中等职业学校公共基础课程辅导用书

数学

同步提升与练习

（拓展模块1•下）

主编　华腾新思职教高考研究中心

哈爾濱工程大學出版社
Harbin Engineering University Press

中等职业学校公共基础课程辅导用书
数学同步提升与练习（拓展模块1•下）
主编　华腾新思职教高考研究中心
哈爾濱工程大學出版社
Harbin Engineering University Press

数学
同步提升与练习
（拓展模块1•下）

选题策划：苏　莉　王晓军
责任编辑：张佳凯
封面设计：刘文东

ISBN 978-7-5661-4952-7

定价：29.90元

中等职业学校公共基础课程辅导用书

数学

同步提升与练习

（拓展模块1·下）

主编　华腾新思职教高考研究中心

哈爾濱工程大學出版社
Harbin Engineering University Press

内容简介

本书按照教材《数学 拓展模块一》的章节顺序进行编写。“知识脉络”模块对本章知识点进行了总结。“学习目标”模块参照考试大纲，使学生对知识要点的掌握程度有一个初步了解。“知识梳理”模块通过预习，培养学生的阅读能力、理解能力及总结能力。“典型例题”模块对经典例题进行详细讲解，使学生能更好地掌握课本知识。“巩固练习”模块分为基础巩固和能力提升两部分，使学生通过自我检测做到及时查缺补漏，确保当堂内容当堂清。每章后配有章节测试题，既能强化学生对相应章节知识之间关系的认识，又能培养学生解决综合问题的能力，从而提升学生的数学思维及解题技巧。

本书既可作为广大中等职业学校学生的学习用书，也可作为教师教学的参考资料。

图书在版编目（CIP）数据

数学同步提升与练习 ：拓展模块 1. 下 / 华腾新思职教高考研究中心主编. -- 哈尔滨 ：哈尔滨工程大学出版社，2025. 9. -- ISBN 978-7-5661-4952-7

Ⅰ. G634. 603

中国国家版本馆 CIP 数据核字第 2025QJ2969 号

数学同步提升与练习（拓展模块 1·下）

SHUXUE TONGBU TISHENG YU LIANXI（TUOZHAN MOKUAI 1·XIA）

选题策划 苏 莉 王晓军
责任编辑 张佳凯
封面设计 刘文东

出版发行 哈尔滨工程大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区南通大街 145 号
邮政编码 150001
电　　话 0451-82519989
经　　销 新华书店
印　　刷 三河市骏杰印刷有限公司
开　　本 880 mm×1 230 mm 1/16
印　　张 8.5
字　　数 161 千字
版　　次 2025 年 9 月第 1 版
印　　次 2025 年 9 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5661-4952-7
定　　价 29.90 元

http://www.hrbeupress.com
E-mail:heupress@hrbeu.edu.cn

前言

PREFACE

职业教育是培养技术技能人才，促进就业创业创新，推动中国制造和服务上水平提升的重要基础。而中等职业教育的基础地位，既是国家经济发展的需要，也是维护社会稳定的需要。这就要求中等职业学校必须与时俱进，不断进行教育教学改革。本书以深化学校教育教学改革、提高课堂教学实效性为目标，以《中等职业学校数学课程标准》(2020 年版)为基础，充分落实学生的主体地位，从而激发学生的自信，挖掘学生的潜力。

本书是与中等职业教育课程改革规划新教材《数学 拓展模块一》相配套的学生辅导用书，主要包含以下模块：

知识脉络——对本章知识点进行了总结。

学习目标——参考考试大纲，使学生对知识要点的掌握程度有一个初步了解。

知识梳理——通过预习，培养学生的阅读能力、理解能力及总结能力。

典型例题——对经典例题进行详细讲解，使学生能更好地掌握课本知识。

巩固练习——分为基础巩固和能力提升两部分，通过自我检测，使学生做到及时查缺补漏，确保当堂内容当堂清。

章节测试题——通过章节测试，既能强化学生对相应章节知识之间关系的认识，又能培养学生解决综合问题的能力，培养学生的数学思维和解题技巧。

由于编者学术水平有限，书中难免存在不足之处，敬请读者提出宝贵的意见和建议。

编　者

目录

CONTENTS

第五章

立体几何

知识脉络

- 立体几何
  - 平面的基本性质
  - 空间中两条直线的位置关系
  - 直线与平面的位置关系
    - 直线与平面平行
    - 直线与平面垂直
    - 直线与平面所成的角
  - 平面与平面的位置关系
    - 平面与平面平行
    - 平面与平面垂直

5.1　平面的基本性质

学习目标

1. 了解平面的概念.
2. 了解空间中点、线、面位置关系的符号表示.
3. 理解平面性质的三个公理.

