• 江西省普通高校专升本考试 •

专用教程	英语
	政治
	信息技术
	大学语文及应用文写作
	高等数学及其应用
考前冲刺卷	英语
	政治
	信息技术
	大学语文及应用文写作
	高等数学及其应用
历年真题	英语
	信息技术

http://www.crtvup.com.cn
国家开放大学出版社

ISBN 978-7-304-13307-8

定价：68.00元

江西省普通高校专升本考试专用教程·高等数学及其应用

主编 华腾新思专升本考试研究中心

国家开放大学出版社

华腾新思

江西省

主编 华腾新思专升本考试研究中心

普通高校专升本考试专用教程

高等数学及其应用

赠册 参考答案及解析

国家开放大学出版社

江西省

主编　华腾新思专升本考试研究中心

普通高校专升本考试专用教程

高等数学及其应用

赠册　参考答案及解析

国家开放大学出版社·北京

图书在版编目（CIP）数据

江西省普通高校专升本考试专用教程. 高等数学及其应用 / 华腾新思专升本考试研究中心主编. -- 北京 ：国家开放大学出版社，2025. 9. -- ISBN 978-7-304-13307-8

Ⅰ. G724. 4

中国国家版本馆 CIP 数据核字第 2025QR6403 号

江西省普通高校专升本考试专用教程 · 高等数学及其应用

JIANGXI SHENG PUTONG GAOXIAO ZHUANSHENGBEN KAOSHI ZHUANYONG JIAOCHENG · GAODENG SHUXUE JI QI YINGYONG

主编 华腾新思专升本考试研究中心

出版 · 发行： 国家开放大学出版社

电话： 营销中心 010-68180820 总编室 010-68182524

网址： http://www.crtvup.com.cn

地址： 北京市海淀区西四环中路 45 号 **邮编：** 100039

经销： 新华书店北京发行所

策划编辑： 初晓非 **版式设计：** 张瑞阳

责任编辑： 杜建伟 **责任校对：** 王玉婷

责任印制： 陈 晨 王 雅

印刷： 三河市骏杰印刷有限公司

版本： 2025 年 9 月第 1 版 2025 年 9 月第 1 次印刷

开本： 880mm×1230mm 1/16 **印张：** 14. 25 **字数：** 355 千字

书号： ISBN 978-7-304-13307-8

定价： 68. 00 元

意见及建议：OUCP _ ZYJY@ouchn. edu. cn

PREFACE 前言

江西省普通高等学校专升本考试(以下简称江西专升本考试)是广大考生提升学历、实现自我价值的重要途径,报考人数众多,竞争日益激烈。尤其是实行统考以来,江西专升本考试呈现出一些新的趋势:题型灵活多变,更加注重对基础知识、应用能力及考生的综合素质的考查。

数学作为江西专升本考试的专业基础课之一,一直都是考生备考的重点。为了帮助广大考生系统、全面、精准、高效地复习备考,我们特组织具有丰富教研经验的教研员,以江西专升本考试数学科目的考试大纲为依据,深入研究近几年考试的命题情况,紧密结合考生的学习特点,精心编写了这本复习教程。

本书具有以下特色:

1. 紧扣考纲,契合考情

本书以江西专升本考试专业科目的最新考试大纲及考试真题为依据进行编写,难度与考试要求高度一致。考生利用本书可以更好地把握考情,强化对基础知识的理解与运用,学习必备的应试技巧,切实提高应试能力。

2. 体例科学,栏目丰富

本书经过精心设计,以清晰的脉络呈现考生应知应会知识的全貌,确保考生学习无死角、无遗漏;为便于考生理解知识点,提升应试技能,本书还设置了"名师点拨""知识拓展""小提示"等形式新颖的小栏目,帮助考生对知识形成立体认知。

3. 讲练结合,提升能力

本书采取讲练结合的方式,在讲解知识点的过程中穿插历年真题及典型例题,帮助考生明确答题误区,习得解题技巧;还设置了精选的练习题,帮助考生及时巩固所学,查漏补缺,从而有步骤、有计划地掌握所学知识。

专升本考试是人生道路上的一次重要挑战,也是实现梦想的一次宝贵机会。祝愿考生朋友们在即将到来的考试中取得优异成绩,圆梦本科院校!

华腾新思专升本考试研究中心

"专用教程"这样用

考点集结
思维导图展示考点，一目了然！

考情回顾
考过什么？什么最重要？都在这里了！

考点精讲
一网打尽重点难点常考点！

- **真题再现** 经典真题不容错过
- **典例剖析** 典型例题引领学习
- **名师点拨** 名师点拨解题思路
- **知识拓展** 不能不看的新知识
- **小提示** 提醒关注重要细节

精华回顾
本部分精华再回顾！

巩固演练
学以致用，精选习题刷起来！

CONTENTS 目录

第一章 函数、极限与连续

第一节 函 数

考点集结

- 函数
  - 函数的概念
    - 函数的定义
    - 分段函数
    - 复合函数
    - 反函数
    - 隐函数
  - 函数的基本性质
    - 函数的有界性
    - 函数的奇偶性
    - 函数的单调性
    - 函数的周期性
  - 基本初等函数
    - 幂函数
    - 指数函数
    - 对数函数
    - 三角函数
    - 反三角函数

考情回顾

年　　份	考　　点	题　　型	数　　量	分　　值
2025	分段函数	单项选择题	1	5
	函数的周期性	单项选择题	1	5
	函数的定义域	填空题	1	5
2024	复合函数	单项选择题	1	5
	函数的周期性	单项选择题	1	5
2023	分段函数	单项选择题	1	5
	函数的奇偶性	单项选择题	1	5
	函数的定义域	填空题	1	5
2022	同一函数	单项选择题	1	5
	函数值	填空题	1	5

考点精讲

一、函数的概念 理解

1. 函数的定义

定义 1　设 D 是一个实数集,如果存在一个对应法则 f,使得对 D 中的每一个数 x,在 $\mathbf{R}$ 中都有唯一确定的数 y 与之对应,那么称对应法则 f 为定义在 D 上的一个函数,记为

$$y=f(x),x\in D.$$

其中 x 称为**自变量**,y 称为**因变量**,D 称为函数 f 的**定义域**.

