　).

A. $\varnothing$　　B. $\{0\}$

C. $\{-1,0,1\}$　　D. $\{0,1\}$

6. 设集合$A=\{a,b\}$,$B=\{b,c\}$,则$A\cap B=$(　　).

A. $\varnothing$　　B. $\{b\}$

C. $\{a,c\}$　　D. $\{a,b,c\}$

7. 设集合$A=\{-2,2\}$,$B=\{-1,2\}$,则$A\cup B=$(　　).

A. $\{2\}$　　B. $\{-2,-1\}$

C. $\{-2,2\}$　　D. $\{-2,-1,2\}$

8. 设全集$U=\{1,2,3,4\}$,集合$A=\{2,3\}$,$B=\{1,4\}$,则$(\complement_U B)\cap A=$(　　).

A. $\varnothing$　　B. $\{1,4\}$　　C. $\{2,3\}$　　D. $\{1,2,3,4\}$

二、填空题

1. 用适当的符号($\in$,$\notin$,$\subseteq$,$\supseteq$,$=$)填空.

3________$\{2,3\}$;　　π________$\mathbf{Q}$;　　$\{1,2,3\}$________$\mathbf{Z}$;

$\mathbf{N}^*$________$\mathbf{Z}$;　　$\{-3,3\}$________$\{x|x^2=9\}$.

2. 已知集合$P=\{x|2<x<a,x\in\mathbf{N}\}$,且集合$P$中恰有3个元素,则整数$a=$________.

3. 关系式①$\{a,b\}\subseteq\{b,a\}$;②$\{a,b\}=\{b,a\}$;③$0=\varnothing$;④$0\in\{0\}$;⑤$\varnothing\in\{0\}$;⑥$\varnothing\subseteq\{0\}$中正确的是________.

4. 设全集$U=\mathbf{R}$,集合$A=\{x|x^2-x-2=0\}$,$B=\{x||x|=y+1,y\in A\}$,则$\complement_U B=$________.

5. 已知集合$A=\{1,2,3\}$,$B=\{1,a\}$,$A\cap B=\{1,3\}$,则$A\cup B=$________.

三、解答题

1. 已知集合 $A=\{0,1,2\}$，集合 $B=\{x|x=ab,a\in A,b\in A\}$，判断集合 B 和集合 A 的关系.

2. 写出集合 $\{-3,-1,1,3\}$ 的所有子集，并指出哪些是真子集.

3. 已知集合 $A=\{x|x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x|ax+2=0\}$，且 $B\subsetneqq A$，求实数 a 的值组成的集合.

4. 已知集合 $A=\{x|ax^2+2x+1=0,x\in\mathbf{R}\}$.

(1)若 A 中只有一个元素，求 a 的值；

(2)若 A 中恰有两个元素，求 a 的取值范围；

(3)若 A 中至多只有一个元素，求 a 的取值范围.

第三节 充要条件

知识梳理

1. 命题的概念

在数学中,我们把语言、符号或式子表达的,可以判断真假的陈述句称为命题.正确的命题称为真命题,错误的命题称为假命题.

2. 必要条件的定义

(1)对于两个命题 p,q,如果有 $p\Rightarrow q$,则称 p 是 q 的充分条件,q 是 p 的必要条件.

注意:p 是 q 的充分条件是指只要具备了条件 p,那么 q 就一定成立,即命题中的条件是充分的;q 是 p 的必要条件是指如果不具备条件 q,则 p 就不能成立,即 q 是 p 成立的必不可少的条件.

(2)如果 $p\Rightarrow q$ 且 $q\Rightarrow p$,即 $p\Leftrightarrow q$,则 p 是 q 的充分且必要条件,简称充要条件.

注意:(1)当 $p\Leftrightarrow q$ 时,也称 p 与 q 是等价的.

(2)与充要条件等价的词语有“当且仅当”“等价于”“有且只有”“……,反过来也成立”等.

3. 必要条件的判断方法

(1)从逻辑推理关系上判断(定义法).

①若 $p\Rightarrow q$ 但 $q\nRightarrow p$,则 p 是 q 的充分不必要条件.

②若 $p\nRightarrow q$ 但 $q\Rightarrow p$,则 p 是 q 的必要不充分条件.

③若 $p\Rightarrow q$ 且 $q\Rightarrow p$,则 p 是 q 的充要条件.

④若 $p\nRightarrow q$ 且 $q\nRightarrow p$,则 p 是 q 的既不充分也不必要条件.