知识梳理

1. 平面的概念：数学中的平面是指平坦、光滑并且可以__________延展的图形.

2. 平面的图形表示：一般用__________表示平面，有时也用三角形、梯形、圆等图形表示平面.

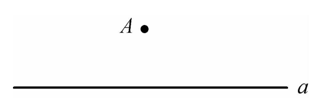
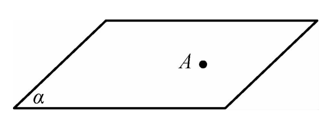
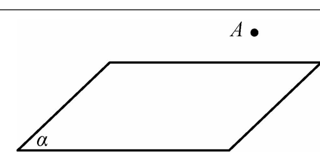
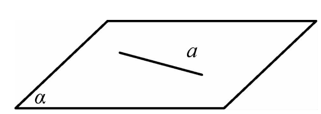
3. 平面的符号表示

（1）用__________希腊字母 $\alpha,\beta,\gamma,\cdots$表示不同的平面；

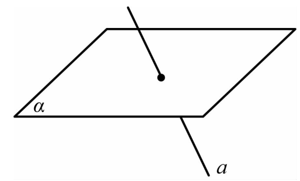
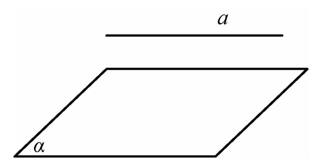
（2）用平行四边形的四个顶点的__________表示平面，如平面 $ABCD$；

（3）用平行四边形的两个__________顶点的字母表示平面，如平面 AC 或平面 BD.

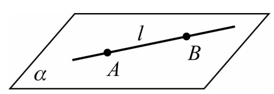
4. 点、线、面的位置关系：直线与平面都可以看作点的集合.

文字语言	符号表示	图形表示
点 A 在直线 a 上	A __________ a	
点 A 不在直线 a 上	A __________ a	
点 A 在平面 α 内	A __________ α	
点 A 不在平面 α 内	A __________ α	
直线 a 在平面 α 内	a __________ α	

续表

文字语言	符号表示	图形表示
直线 a 不在平面 α 内	a __________ α	
		

5. 公理 1：如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线上的__________都在这个平面内(如下图所示).



6. 公理 2：经过不在同一条直线上的三点，有且只有一个__________.

该公理可以简单表述为“不共线的三点确定一个平面”.

如果直线 l 上的所有点都在平面 α 内，就说直线 l 在平面 α 内，或者说平面 α 经过直线 l，否则就说直线在平面 α 外.

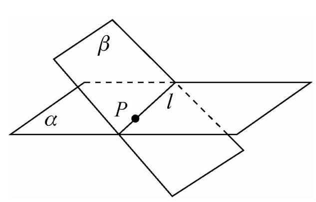
7. 推论.

(1)推论 1：经过一条直线和这条直线__________一点，有且只有一个平面；

(2)推论 2：经过两条__________直线，有且只有一个平面；

(3)推论 3：经过两条__________直线，有且只有一个平面.

8. 公理 3：如果两个不重合的平面有一个公共点，那么它们有且只有一条过这个点的__________.



若两个平面有一条公共直线，则称这两个平面相交，这条公共直线叫作这两个平面的交线.

(答案在本节末尾)

典型例题

例 1　判断下列说法是否正确.

(1)一个平面的面积为 20 cm^2；

(2)平面是没有边界的;

(3)平面有厚薄之分.

解 (1)说平面有边界,(2)说平面没有边界,(3)说平面有厚薄之分.

所以(1)错;(2)对;(3)错.

点拨 平面是从现实世界抽象出来的几何概念.平面没有厚薄之分,是无限延展的.也就是说,它是没有边界,没有厚薄之分的,我们用平行四边形仅仅表示了平面的一部分.

例2 判断下列说法是否正确.