在函数的定义中,对 D 中的每一个数 x,按照对应法则,总有唯一确定的值 y 与之对应,这个值称为函数在 x 处的**函数值**,记作 $f(x)$. 当自变量 x 取遍 D 的所有数值时,对应的函数值 $f(x)$的全体所构成的集合称为函数 f 的**值域**,记作 $f(D)$,即

$$f(D)=\{y\mid y=f(x),x\in D\}.$$

由函数的定义可以看出,函数的定义域与对应法则是确定函数的两个必不可少的要素. 也就是说,如果两个函数的对应法则和定义域都相同,那么这两个函数就是**相同的函数**.

名师点拨

函数的定义域通常由问题的实际背景确定,如果只给出解析式 $y=f(x)$,而没有指明它的定义域,那么函数的定义域就是指能使这个式子有意义的所有实数的集合.

真题再现

1. (2025 · **填空题**) 函数 $y=\ln(x-2)$ 的定义域为________.

【答案】 $(2,+\infty)$

【解析】 要使函数有意义,则需 $x-2>0$,即 $x>2$,所以函数的定义域为$(2,+\infty)$.

2. (2023 · **填空题**) 函数 $y=\sqrt{2x-1}$的定义域是________.

【答案】 $\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$

【解析】 由 $2x-1\geqslant0$,解得 $x\geqslant\dfrac{1}{2}$,故所求函数的定义域为$\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$.

3.(2022·单项选择题)下列选项为同一个函数的是(　　).

A. $f(x)=1,f(x)=\sin^2x+\cos^2x$　　B. $f(x)=x,f(x)=\sqrt{x^2}$

C. $f(x)=x,f(x)=\dfrac{x^2}{x}$　　D. $f(x)=2\ln x,f(x)=\ln x^2$

【答案】 A

【解析】 A 项中,$\sin^2x+\cos^2x=1$,且 $f(x)=1$ 与 $f(x)=\sin^2x+\cos^2x$ 的定义域均为$(-\infty,+\infty)$,是同一个函数;

B 项中,$f(x)=\sqrt{x^2}=|x|$,两函数的对应法则不同,不是同一个函数;

C 项中,$f(x)=x$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$,$f(x)=\dfrac{x^2}{x}$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,两者定义域不同,不是同一个函数;

D 项中,$f(x)=2\ln x$ 的定义域为$(0,+\infty)$,$f(x)=\ln x^2$ 的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,两者定义域不同,不是同一个函数.故选 A.

典例剖析

例 1　求下列函数的定义域.

(1)$y=\sqrt{x+3}$;　(2)$y=\dfrac{1}{x+2}$;　(3)$y=\ln(x-1)$.

【解析】 (1)因为二次根式的被开方数不小于零,所以

$$x+3\geqslant0,$$

解得

$$x\geqslant-3.$$

故 $y=\sqrt{x+3}$的定义域为$[-3,+\infty)$.

(2)因为分式的分母不能为零,所以

$$x+2\neq0,$$

即

$$x\neq-2.$$

故 $y=\dfrac{1}{x+2}$的定义域为$(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)$.

(3)因为对数的真数大于零,所以

$$x-1>0,$$

解得

$$x>1.$$

故 $y=\ln(x-1)$的定义域为$(1,+\infty)$.

例 2　函数 $f(x)=\sqrt{x-3}+\arcsin\dfrac{1}{x}$的定义域是(　　).

A. $(-\infty,+\infty)$　　B. $[1,3]$

C. $(-\infty,0)\cup(0,3)$　　D. $[3,+\infty)$

【答案】 D

【解析】 使根式$\sqrt{x-3}$有意义的实数 x 的集合是$\{x|x-3\geqslant0\}=\{x|x\geqslant3\}$,使 $\arcsin\dfrac{1}{x}$有意义的实数 x 的集合是$\left\{x\middle|-1\leqslant\dfrac{1}{x}\leqslant1\right\}=\{x|x\geqslant1$ 或 $x\leqslant-1\}$.因此,函数 $f(x)$的定义域是$\{x|x\geqslant3\}\cap\{x|x\geqslant1$ 或$x\leqslant-1\}=\{x|x\geqslant3\}$,即$[3,+\infty)$.故选 D.

2. 分段函数

定义 2 在自变量的不同变化范围中,对应法则用不同式子来表示的函数,称为**分段函数**.

例如,分段函数 $f(x)=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,当 $x\in(-\infty,0)$ 时,对应的函数值 $f(x)=-x$;当 $x\in[0,+\infty)$ 时,对应的函数值 $f(x)=x$.

真题再现

1. (2025 · 单项选择题)设函数 $f(x)=\begin{cases}\arcsin x, & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ \tan x, & 0<x\leqslant 1,\end{cases}$ 则 $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=$ (　　).

A. -2　　B. -1　　C. 1　　D. 2

【答案】 C

【解析】 $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\tan\dfrac{\pi}{4}=1$.

2. (2023 · 单项选择题)设函数 $f(x)=\begin{cases}\cos x, & |x|<\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & |x|\geqslant\dfrac{\pi}{2},\end{cases}$ 则 $f(\pi)=$ (　　).

A. -2　　B. 0　　C. 1　　D. 2

【答案】 B

【解析】 因为 $\pi>\dfrac{\pi}{2}$,所以 $f(\pi)=0$. 故选 B.

典例剖析

设函数 $f(x)=\begin{cases}1+\log_2(1-x), & x<1,\\ 2^{x-2}, & x\geqslant 1,\end{cases}$ 则 $f(-1)+f(\log_2 4)=$ ________.

【答案】 3

【解析】 由题意,得 $f(-1)=1+\log_2 2=2$,$f(\log_2 4)=f(2)=2^{2-2}=1$,所以 $f(-1)+f(\log_2 4)=3$.

3. 复合函数

定义 3 设 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 是两个函数. 如果 $y=f(u)$ 的定义域包含函数 $u=g(x)$ 的值域,那么定义在 $u=g(x)$ 定义域上的函数 $y=f[g(x)]$ 称为由 $u=g(x)$ 与 $y=f(u)$ 构成的**复合函数**,u 称为**中间变量**.