(2)从命题所对应的集合与集合之间的关系上判断(集合法).设命题 p 对应的集合为 A,命题 q 对应的集合为 B.

①若 $A\subseteq B$,则 p 是 q 的充分不必要条件.

②若 $A\supseteq B$,则 p 是 q 的必要不充分条件.

③若 $A\subseteq B$ 且 $A\supseteq B$,即 $A=B$,则 p 是 q 的充要条件.

④若 $A\nsubseteq B$ 且 $A\nsupseteq B$,则 p 是 q 的既不充分也不必要条件.

典例解析

例 1　已知 p:$|3x-5|<4$,q:$(x-1)(x-2)<0$,则 p 是 q 的(　　).

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

解析 $p:|3x-5|<4\Rightarrow p:\frac{1}{3}<x<3$，$q:(x-1)(x-2)<0\Rightarrow q:1<x<2$，所以 $p\nRightarrow q$ 但 $q\Rightarrow p$，所以 p 是 q 的必要不充分条件．故选 B.

技巧点拨 判断充分必要条件时，先要分清条件和结论，进而找到条件与结论之间的逻辑推理关系.

变式训练 1

设命题甲为 $0<x<5$，命题乙为 $|x-2|<3$，那么甲是乙的（　　）.

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

例 2 已知集合 $A=\left\{y\,\middle|\,y=x^2-\frac{3}{2}x+1,x\in\left[\frac{3}{4},2\right]\right\}$，$B=\{x\mid x+m^2\geqslant 1\}$，$p:x\in A$，$q:x\in B$，并且 p 是 q 的充分条件，求实数 m 的取值范围.

解析 由题意得 $A=\left[\frac{7}{16},2\right]$，$B=[1-m^2,+\infty)$，由于 p 是 q 的充分条件，所以 $A\subseteq B$，所以 $1-m^2\leqslant\frac{7}{16}$，解得 $m\geqslant\frac{3}{4}$ 或 $m\leqslant-\frac{3}{4}$，即实数 m 的取值范围是 $\left(-\infty,-\frac{3}{4}\right]\cup\left[\frac{3}{4},+\infty\right)$.

技巧点拨 本题主要考查集合的运算以及充要条件的判断，解题的关键是不等式之间的关系.

变式训练 2

已知 $p:x^2-2x-3<0$，$q:-a<x-1<a$．若 q 是 p 的一个必要不充分条件，求实数 a 的取值范围.

巩固练习

一、选择题

1. “$x<-2$”是“$x^2-4>0$”的(　　).

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

2. “$A\cap B=A$”是“$A\subseteq B$”的(　　).

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

3. 设甲是乙的充分不必要条件，乙是丙的充要条件，丁是丙的必要不充分条件，则甲是丁的(　　).

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

4. “$|x|\geqslant 1$”是“$x\geqslant 1$”的(　　).

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

5. “$\alpha=\frac{\pi}{4}$”是“$\tan\alpha=1$”的(　　).

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

6. “$x<2$”是“$x^2-x-2<0$”的(　　).

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

7. “$x>0$”是“$x>1$”的(　　).

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

8. 设 $a,b,c\in \mathbf{R}$,则"$a>b$"是"$ac^2>bc^2$"的(　　).

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

二、解答题

1. 判断下列问题中,p 是 q 的什么条件?

(1)p:$x^2\geqslant y^2$,q:$x\geqslant y$.

(2)p:$x\in A\cup B$,q:$x\in A\cap B$.

(3)p:$x>3$,q:$x>2$.

(4)p:a 是有理数,q:$a+2$ 是有理数.

2. 求一个对于一切实数 x 都有 $ax^2-ax+1>0$ 成立的充要条件.

3. 已知 p：$-2\leqslant x\leqslant 10$，$q$：$x^2-2x+1-m^2\leqslant 0(m>0)$，若 p 是 q 的充分不必要条件，求实数 m 的取值范围.

真题链接

1. (2024·安徽省分类考试)已知集合 $A=\{-2,-1,0\}$，$B=\{-1,2\}$，则 $A\cup B=$(　　).

A. $\{-2,-1,0,2\}$　　B. $\{-2,-1,0\}$

C. $\{-1,2\}$　　D. $\{-1\}$

2. (2024·安徽省分类考试)“$x>2$”是“$x>1$”的(　　).

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

3. (2023·安徽省分类考试)已知集合 $A=\{-2,-1,0,1\}$，$B=\{-2,1\}$，则 $A\cap B=$(　　).