(1)点 A 在平面 α 内,记作 $A\subset\alpha$;

(2)直线 l 在平面 α 内,记作 $l\in\alpha$;

(3)平面 α 与平面 β 相交,记作 $\alpha\cap\beta$;

(4)直线 l 不在平面 α 内,记作 $l\not\subset\alpha$.

解 (1)点 A 在平面 α 内,记作 $A\in\alpha$;(2)直线 l 在平面 α 内,记作 $l\subset\alpha$;(3)平面 α 与平面 β 相交,记作 $\alpha\cap\beta$;(4)直线 l 不在平面 α 内,记作 $l\not\subset\alpha$.根据分析可知,(1)错;(2)错;(3)对;(4)对.

点拨 把直线、平面看成是点的集合,点与直线的关系是元素与集合的关系,包括属于和不属于两种关系,直线与平面的关系是集合与集合的关系.

例3 在空间中,下列说法中不正确的是(　　).

A. 若三条直线相交于一点,则这三条直线共面

B. 四条平行直线最多可以确定六个平面

C. 两条平行直线确定一个平面

D. 若两个平面有一个公共点,则它们有无数个公共点

解析 两条相交直线确定一个平面,但第三条直线不一定在这个平面内.故选 A.

点拨 本题考查了共面的条件.

例4 已知$\triangle ABC$的三个顶点都在平面 α 外,分别延长 AB,BC,AC 交平面 α 于 P,Q,R 三点.求证:P,Q,R 三点共线.

证明 因为点 $A\in$平面 ABC,点 $B\in$平面 ABC,点 $C\in$平面 ABC,

所以直线 $AB\subset$平面 ABC,直线 $BC\subset$平面 ABC,直线 $AC\subset$平面 ABC.

因为点 $P\in$直线 AB,点 $Q\in$直线 BC,点 $R\in$直线 AC,

所以点 P,Q,$R\in$平面 ABC.

又因为点 P,Q,$R\in$平面 α,

所以点 P,Q,R 在平面 ABC 与平面 α 的交线上.

所以 P,Q,R 三点共线.

点拨 如果直线 l 上的两个点都在平面 α 内,那么直线 l 上的所有点都在平面 α 内;如果两个不重合的平面有一个公共点,那么它们一定还有其他的公共点,并且所有公共点的集合是

过这个点的一条直线.

例 5　一条直线与三条平行直线都相交,求证:这四条直线共面.

证明　设直线 $a /\!/ b /\!/ c$ 且 l 与 a,b,c 均相交.

证法一:因为 $a /\!/ b$,所以 a,b 确定一个平面 α.

因为 $l \cap a=A$,$l \cap b=B$,所以 $A \in \alpha$,$B \in \alpha$,故 $l \subset \alpha$.

又因为 $a /\!/ c$,所以 a,c 确定一个平面 β,同理可证 $l \subset \beta$.

所以 $\alpha \cap \beta=a$ 且 $\alpha \cap \beta=l$.

因为过两条相交直线 a,l 有且只有一个平面,故 α 与 β 重合,

即直线 a,b,c,l 共面.

证法二:由证法一得 a,b,l 共面 α,也就是说 b 在 a,l 确定的平面 α 内.

同理可证 c 在 a,l 确定的平面 α 内.

因为过 a 和 l 只能确定一个平面,

所以 a,b,c,l 共面.

巩固练习

基础巩固

一、选择题

1. 平行四边形 $ABCD$ 表示平面时,下列不能表示该平面的是　(　　)

A. 平面 $ABCD$　　B. 平面 AC

C. 平面 BD　　D. 平面 AB

2. 下列说法中,正确的是　(　　)

A. 一个平面的面积为 100 cm^2　　B. 平面是矩形或平行四边形形状的

C. 平面是有边界的　　D. 平面没有厚薄之分

3. 点 A 在直线 l 上用符号表示为　(　　)

A. $A \in l$　　B. $A \notin l$

C. $A \subset l$　　D. $A \not\subset l$

4. 点 A 在直线 l 上,直线 l 在平面 α 内,可记为　(　　)

A. $A \subset l \subset \alpha$　　B. $A \in l \subset \alpha$

C. $A \in l \in \alpha$　　D. $A \subset l \in \alpha$

5. 下列现象利用了平面的公理 1 的是　(　　)

A. 若点 A 与点 B 都在平面 α 内,则直线 AB 在平面 α 内

B. 两个合页和一把锁可以把门固定

C. 自行车有的有一个撑脚,有的有两个撑脚

D. 用丝带交叉捆礼品盒

6. 两个平面相交,则它们有 ( )

A. 零个公共点　　B. 一个公共点

C. 两个公共点　　D. 无数个公共点

7. 下列条件可以确定一个平面的是 ( )

A. 三点　　B. 两条直线

C. 一条直线与一个点　　D. 两条相交直线

8. 三条两两平行的直线最多可以确定几个平面. ( )

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

二、填空题

9. 点 A 在平面 α 内,用符号表示为__________.