函数 g 与函数 f 构成的复合函数,即按"先 g 后 f"的次序复合的函数,通常记为 $f\circ g$,即

$$(f\circ g)(x)=f[g(x)].$$

例如,取 $f(x)=\sin x$,$g(x)=x^2$,则 $g(x)$ 与 $f(x)$ 构成的复合函数为 $f[g(x)]=\sin x^2$,$f(x)$ 与 $g(x)$ 构成的复合函数为 $g[f(x)]=\sin^2 x$.

知识拓展

(1)不是任何两个函数都可以构成复合函数. 例如,函数 $y=\arcsin u$ 与函数 $u=2+x^2$ 就不能构成复合函数. 因为函数 $y=\arcsin u$ 的定义域为 $[-1,1]$,而 $u=2+x^2\geqslant 2$,所以两函数不满足复合函数的条件.

(2)复合函数可以有多个中间变量,如 $y=e^u$,$u=\sqrt{v}$,$v=x+1$ 复合成函数 $y=e^{\sqrt{x+1}}$,这里 u,v 都是中间变量.

真题再现

1. (2024·单项选择题)设函数 $f(x)=1+\frac{1}{x}$,则 $f(x^2)=(\quad)$.

A. 1　　B. $\frac{1}{1+x^2}$　　C. $\frac{x}{1+x^2}$　　D. $1+\frac{1}{x^2}$

【答案】 D

【解析】 由题意,易得 $f(x^2)=1+\frac{1}{x^2}$. 故选 D.

2. (2022·填空题)已知 $f(x)=\frac{1}{x+1}$,求 $f(f(0))=$________.

【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】 由题意,易得 $f(0)=\frac{1}{0+1}=1$,则 $f(f(0))=f(1)=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$.

典例剖析

例 1　设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|\leqslant 1,\\ 2, & |x|>1,\end{cases}$ 求 $f[g(x)]$,$g[f(x)]$.

【解析】 $f[g(x)]=\begin{cases}1, & |g(x)|\leqslant 1,\\ 0, & |g(x)|>1\end{cases}=\begin{cases}1, & |x|=1,\\ 0, & |x|\neq 1.\end{cases}$

$g[f(x)]=\begin{cases}2-f^2(x), & |f(x)|\leqslant 1,\\ 2, & |f(x)|>1\end{cases}=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 2, & |x|>1.\end{cases}$

例 2　下列函数是由哪些较简单的函数复合而成的?

(1) $y=e^{-x}$;　　(2) $y=\sin^2(1+2x)$;　　(3) $y=\arccos\sqrt{\tan(a^2+x^2)}$.

【解析】 (1) $y=e^{-x}$ 是由 $y=e^u$ 与 $u=-x$ 复合而成的.

(2) $y=\sin^2(1+2x)$ 是由 $y=u^2$,$u=\sin v$ 与 $v=1+2x$ 复合而成的.

(3) $y=\arccos\sqrt{\tan(a^2+x^2)}$ 是由 $y=\arccos u$,$u=\sqrt{v}$,$v=\tan w$,$w=a^2+x^2$ 复合而成的.

4. 反函数

定义 4　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D,值域为 $f(D)$. 如果对任一 $y\in f(D)$,都存在唯一的 $x\in D$,使得 $f(x)=y$,即确定了一个以 y 为自变量,x 为因变量的函数,那么称这个新确定的函数为 $y=f(x)$ 的**反函数**,记为 $x=f^{-1}(y)$. 由于习惯上用 x 表示自变量,用 y 表示因变量,所以将反函数中的 x 与 y 互换位置,即记为 $y=f^{-1}(x)$,$x\in f(D)$.

典例剖析

例 1　求函数 $y=\frac{3x-5}{2x+1}$ 的反函数.

【解析】 在 $y=\frac{3x-5}{2x+1}$ 两边同时乘 $2x+1$,移项并整理,得

$$x(3-2y)=5+y,$$

等号两边同时除以 $3-2y$，得

$$x=\frac{5+y}{3-2y}.$$

故函数 $y=\frac{3x-5}{2x+1}$ 的反函数为 $y=\frac{5+x}{3-2x}$.

【点拨】 从函数图像上来看，两个互为反函数的函数，它们的图像关于直线 $y=x$ 对称.

例 2 求函数 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 的反函数.

【解析】 分别以 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 的两边为指数，e 为底数，得

$$e^y=x+\sqrt{x^2+1},$$

移项，得

$$\sqrt{x^2+1}=e^y-x,$$

等号两边同时平方并整理，得

$$x=\frac{e^y-e^{-y}}{2}.$$

故函数 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 的反函数为 $y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$.

【点拨】 求函数 $y=f(x)$ 的反函数，通常是把解析式 $y=f(x)$ 变形为 x 关于 y 的等式 $x=g(y)$，然后互换 x 与 y 的位置，得到 $y=g(x)$，函数 $y=g(x)$ 即为函数 $y=f(x)$ 的反函数.

5. 隐函数

定义 5 如果变量 x,y 满足方程 $F(x,y)=0$，且在一定条件下，当 x 取某区间内的任一值时，相应地总有满足这个方程的唯一的 y 值存在，那么就说方程 $F(x,y)=0$ 在该区间确定了一个**隐函数** $y=f(x)$.

例如，方程 $x^2+y^2=1$ 在 $[-1,1]$ 上确定了两个隐函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 和 $y=-\sqrt{1-x^2}$.

二、函数的基本性质 掌握

1. 函数的有界性

定义 6 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X\subset D$. 若存在一个正数 M，使得对任一 $x\in X$，恒有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$ 在 X 上**有界**，或称 $f(x)$ 是 X 上的**有界函数**. 若不存在这样的正数 M，则称 $f(x)$ 在 X 上**无界**.

例如，函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界，因为对任何实数 x，恒有 $|\sin x|\leqslant 1$. 又如，函数 $y=\frac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 上无界，在 $[1,+\infty)$ 上有界.

典例剖析

判断下列函数在给定区间上是否有界.

(1) $y=x,x\in(-\infty,+\infty)$；

(2) $y=\frac{1}{x^2+1},x\in(-\infty,+\infty)$；

(3) $y=e^x,x\in(-\infty,0)$；

(4) $y=\arctan x,x\in(-\infty,+\infty)$.

【解析】 (1)显然,函数 $y=x$ 在$(-\infty,+\infty)$上无界.