A. $\{-2,1\}$　　B. $\{-1,0\}$

C. $\{-2,-1\}$　　D. $\{0,1\}$

4. (2023·安徽省分类考试)“$x=y$”是“$|x|=|y|$”的(　　).

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

5. (2022·安徽省分类考试)若集合 $A=\{-1,0,1,2\}$，$B=\{0,2,3\}$，则 $A\cup B=$(　　).

A. $\{3\}$　　B. $\{0,2\}$

C. $\{-1,0,1,2,3\}$　　D. $\{-1,1\}$

6. (2021·安徽省分类考试)已知集合 $A=\{-1,0,1\}$，$B=\{0,1\}$，则 $A\cup B=$(　　).

A. $\{0,1\}$　　B. $\{-1,0\}$

C. $\{-1,0,1\}$　　D. $\{-1,1\}$

7. (2020·安徽省分类考试)设全集 $U=\{1,2,3,4\}$，$A=\{3,4\}$，则 $\complement_U A=$(　　).

A. $\{1,2,3,4\}$　　B. $\{3,4\}$

C. $\{1,2\}$　　D. $\varnothing$

数学总复习

参考答案及解析

目　　录

第一章　集　　合

第一节　集合的概念及表示

【典例解析】

变式训练 1 C　**解:**由集合元素的确定性可知,“数学好”“与 0 接近”“优秀”都是不确定的,故选 C.

变式训练 2 6　**解:**由题意可知 $B=\{2,3,4,5,6,8\}$,个数为 6.

变式训练 3

解:(1)$\{11,12,13,14,15,\cdots\}=\{x|x=n+10,n\in\mathbf{N}^*\}$.

(2)$\{1,4,9,16,25,36\}=\{x|x=n^2,1\leqslant n\leqslant 6$ 且 $n\in\mathbf{Z}\}$.

【巩固练习】

1. D　**解:**“有趣的”“非常小的”“好听的”都是不确定的,故选 D.
2. C
3. B
4. C
5. A
6. B
7. C
8. D
9. D　**解:**掌握集合的概念及其特征.
10. B　**解:**$\sqrt{5}>2$,即 a 不属于集合 A,故选 B.

第二节　集合的关系及运算

【典例解析】

变式训练 1 A　**解:**由空集的性质可知,①、②、③是错误的,故选 A.

变式训练 2

解:因为 $A=B$,所以$\begin{cases}1+m=n,\\1+2m=n^2\end{cases}$ 或$\begin{cases}1+m=n^2,\\1+2m=n.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}m=0,\\n=1\end{cases}$ 或$\begin{cases}m=-\dfrac{3}{4},\\n=-\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

当 $m=0,n=1$ 时,集合元素不满足互异性,舍去.故 $m=-\frac{3}{4},n=-\frac{1}{2}$.

变式训练 3

解:$A\cap B=\{2,3\},A\cup B=\{0,1,2,3,4\}$,

$\complement_U A=\{4\}$,$\complement_U B=\{0,1\}$,所以$(\complement_U A)\cup(\complement_U B)=\{0,1,4\}$.

变式训练 4

解:(1)由题意得$\begin{cases}a+3\leqslant 1,\\ a\geqslant -6,\end{cases}$解得$-6\leqslant a\leqslant -2$.

(2)由题意得 $a+3<-6$ 或 $a>1$,解得 $a<-9$ 或 $a>1$.

变式训练 5 D　**解**:根据集合之间的关系作图,即可做出判断.

【巩固练习】

一、选择题

1. A　**解**:正确理解符号$\in$,$\notin$,$\subseteq$,$\subsetneqq$的意义,可知选 A.

2. D　**解**:集合$\{1,2,3,4\}$的子集有:$\varnothing$,$\{1\}$,$\{2\}$,$\{3\}$,$\{4\}$,$\{1,2\}$,$\{1,3\}$,$\{1,4\}$,$\{2,3\}$,$\{2,4\}$,$\{3,4\}$,$\{1,2,3\}$,$\{1,2,4\}$,$\{1,3,4\}$,$\{2,3,4\}$,$\{1,2,3,4\}$,共 16 个.故选 D.