10. 点 B 在平面 α 外,用符号表示为__________.

11. 直线 l 在平面 α 内,用符号表示为__________.

12. 直线 l 不在平面 α 内,用符号表示为__________.

13. 若 $A\in\alpha$,$B\in\alpha$,则直线 AB __________ α.

14. 若 $A\in\alpha$,$B\in\alpha$,且 $A\in\beta$,$B\in\beta$,则 $\alpha\cap\beta=$__________.

15. ____________________的三点确定一个平面.

16. 两条__________直线或两条__________直线,可以确定一个平面.

17. 直线与__________一点,可以确定一个平面.

18. 一个平面把空间分为__________个部分,两个平面把空间分为__________个部分.

三、解答题

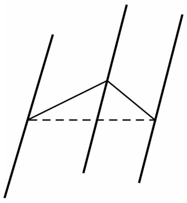
19. 判断下列说法是否正确,并说明理由.

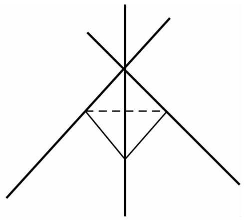
(1)平面 α 只能用平行四边形表示;

(2)圆和平面多边形都可以表示平面;

(3)两个平面重叠在一起比一个平面厚.

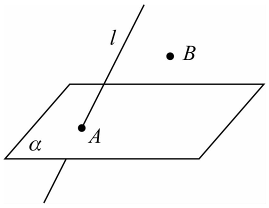
20. 如图所示，三条直线两两平行且不共面，每两条确定一个平面，一共可以确定几个平面？如果三条直线相交于一点，它们最多可以确定几个平面？





能 力 提 升

1. 用数学语言描述下图中点、线、面的位置关系.



A ________ l，B ________ l，A ________ α，B ________ α，l ________ α.

2. 不共面的 4 个点中，能否有 3 个点共线？为什么？

知识梳理答案

1. 无限　2. 平行四边形　3. (1)小写　(2)字母　(3)对角

4. $\in$　$\notin$　$\in$　$\notin$　$\subset$　$\not\subset$

5. 所有点　6. 平面　7. (1)外　(2)相交　(3)平行　8. 公共直线

5.2 空间中两条直线的位置关系

学习目标

1. 理解空间中直线与直线的位置关系.
2. 理解异面直线的定义及判定方法.
3. 了解异面直线所成的角的概念.
4. 理解异面直线垂直的判定方法.

知识梳理

1. 空间直线的位置关系

(1)共面直线：在__________平面内的两条直线叫作共面直线，平行或相交的两条直线都是共面直线.

(2)异面直线：不同在__________一个平面内的两条直线叫作异面直线.

画异面直线时，为了显示它们不共面的特点，通常用一个平面或两个平面来衬托.

2. 公理4(平行线的传递性)：平行于同一条直线的两条直线__________.

符号表示：若 $a/\!/b$，$b/\!/c$，则 $a/\!/c$.

3. 异面直线判定定理：与一个平面相交于一点的直线和这个平面内__________交点的直线是异面直线.

4. 两条直线所成的角

(1)相交直线的夹角：两条相交直线的夹角是这两条直线相交所成的__________的正角.

(2)两条直线垂直：当两条直线所成的角为__________时，称这两条直线垂直.

(3)异面直线所成的角：经过空间中任意一点，作与两条异面直线平行的直线，这两条直线的夹角称为两条异面直线所成的角.

规定：两条平行直线所成的角为0. 因此，两条共面直线所成角的取值范围是 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，两条异面直线所成角的取值范围是__________.

5. 求两条异面直线所成角的步骤

(1)找(找平行线).