(2)因为当 $x\in(-\infty,+\infty)$时,

$$\left|\frac{1}{x^2+1}\right|\leqslant\frac{1}{1}=1,$$

所以函数 $y=\frac{1}{x^2+1}$在$(-\infty,+\infty)$上有界.

(3)因为当 $x\in(-\infty,0)$时,

$$|e^x|<e^0=1,$$

所以函数 $y=e^x$ 在$(-\infty,0)$上有界.

(4)因为当 $x\in(-\infty,+\infty)$时,

$$|\arctan x|<\frac{\pi}{2},$$

所以函数 $y=\arctan x$ 在$(-\infty,+\infty)$上有界.

2. 函数的奇偶性

定义 7 设函数 $f(x)$的定义域为 D,且 D 关于原点对称,即对任一 $x\in D$,都有 $-x\in D$. 若

$$f(-x)=f(x)$$

对一切 $x\in D$ 成立,则称 $f(x)$为偶函数;若

$$f(-x)=-f(x)$$

对一切 $x\in D$ 成立,则称 $f(x)$为**奇函数**.

名师点拨

从函数图像上看,偶函数的图像关于 y 轴对称,奇函数的图像关于原点对称.

真题再现

(2023 · **单项选择题**)下列函数为奇函数的是(　　)

A. $y=x$　　B. $y=|x|$　　C. $y=x^2$　　D. $y=\cos x$

【答案】 A

【解析】 所给函数定义域均为 $\mathbf{R}$,A 为奇函数,B,C,D 为偶函数. 故选 A.

典例剖析

判断下列函数的奇偶性.

(1)$f(x)=x^2(1+x^2)$;　　(2)$f(x)=x(x+1)(x-1)$.

【解析】 (1)因为函数 $f(x)=x^2(1+x^2)$的定义域为 $\mathbf{R}$,且

$$f(-x)=(-x)^2[1+(-x)^2]=x^2(1+x^2)=f(x),$$

所以 $f(x)=x^2(1+x^2)$是偶函数.

(2)因为函数 $f(x)=x(x+1)(x-1)$的定义域为 $\mathbf{R}$,且

$$f(-x)=(-x)[(-x)+1][(-x)-1]=-x(x+1)(x-1)=-f(x),$$

所以 $f(x)=x(x+1)(x-1)$是奇函数.

3. 函数的单调性

定义 8 设函数 $f(x)$的定义域为 D,区间 $I\subset D$. 若对于区间 I 上任意两点 x_1,x_2,当 $x_1<x_2$ 时,恒有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称 $f(x)$在 I 上是**单调增加**的;若对于区间 I 上任意两点 x_1,

名师点拨

在判断函数的奇偶性时,一定要先判断函数的定义域是否关于原点对称,再判断 $f(x)$与 $f(-x)$的关系.

x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)>f(x_2),$$

则称 $f(x)$在 I 上是**单调减少**的.

典例剖析

判断下列函数的单调性.

(1)$f(x)=\dfrac{1}{1-x}$，$x\in(-\infty,1)$；　　(2)$f(x)=x^2-2x$，$x\in(-\infty,1)$.

【解析】 (1)任取 $x_1,x_2\in(-\infty,1)$，且 $x_1<x_2$，则

$$1-x_1>1-x_2>0,$$

从而

$$\frac{1}{1-x_1}<\frac{1}{1-x_2},$$

即得

$$f(x_1)<f(x_2).$$

故 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$在$(-\infty,1)$上单调增加.

(2)任取 $x_1,x_2\in(-\infty,1)$，且 $x_1<x_2$，则

$$x_1+x_2<2,x_2-x_1>0,$$

从而

$$f(x_2)-f(x_1)=x_2^2-x_1^2-2(x_2-x_1)=(x_2+x_1-2)(x_2-x_1)<0,$$

即得

$$f(x_1)>f(x_2).$$

故 $f(x)=x^2-2x$ 在$(-\infty,1)$上单调减少.

4. 函数的周期性

定义 9 设函数 $f(x)$的定义域为 D. 若存在一个正数 T，使得对任一 $x\in D$，有 $x+T\in D$，且

$$f(x+T)=f(x)$$

恒成立，则称 $f(x)$为**周期函数**，称 T 为 $f(x)$的一个**周期**. 如果函数 $f(x)$的所有周期中，存在一个最小的周期 T_0，那么称 T_0 为 $f(x)$的**最小正周期**.

小提示

作差法与作商法是判断函数单调性过程中常用的比较大小的方法，需要注意的是，使用作商法时，要考虑函数值的正负.

名师点拨

并非每个周期函数都有最小正周期. 例如，狄利克雷函数 $D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 是有理数},\\ 0, & x\text{ 是无理数},\end{cases}$ 任何正有理数都是它的周期，由于不存在最小的正有理数，所以它没有最小正周期.

真题再现

1. (2025 · **单项选择题**)下列函数是周期函数的是(　　).

A. $y=x^2$　　B. $y=\sin x$　　C. $y=\ln x$　　D. $y=e^x$

【答案】 B

【解析】 $y=\sin x$ 是周期函数，周期为 $2k\pi, k\in\mathbf{Z}$.

2.(2024·单项选择题)下列函数是周期函数的是(　　)

A. $y=x^3$　　B. $y=xe^x$　　C. $y=\tan x$　　D. $y=\arcsin x$

【答案】 C

【解析】 由函数的图像可知 $y=\tan x$ 为周期函数. 故选 C.

典例剖析

判断下列函数的周期性，如果是周期函数，写出它们的最小正周期.

(1) $f(x)=\tan 2x$；　(2) $f(x)=x\tan x$；　(3) $f(x)=|\sin 2x|$.

【解析】 (1)函数 $f(x)=\tan 2x$ 是周期函数，它的最小正周期是 $\frac{\pi}{2}$.

(2)函数 $f(x)=x\tan x$ 不是周期函数.

(3)函数 $f(x)=|\sin 2x|$ 是周期函数，它的最小正周期是 $\frac{\pi}{2}$.

知识拓展

如果函数 $f(x)$ 的周期是 T，那么函数 $f(\omega x)(\omega>0)$ 的周期是 $\frac{T}{\omega}$.

三、基本初等函数 掌握

1. 幂函数

形如 $y=x^\alpha$（$\alpha\in\mathbf{R}$ 为常数）的函数称为**幂函数**. 当 $\alpha=1,2,3,\frac{1}{2},-1$ 时，幂函数 $y=x^\alpha$ 的图像如图 1-1 所示.