3. A　**解**:因为集合 A 与集合 B 中无共同元素,所以 $A\cap B=\varnothing$,故选 A.

4. B　**解**:因为集合 A 与集合 B 中的共同元素是 0 和 1,所以 $A\cap B=\{0,1\}$,故选 B.

5. C　**解**:$A\cup B=\{-1,0,1\}$,故选 C.

6. B　**解**:因为集合 A 与集合 B 中的共同元素是 b,所以 $A\cap B=\{b\}$,故选 B.

7. D　**解**:$A\cup B=\{-2,-1,2\}$,故选 D.

8. C　**解**:由题易得 $\complement_U B=\{2,3\}$,则$(\complement_U B)\cap A=A=\{2,3\}$,故选 C.

二、填空题

1. $\in$;$\notin$;$\subseteq$;$\subseteq$;$=$

2. 6　**解**:根据集合元素的特征可知集合 $P=\{3,4,5\}$,故 $a=6$.

3. ①②④⑥　**解**:集合与集合之间的关系不能用$\in$.

4. $\{x|x<-3$ 或 $-3<x<0$ 或 $0<x<3$ 或 $x>3\}$　**解**:由题意可知 $A=\{-1,2\}$,则 $B=\{-3,0,3\}$.因为 $U=\mathbf{R}$,所以 $\complement_U B=\{x|x<-3$ 或 $-3<x<0$ 或 $0<x<3$ 或 $x>3\}$.

5. $\{1,2,3\}$

三、解答题

1. **解**:由题意可知 $B=\{0,1,2,4\}$,那么集合 A 中的元素都在集合 B 中,所以 $A\subseteq B$.(因为 $A\subseteq B$,并且 B 中至少有一个元素不属于 A,故 $A\subsetneqq B$ 也正确.)

2. **解**:子集:$\varnothing$,$\{-3\}$,$\{-1\}$,$\{1\}$,$\{3\}$,$\{-3,-1\}$,$\{-3,1\}$,$\{-3,3\}$,$\{-1,1\}$,$\{-1,3\}$,$\{1,3\}$,$\{-3,-1,1\}$,$\{-3,-1,3\}$,$\{-3,1,3\}$,$\{-1,1,3\}$,$\{-3,-1,1,3\}$.

真子集：$\varnothing$，$\{-3\}$，$\{-1\}$，$\{1\}$，$\{3\}$，$\{-3,-1\}$，$\{-3,1\}$，$\{-3,3\}$，$\{-1,1\}$，$\{-1,3\}$，$\{1,3\}$，$\{-3,-1,1\}$，$\{-3,-1,3\}$，$\{-3,1,3\}$，$\{-1,1,3\}$.

3. **解**：$A=\{x|x^2-3x+2=0\}=\{1,2\}$. 因为 $B\subsetneqq A$，所以 $B=\varnothing$ 或 $B=\{1\}$ 或 $B=\{2\}$.

当 $B=\varnothing$ 时，$a=0$；当 $B=\{1\}$ 时，$a=-2$；当 $B=\{2\}$ 时，$a=-1$.

故实数 a 的值组成的集合为 $\{-2,-1,0\}$.

4. **解**：(1)若 A 中只有一个元素，分两种情况讨论：

当 $a=0$ 时，$A=\{x|2x+1=0\}=\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$，符合题意.

当 $a\neq0$ 时，方程 $ax^2+2x+1=0$ 有两个相等的根，则 $\Delta=4-4a=0$，解得 $a=1$.

所以当 $a=0$ 或 $a=1$ 时 A 中只有一个元素.

(2)若 A 中恰有两个元素，则 $ax^2+2x+1=0$ 有两个不相等的根，即 $\begin{cases}a\neq0,\\ \Delta=4-4a>0,\end{cases}$ 解得 $a<1$ 且 $a\neq0$. 所以当 $a<1$ 且 $a\neq0$ 时 A 中恰有两个元素.

(3)若 A 中至多只有一个元素，分为 A 中只有一个元素或 $A=\varnothing$.

由(1)可知当 $a=0$ 或 $a=1$ 时 A 中只有一个元素.

若 $A=\varnothing$，则 $ax^2+2x+1=0$ 无解，即 $\begin{cases}a\neq0,\\ \Delta=4-4a<0,\end{cases}$ 解得 $a>1$.

所以当 $a\geqslant1$ 或 $a=0$ 时，A 中至多只有一个元素.

第三节 充要条件

【典例解析】

变式训练 1 A **解**：解不等式 $|x-2|<3$ 得 $-1<x<5$. 因为 $0<x<5\Rightarrow-1<x<5$，但 $-1<x<5 \nRightarrow 0<x<5$，所以甲是乙的充分不必要条件，故选 A.