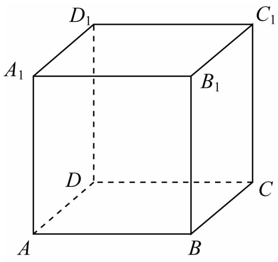
(2)证(证明所找的角为两条异面直线所成的角).

(3)算(在某个三角形中算).

(答案在本节末尾)

典型例题

例 1　观察右图的正方体,找出符合下列条件的所有直线.



(1)与 AB 平行的直线有__________;

(2)与 AB 相交的直线有__________;

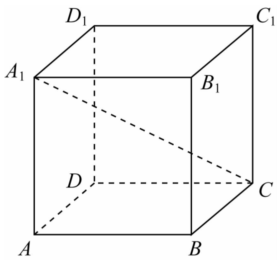
(3)与 AB 异面的直线有__________.

解析　(1)CD,A_1B_1,C_1D_1.

(2)AD,BC,AA_1,BB_1.

(3)A_1D_1,B_1C_1,DD_1,CC_1.

例 2　如图所示,在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,连接 A_1C.求下列各对直线的夹角的大小.

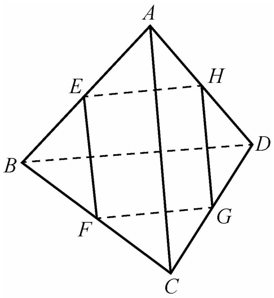


AB 与 DC　__________;　　AB 与 D_1C_1　__________;

AB 与 BB_1　__________;　　AB 与 AD　__________.

解析　$0°$;$0°$;$90°$;$90°$.

例 3　如图所示的四面体 $ABCD$ 中,E,F,G,H 分别是 AB,BC,CD,DA 的中点,求证:四边形 $EFGH$ 是平行四边形.



证明　因为 E,F 分别为 AB,BC 的中点,

所以 $EF /\!/ AC$ 且 $EF=\frac{1}{2}AC$.

又因为 G,H 分别为 CD,DA 的中点，

所以 $GH /\!/ AC$ 且 $GH=\frac{1}{2}AC$.

所以 EF 与 GH 平行且相等.

所以四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

点拨　在证明线线平行时往往借助三角形的中位线平行且等于底边的一半.

巩固练习

基 础 巩 固

一、选择题

1. 如果直线 m 与 n 没有公共点，那么 m 与 n 的位置关系是　（　　）

A. 平行　　B. 相交　　C. 异面　　D. 平行或异面

2. 设 BB_1 是长方体的一条棱，则长方体中与 BB_1 平行的棱有　（　　）

A. 1 条　　B. 2 条　　C. 3 条　　D. 4 条

3. 若 $m /\!/ n$，l 与 m 是异面直线，则 l 与 n 的位置关系是　（　　）

A. 平行　　B. 相交　　C. 异面　　D. 相交或异面

4. 两条异面直线所成的角的取值范围是　（　　）

A. $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$　　B. $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$　　C. $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$　　D. $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

5. 若直线 m,n 与直线 l 相交所成的角相等，则直线 m,n 的位置关系是　（　　）

A. 平行　　B. 相交　　C. 异面　　D. 不确定

6. 和两条异面直线都垂直的直线有　（　　）

A. 1 条　　B. 2 条　　C. 3 条　　D. 无数条

7. 如果空间中两条直线垂直，那么它们一定　（　　）

A. 平行　　B. 相交　　C. 异面　　D. 不平行

二、填空题

8. 直线 a,b 确定了一个平面，则 a,b 的位置关系是__________.

9. 若直线 $a /\!/ b$，$b /\!/ c$，则 a __________ c.

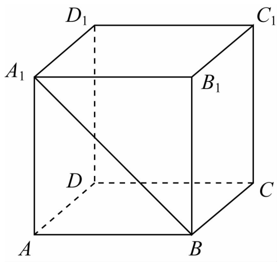
10. 在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，A_1C_1 与 AB 的夹角为__________，AB 与 DD_1 的夹角为__________.

三、解答题

11. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，求 AC 与 AC_1 所成角的正弦值.

能力提升

如图所示，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，与 AB 异面的棱有__________，A_1B 与 CD 的夹角为__________.