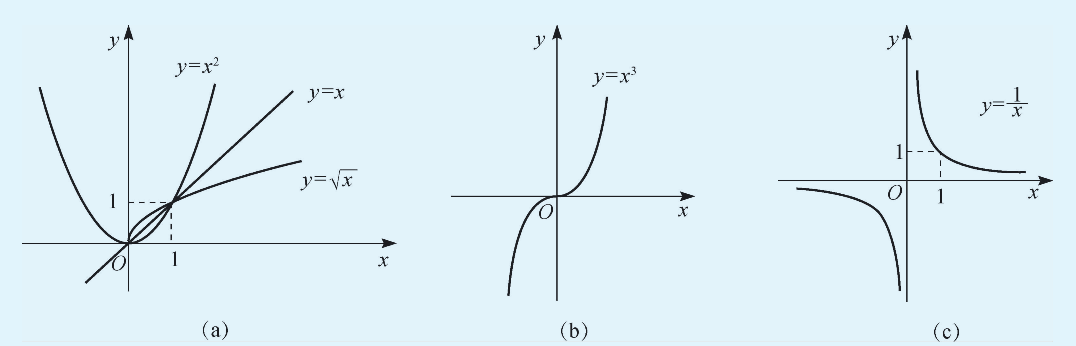

图 1-1

幂函数 $y=x^\alpha$ 的图像恒过点(1,1). 当 $\alpha>0$ 时，幂函数 $y=x^\alpha$ 在 $(0,+\infty)$ 上**单调增加**；当 $\alpha<0$ 时，幂函数 $y=x^\alpha$ 在 $(0,+\infty)$ 上**单调减少**.

知识拓展

指数幂及其运算性质：

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m};\ a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}};\ a^m a^n=a^{m+n};\ (a^m)^n=a^{mn};\ (ab)^m=a^m b^m.$$

其中 $a>0,b>0,m\in\mathbf{R},n\in\mathbf{R}$.

2. 指数函数

形如 $y=a^x(a>0$ 且 $a\neq1)$ 的函数称为**指数函数**. 指数函数的定义域为 $\mathbf{R}$，值域为 $(0,+\infty)$，它的图像如图 1-2 所示.

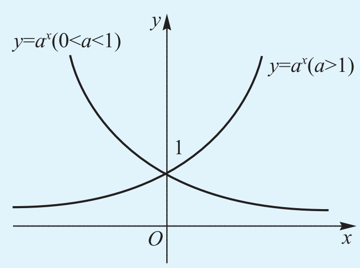

图 1-2

指数函数 $y=a^x$ 的图像恒过点 $(0,1)$. 当 $a>1$ 时，指数函数 $y=a^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调增加；当 $0<a<1$ 时，指数函数 $y=a^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调减少.

3. 对数函数

形如 $y=\log_a x(a>0$ 且 $a\neq1)$ 的函数称为**对数函数**. 对数函数的定义域为 $(0,+\infty)$，值域为 $\mathbf{R}$，它的图像如图 1-3 所示.

特别地，以 10 为底的对数函数称为**常用对数函数**，简记为 $y=\lg x$；以 e(e=2.718 28…是一个无理数)为底的对数函数称为**自然对数函数**，简记为 $y=\ln x$.

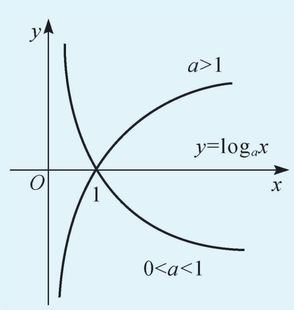

图 1-3

对数函数 $y=\log_a x$ 的图像恒过点 $(1,0)$. 当 $a>1$ 时，对数函数 $y=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调增加；当 $0<a<1$ 时，对数函数 $y=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调减少.

对于确定的实数 $a(a>0$ 且 $a\neq1)$，指数函数 $y=a^x$ 与对数函数 $y=\log_a x$ 互为反函数，它们的图像关于直线 $y=x$ 对称.

知识拓展

对数的运算性质：

$\log_a MN=\log_a M+\log_a N$；　　$\log_a \dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$；

$\log_a M^n=n\log_a M$；　　$\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$（换底公式）.

其中 $a>0$ 且 $a\neq1$；$b>0$；$c>0$ 且 $c\neq1$；$M>0$，$N>0$；$n\in\mathbf{R}$.

4. 三角函数

正弦函数 $y=\sin x$，余弦函数 $y=\cos x$，正切函数 $y=\tan x$，余切函数 $y=\cot x$ 统称为**三角函数**，它们的图像如图 1-4 所示.