变式训练 2

解：易得 p：$x^2-2x-3<0\Leftrightarrow-1<x<3$，$q$：$-a<x-1<a$，$1-a<x<1+a(a>0)$.

由于 q 是 p 的一个必要不充分条件，则 $\{x|-1<x<3\}\subsetneqq\{x|1-a<x<1+a\}(a>0)$.

所以 $\begin{cases}1-a<-1,\\ 1+a>3,\end{cases}$ 解得 $a>2$. 即实数 a 的取值范围为 $(2,+\infty)$.

【巩固练习】

一、选择题

1. A **解**：$x<-2\Rightarrow x^2-4>0$，而 $x^2-4>0\nRightarrow x<-2$，所以答案选 A.

2. C **解**：$A\cap B=A\Rightarrow A\subseteq B$，而 $A\subseteq B\Rightarrow A\cap B=A$，所以答案选 C.

3. A **解**：根据题意，甲 $\Rightarrow$ 乙，乙 $\Leftrightarrow$ 丙，丙 $\Rightarrow$ 丁，所以甲 $\Rightarrow$ 丁，答案选 A.

4. B　**解**：$x\geqslant1\Rightarrow|x|\geqslant1$，而$|x|\geqslant1\nRightarrow x\geqslant1$，所以答案选 B.

5. A　**解**：$\alpha=\frac{\pi}{4}\Rightarrow\tan\alpha=1$，而$\tan\alpha=1\nRightarrow\alpha=\frac{\pi}{4}$，所以答案选 A.

6. B　**解**：由$x^2-x-2<0$解得$-1<x<2$，所以“$x<2$”是“$x^2-x-2<0$”的必要不充分条件.

7. B　**解**：举特殊值$x=0.5$，所以“$x>0$”是“$x>1$”的必要不充分条件.

8. B　**解**：举特殊值$c=0$，所以“$a>b$”是“$ac^2>bc^2$”的必要不充分条件.

二、解答题

1. **解**：(1)既不充分也不必要条件；

(2)必要不充分条件；

(3)充分不必要条件；

(4)充要条件.

2. **解**：分两种情况进行讨论：

当$a=0$时，不等式$1>0$恒成立.

当$a\neq0$时，对于一切实数x都有$ax^2-ax+1>0$成立，则$a^2-4a<0$，解得$0<a<4$.

综上所述，a的取值范围为$0\leqslant a<4$. 所以所求的一个充要条件可以为$0\leqslant a<4$.

3. **解**：q：$x^2-2x+1-m^2\leqslant0(m>0)\Leftrightarrow[x-(1-m)][x-(1+m)]\leqslant0$.

因为$m>0$，所以不等式$[x-(1-m)][x-(1+m)]\leqslant0$的解集为$\{x|1-m\leqslant x\leqslant1+m\}$.

因为p是q的充分不必要条件，所以不等式$-2\leqslant x\leqslant10$的解集是$x^2-2x+1-m^2\leqslant0(m>0)$解集的子集.

所以$\begin{cases}1-m\leqslant-2,\\1+m\geqslant10,\end{cases}$解得$m\geqslant9$.

所以实数m的取值范围为$[9,+\infty)$.

真 题 链 接

1. A　**解**：由题可得，$A\cup B=\{-2,-1,0\}\cup\{-1,2\}=\{-2,-1,0,2\}$. 故选 A.

2. A　**解**：因为“$x>2$”$\Rightarrow$“$x>1$”，满足充分性，“$x>2$”$\Leftarrow$“$x>1$”，不满足必要性，所以“$x>2$”是“$x>1$”的充分不必要条件，故选 A.

3. A　**解**：$A=\{-2,-1,0,1\}$，$B=\{-2,1\}$，$A\cap B=\{-2,1\}$，故选 A.

4. A　**解**：充分性：$x=y\Rightarrow|x|=|y|$，充分性成立；

必要性：$x=-y\Rightarrow|x|=|y|$，此时$x\neq y$，即必要性不满足.

故“$x=y$”是“$|x|=|y|$”的充分不必要条件. 故选 A.

5. C　**解**：$A=\{-1,0,1,2\}$，$B=\{2,3\}$，由并集的定义得$A\cup B=\{-1,0,1,2,3\}$，故选 C.

6. C　**解**：$A=\{-1,0,1\}$，$B=\{0,1\}$，由并集的定义得$A\cup B=\{-1,0,1\}$，故选 C.

7. C　**解**：根据补集定义可知，$\complement_U A=\{1,2\}$. 故选 C.