知识梳理答案

1.(1)同一个　(2)任何　2.互相平行　3.不经过

4.(1)最小　(2)直角　(3)$\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$

5.3 直线与平面的位置关系

5.3.1 直线与平面平行

学习目标

1. 理解空间中直线与平面的位置关系.
2. 理解直线与平面平行的判定定理和性质定理.

知识梳理

1. 直线与平面的位置关系

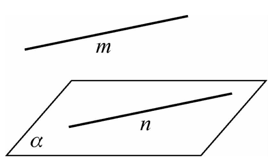
(1)如果一条直线与平面有无数个公共点,那么称这条直线在这个__________;

(2)如果一条直线与平面只有一个公共点,那么称这条直线与这个平面__________;

(3)如果一条直线与平面没有公共点,那么称这条直线与这个平面__________.

注:直线与平面相交或平行统称为直线在平面外.

2. 直线与平面平行的判定定理:如果平面外的一条直线与此平面内的一条直线平行,那么这条直线与这个平面__________.

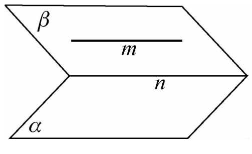


符号表示:若 $m\not\subset\alpha$,$n\subset\alpha$,且 $m/\!/n$,则 $m/\!/\alpha$.

根据这个判定方法,为了证明一条直线和一个平面平行,只要在这个平面内找出一条直线和这条直线平行就可以了.

3. 直线与平面平行的性质定理:如果一条直线和一个平面平行,且经过这条直线的平面和这个平面相交,那么这条直线就和两平面的交线__________.

符号表示:若 $m/\!/\alpha$,$m\subset\beta$,且 $\alpha\cap\beta=n$,则 $m/\!/n$.

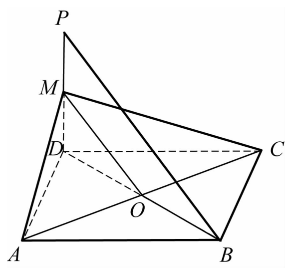


（答案在本节末尾）

典型例题

例 1　如图所示,已知点 P 为平行四边形 $ABCD$ 外的一点,点 M 是 PD 的中点,平行四边形 $ABCD$ 的对角线 AC,BD 相交于点 O.

求证:直线 PB∥平面 MAC.



证明　连接 MO.

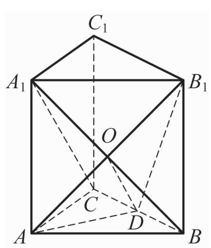
在△PBD 中,因为点 M 是 PD 的中点,点 O 是 BD 的中点,所以 MO 是△PBD 的中位线,则 MO∥PB.

又因为直线 MO 在平面 MAC 内,PB 不在平面 MAC 内,所以直线 PB∥平面 MAC.

点拨　要想证得直线 PB 与平面 MAC 平行,首先要证得直线 PB 与平面 MAC 内的一条直线平行. 观察图形,需要作出辅助线,即连接 MO,然后可进行求证.

例 2　如图所示,在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,D 为 BC 的中点.

求证:A_1C∥平面 AB_1D.



证明　连接 A_1B 交 AB_1 于点 O,连接 OD.

在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,侧面 ABB_1A_1 为平行四边形,则 O 为 A_1B 的中点.

又因为 D 为 BC 的中点,

所以 OD∥A_1C.

又 $OD\subset$平面 AB_1D,$A_1C\not\subset$平面 AB_1D,

所以 A_1C∥平面 AB_1D.

点拨　要证线面平行,先证明线线平行,要学会借助中位线证明线线平行.

巩固练习

基础巩固

一、选择题

1. 下列命题中,正确的是 ( )

A. 若直线 m 不在平面 α 内,则 $m /\!/ \alpha$

B. 若直线 $m /\!/$ 平面 α,则 m 平行于平面 α 内无数条直线

C. 若直线 $m /\!/$ 平面 α,则平面 α 内只有一条直线与 m 平行

D. 若直线 $m /\!/ n$,则 m 平行于经过 n 的所有平面

2. 下列命题中,不正确的是 ( )

A. 若直线 m 上有两个点在平面 α 内,则 m 在平面 α 内

B. 若直线 m 上有一个点在平面 α 外,则 m 不在平面 α 内

C. 若直线 m 不在平面 α 内,则 m 与平面 α 至少有一个公共点

D. 若直线 m 不在平面 α 内,则 m 与平面 α 最多有一个公共点

3. 过直线外一点,与已知直线平行的平面有 ( )

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 无数个

二、填空题

4. 若直线 l 与平面 α 内的一条直线平行,则 l 与 α 的位置关系是__________.