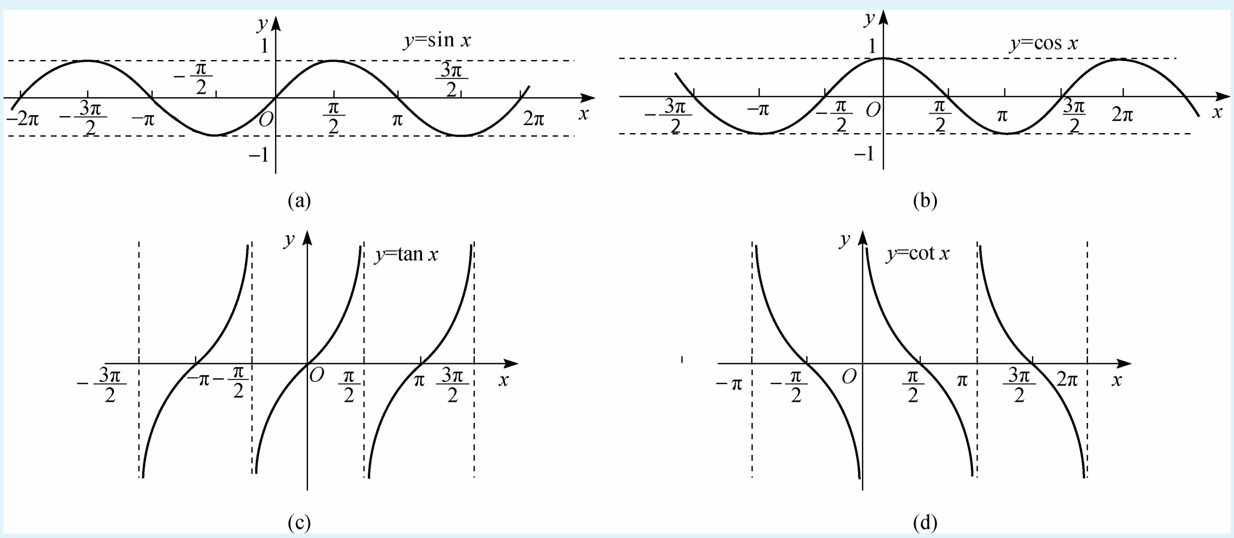

图 1-4

正弦函数 $y=\sin x$ 和余弦函数 $y=\cos x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，值域为 $[-1,1]$；正切函数 $y=\tan x$ 的定义域为 $\left\{x\,\middle|\,x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$，值域为 $\mathbf{R}$；余切函数 $y=\cot x$ 的定义域为 $\{x\mid x\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$，值域为 $\mathbf{R}$.

知识拓展

三角函数的常用公式：

$\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$；　　$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$；

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$；　　$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$；

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$；　　$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$.

5. 反三角函数

正弦函数 $y=\sin x$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的反函数，称为**反正弦函数**，记作 $y=\arcsin x$，其定义域为

$[-1,1]$，值域为$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，图像如图 1-5(a)所示.

余弦函数 $y=\cos x$ 在区间$[0,\pi]$上的反函数，称为**反余弦函数**，记作$y=\arccos x$，其定义域为$[-1,1]$，值域为$[0,\pi]$，图像如图 1-5(b)所示.

正切函数 $y=\tan x$ 在区间$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$上的反函数，称为**反正切函数**，记作$y=\arctan x$，其定义域为 $\mathbf{R}$，值域为$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，图像如图 1-5(c)所示.

余切函数 $y=\cot x$ 在区间$(0,\pi)$上的反函数，称为**反余切函数**，记作$y=\operatorname{arccot} x$，其定义域为 $\mathbf{R}$，值域为$(0,\pi)$，图像如图 1-5(d)所示.

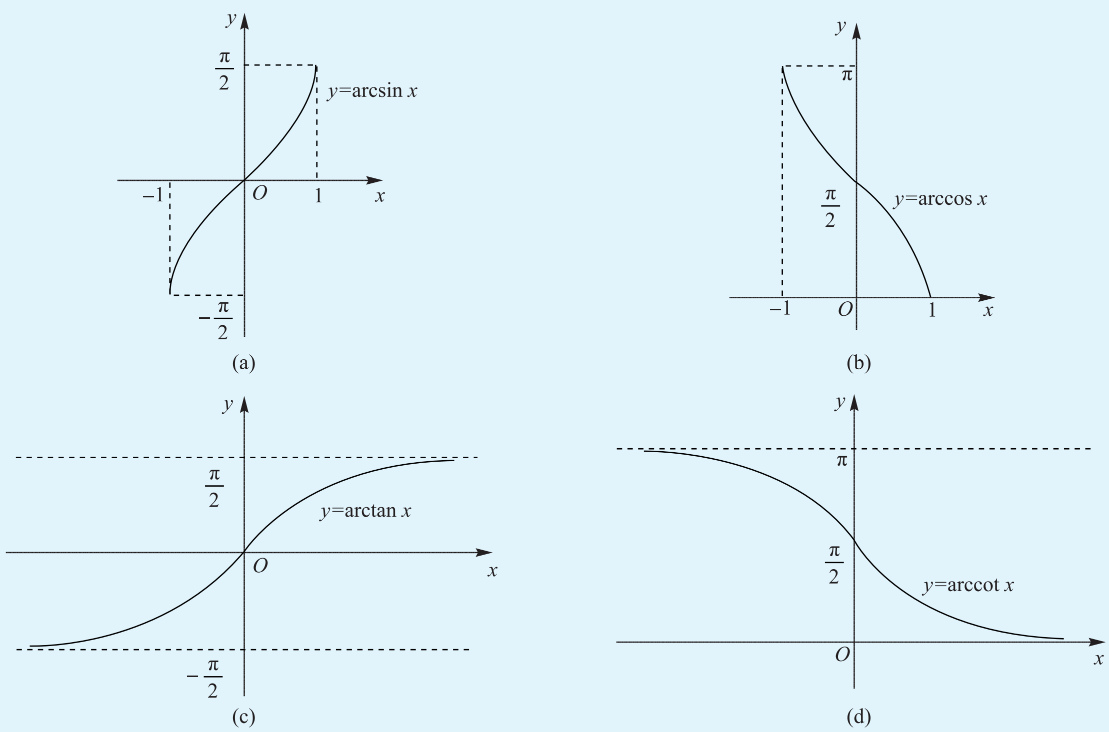

图 1-5

定义 10 由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合所构成的函数，称为**初等函数.**

精华回顾

1. 函数的有界性：设函数 $f(x)$的定义域为 D，数集 $X\subset D$. 若存在一个正数 M，使得对任一 $x\in X$，恒有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$在 X 上**有界**，或称 $f(x)$是 X 上的**有界函数**. 若不存在这样的正数 M，则称 $f(x)$在 X 上**无界.**

2. 反三角函数：正弦函数 $y=\sin x$ 在区间$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上的反函数，称为**反正弦函数**，记作$y=\arcsin x$，其定义域为$[-1,1]$，值域为$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

余弦函数 $y=\cos x$ 在区间$[0,\pi]$上的反函数，称为**反余弦函数**，记作$y=\arccos x$，其定义域为$[-1,1]$，

值域为$[0,\pi]$.

正切函数 $y=\tan x$ 在区间$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$上的反函数,称为**反正切函数**,记作$y=\arctan x$,其定义域为 $\mathbf{R}$,值域为$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

余切函数 $y=\cot x$ 在区间$(0,\pi)$上的反函数,称为**反余切函数**,记作$y=\operatorname{arccot} x$,其定义域为 $\mathbf{R}$,值域为$(0,\pi)$.

巩固演练

1. 函数 $f(x)=\frac{x-1}{\ln x}+\sqrt{16-x^2}$的定义域为(　　).

A. $(0,1)$　　B. $(0,1)\cup(1,4)$

C. $(0,4)$　　D. $(0,1)\cup(1,4]$

2. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 1,\\ x+\frac{6}{x}-6, & x>1,\end{cases}$ 则 $f[f(-3)]=$(　　).

A. $\frac{11}{3}$　　B. 9

C. $\frac{2}{3}$　　D. 6

3. 设函数 $y=2+\ln(x+3)$,则此函数的反函数是(　　).

A. $y=e^{2x+3}-3$　　B. $y=e^{x-2}-3$

C. $x=\ln(y-2)-3$　　D. $y=\ln(x-2)-3$

4. 已知函数 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数. 若 $f(x)$的最小正周期为 4,且 $f(1)>0$,$f(3)=\frac{m-3}{m+1}$,则 m 的取值范围是(　　).

A. $-3<m<1$　　B. $m>1$ 或 $m<-3$

C. $-1<m<3$　　D. $m>3$ 或 $m<-1$

5. 函数 $f(x)=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$是(　　).

A. 奇函数　　B. 偶函数

C. 非奇非偶函数　　D. 既奇又偶函数

6. 下列函数中,图像关于 y 轴对称的有(　　).

A. $y=x\cos x$　　B. $y=x+x^3+1$

C. $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$　　D. $y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$

7. 函数 $y=\cos 3x$ 的最小正周期 $T=$________.

8. 设 $f(x)=x+1$,$\varphi(x)=\frac{1}{1+x^2}$,则 $f[\varphi(x)+1]=$________.

9. 已知 $f(e^x+1)=e^{2x}+e^x+1$,则 $f(x)=$________________.

10. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ -2, & 1<x\leqslant 2,\end{cases}$ 求函数 $f(x+3)$的定义域.

11. 设函数 $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$, $g(x)=\sqrt{x+2}$, 求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$.

12. 求下列函数的反函数.

(1) $y=1+\ln(x+2)$；

(2) $y=3^{2x+5}$.

（赠册）

江西省普通高校专升本考试
专用教程·高等数学及其应用
参考答案及解析

国家开放大学出版社·北京

目　录

第一章　函数、极限与连续

第一节　函　　数

1. D　**解析:** 使 $\dfrac{x-1}{\ln x}$ 有意义的 x 的取值范围是 $\begin{cases}\ln x\neq 0,\\ x>0,\end{cases}$ 解得 $0<x<1$ 或 $x>1$；使 $\sqrt{16-x^2}$ 有意义的 x 的取值范围是 $-4\leqslant x\leqslant 4$. 故函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,1)\cup(1,4]$.

2. A　**解析:** $f(-3)=(-3)^2=9$, $f[f(-3)]=f(9)=9+\dfrac{6}{9}-6=\dfrac{11}{3}$.

3. B　**解析:** 由 $y=2+\ln(x+3)$，得 $x=e^{y-2}-3$. 交换 x,y，得 $y=e^{x-2}-3$. 故函数 $y=2+\ln(x+3)$ 的反函数为 $y=e^{x-2}-3$.

4. C　**解析:** 因为函数 $f(x)$ 的最小正周期为 4，所以 $f(-1)=f(3)=\dfrac{m-3}{m+1}$. 又因为函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，所以 $f(1)=-f(-1)=\dfrac{3-m}{m+1}$，于是 $\dfrac{3-m}{m+1}>0$，解得 $-1<m<3$.

5. A　**解析:** $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f(-x)=\log_a(-x+\sqrt{(-x)^2+1})=\log_a\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}=-\log_a(x+\sqrt{x^2+1})=-f(x)$，所以 $f(x)$ 是奇函数.

6. C　**解析:** 易知 C 项是偶函数，偶函数的图像关于 y 轴对称. 故选 C.

7. $\dfrac{2\pi}{3}$　**解析:** $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=\dfrac{2\pi}{3}$.

8. $\dfrac{2x^2+3}{1+x^2}$　**解析:** $f[\varphi(x)+1]=[\varphi(x)+1]+1=\left(\dfrac{1}{1+x^2}+1\right)+1=\dfrac{2x^2+3}{1+x^2}$.

9. x^2-x+1　**解析:** 令 $e^x+1=t$，则 $t>1$，$x=\ln(t-1)$，则

$$f(t)=e^{2\ln(t-1)}+e^{\ln(t-1)}+1=[e^{\ln(t-1)}]^2+e^{\ln(t-1)}+1=(t-1)^2+(t-1)+1=t^2-t+1,$$

所以 $f(x)=x^2-x+1$.

10. **解析:** 因为 $f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ -2, & 1<x\leqslant 2,\end{cases}$

所以 $f(x+3)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x+3\leqslant 1,\\ -2, & 1<x+3\leqslant 2\end{cases}=\begin{cases}1, & -3\leqslant x\leqslant -2,\\ -2, & -2<x\leqslant -1.\end{cases}$

故函数 $f(x+3)$ 的定义域为 $[-3,-1]$.

11. **解析:** $f[g(x)]=\dfrac{1}{g(x)-1}=\dfrac{1}{\sqrt{x+2}-1}$；

$$g[f(x)]=\sqrt{f(x)+2}=\sqrt{\frac{1}{x-1}+2}=\sqrt{\frac{2x-1}{x-1}}.$$

12. **解析**:(1)由 $y=1+\ln(x+2)$,得 $x=e^{y-1}-2$,交换变量 x,y,得 $y=e^{x-1}-2$,因此 $y=e^{x-1}-2$ 是 $y=1+\ln(x+2)$ 的反函数.

(2)由 $y=3^{2x+5}$,得 $x=\frac{1}{2}\log_3 y-\frac{5}{2}$,交换变量 x,y,得 $y=\frac{1}{2}\log_3 x-\frac{5}{2}$,因此 $y=\frac{1}{2}\log_3 x-\frac{5}{2}$ 是 $y=3^{2x+5}$ 的反函数.

第二节　极　限

1. B　**解析**:$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$.

2. D　**解析**:$\lim\limits_{x\to1}\frac{x\sqrt{x}-x}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x}{\sqrt{x}+1}=\frac{\lim\limits_{x\to1}x}{\lim\limits_{x\to1}\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}$.

3. C　**解析**:因为当 $x\to0$ 时,$\tan x\sim x$,$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$,$\sqrt{1+x}-1\sim\frac{1}{2}x$,所以$\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2-x}{\tan x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2-x}{x}=\lim\limits_{x\to0}(x-1)=-1$;$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\tan x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{2}=0$;$\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2+\sin x}{\tan x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2+\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\left(x+\frac{\sin x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0}x+\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=0+1=1$;$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\tan x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}$.故当 $x\to0$ 时,$x^2+\sin x$ 与 $\tan x$ 是等价无穷小.

4. C　**解析**:因为当 $x\to0$ 时,$\tan 3x\sim3x$,所以$\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan 3x}{x\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{3x}{x\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{3}{\cos x}=3$.

5. B　**解析**:当 $x\to0$ 时,x 是无穷小量,$\sin x$ 是有界量,所以$\lim\limits_{x\to0}x\sin x=0$,A 项错误;$\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2-1}{3x^2-x-1}=\frac{\lim\limits_{x\to0}(x^2-1)}{\lim\limits_{x\to0}(3x^2-x-1)}=\frac{-1}{-1}=1$,B 项正确;$\lim\limits_{x\to0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=1$,C 项错误;$\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$,$\lim\limits_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$,D 项错误.

6. C　**解析**:$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{2x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(-\frac{1}{x}\right)\cdot2x\right]}=e^{-2}$,A 项错误;$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-x}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}=e^{-1}$,B 项错误;$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{1-x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(-\frac{1}{x}\right)(1-x)\right]}=e$,C 项正确;$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-2x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{1}{x}(-2x)\right]}=e^{-2}$,D 项错误.

7. A　**解析**:A 项,令 $t=\frac{1}{x}$,则$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=\lim\limits_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=1$,A 项正确;B 项,$x\to0$ 时,x 是无穷小,$\sin\frac{1}{x}$ 是有界量,所以$\lim\limits_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}=0$,B 项错误;C 项,令 $t=\frac{1}{x}$,则$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=\lim\limits_{t\to0}t\sin\frac{1}{t}=0$,C 项错误;D 项,利用等价无穷小,$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{2}=0$,D 项错误.

8. $\frac{1}{8}$　**解析:** 因为当 $x\to0$ 时,$1-\cos\frac{x}{2}\sim\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2$,所以原式$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2x^2}=\frac{1}{8}$.

9. $e^{-\frac{3}{2}}$　**解析:** 方法一:令 $t=-\frac{2}{x}$,则当 $x\to0$ 时,$t\to\infty$,从而 $\lim\limits_{x\to0}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{\frac{3}{x}}=\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-\frac{3}{2}t}=\lim\limits_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^{-\frac{3}{2}}=e^{-\frac{3}{2}}$.

方法二:$\lim\limits_{x\to0}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{\frac{3}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\left(-\frac{x}{2}\cdot\frac{3}{x}\right)}=e^{-\frac{3}{2}}$.

10. 1　**解析:** 因为 $x=0$ 是函数的分段点,当 x 从 0 左右两侧趋近于 0 时,$f(x)$ 的表达式不一样,须考查左右极限. $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(x^2+1)=1$, $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(1-x)=1$,所以 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$.

11. **解析:** (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}=0$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n+1}{n^2+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}=3$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{1}{2}$.

(4) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2+4+6+\cdots+2n}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$.

12. **解析:** (1)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{x\sin x}{\sqrt{1+x^2}-1}&=\lim_{x\to0}\frac{x^2(\sqrt{1+x^2}+1)}{(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+x^2}+1)}\\&=\lim_{x\to0}\frac{x^2(\sqrt{1+x^2}+1)}{x^2}\\&=\lim_{x\to0}(\sqrt{1+x^2}+1)\\&=2.\end{aligned}$$

(2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{x\to0}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{x\to0}(\sqrt{x}+1)=1$.

(3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3}\cdot\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{2}$.

(4) $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{x}{\sqrt{1-\cos 2x}}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{x}{\sqrt{\frac{1}{2}(2x)^2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x}=\dfrac{e^{-1}}{e}=\dfrac{1}{e^2}$.

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\ln\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=1$.

13. **解析:** 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1-a)n^2-(a+b)n-b+1}{n+1}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-a)n-(a+b)-\dfrac{b-1}{n}}{1+\dfrac{1}{n}}$$

$$=1,$$

故 $1-a=0$,且 $-(a+b)=1$,所以 $a=1,b=-2$.

第三节 连　　续

1. A　**解析:** 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续,则函数 $f(x)$ 在点 x_0 的极限存在,且极限值等于函数值.

2. C　**解析:** 因为函数 $f(x)$ 为连续函数,所以 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$,即得 $a=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin bx}{x}=b$.

3. C　**解析:** 因为函数 $f(x)$ 为连续函数,所以 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)$. 又 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\ln(1-3x)}{bx}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{-3x}{bx}=-\dfrac{3}{b}$, $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin ax}{x}=a$, $f(0)=2$,所以 $a=2,b=-\dfrac{3}{2}$.

4. D　**解析:** 因为函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,所以 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$,从而 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=f(0)$,即 $\lim\limits_{x\to0^-}(a+e^x)=a+1$,于是 $a+1=\lim\limits_{x\to0^+}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\left(2x\cdot\frac{1}{x}\right)}=e^2$,于是 $a=e^2-1$.

5. B　**解析:** 因为 $\dfrac{x^2-4}{x^2-6x+8}=\dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-4)}$,所以函数 $y=\dfrac{x^2-4}{x^2-6x+8}$ 的间断点为 $x=2$ 和 $x=4$. 又 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{x^2-6x+8}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-4)}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x+2}{x-4}=-2$, $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-4}{x^2-6x+8}=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-4)}=\infty$,所以 $x=2$ 是函数 $y=\dfrac{x^2-4}{x^2-6x+8}$ 的可去间断点,$x=4$ 是函数 $y=\dfrac{x^2-4}{x^2-6x+8}$ 的第二类间断点.

6. C　**解析:** 函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处没有意义,所以 $x=0$ 是 $f(x)$ 的间断点. 因为 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}=\dfrac{2+\lim\limits_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}}}{1+\lim\limits_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}}}=\dfrac{2+0}{1+0}=2$, $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2e^{-\frac{1}{x}}+1}{e^{-\frac{1}{x}}+1}=$