5. 在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,与直线 AB 平行的平面有__________个.

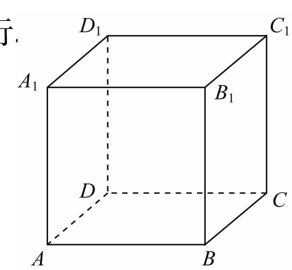
6. 下列说法中,正确的有__________.

①若平面 α 外的一条直线 a 与平面 α 内的无数条直线平行,则直线 a 与平面 α 平行;

②已知平面 α 外的两条平行直线 a,b,若 $a /\!/ \alpha$,则 $b /\!/ \alpha$;

③若直线 a 和平面 α 平行,则直线 a 平行于平面 α 内任意一条直线;

④若直线 a 和平面 α 平行,则平面 α 中必定存在直线与直线 a 平行.



7. 观察右图正方体,找出符合下列条件的所有直线或平面.

(1)与 AB 相交的平面有__________;

(2)与平面 $ABCD$ 平行的直线有__________;

(3)与平面 $ABCD$ 相交的直线有__________;

(4)经过直线 AB 的平面(即直线 AB 在该平面内)有__________.

三、解答题

8. 判断下列命题是否正确.

(1)若直线 $m /\!/$ 平面 α,则 m 平行于 α 内的所有直线;

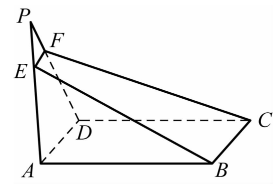
(2)若直线 $m /\!/$ 平面 α,则 m 平行于 α 内的无数条直线;

(3)若直线 m 平行于平面 α 内的无数条直线，则 $m /\!/ \alpha$；

(4)若 $m /\!/ n, n /\!/ \alpha$，则 $m /\!/ \alpha$.

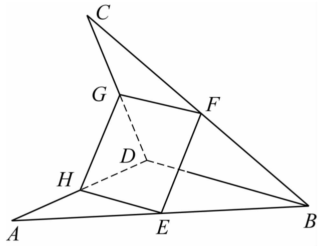
9.如图所示，四边形 $ABCD$ 是矩形，P 是平面 $ABCD$ 外一点，过 BC 作平面 $BCFE$ 交 AP 于点 E，交 DP 于点 F.

求证：四边形 $BCFE$ 是梯形.



能力提升

如图所示，空间四边形 $ABCD$ 四边 AB, BC, CD, AD 的中点依次为 E, F, G, H. 证明：$BD /\!/$ 平面 $EFGH$.



知识梳理答案

1.(1)平面内　(2)相交　(3)平行　2.平行　3.平行

5.3.2 直线与平面垂直

学习目标

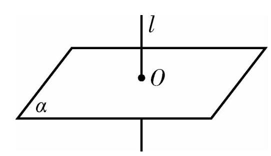
理解直线与平面垂直的判定定理和性质定理.

知识梳理

1. 如果一条直线和一个平面内的__________一条直线都垂直,那么就说这条直线和这个平面垂直. 这条直线称为平面的垂线,这个平面称为直线的垂面,直线与平面的交点称为垂足. 垂线上任意一点到垂足之间的线段称为这个点到这个平面的__________,垂线段的__________称为这个点到这个平面的距离.

注:过一点有且只有一条直线与已知平面垂直,过一点有且只有一个平面与已知直线垂直.

2. 画直线和平面垂直时,通常把直线画成和表示平面的平行四边形的一边__________,如图所示. 图中,直线 l 与平面 α 互相垂直,记作 $l\perp\alpha$,垂足为 O.



3. 直线与平面垂直的判定定理:如果一条直线与一个平面内的两条__________垂直,那么这条直线与这个平面垂直.

4. 直线与平面垂直的性质定理:如果两条直线都垂直于一个平面,那么这两条直线__________.

5. 由一条直线和一个平面垂直可得出如下结论.

(1)如果一条直线垂直于一个平面,那么它和平面内的__________一条直线都垂直.

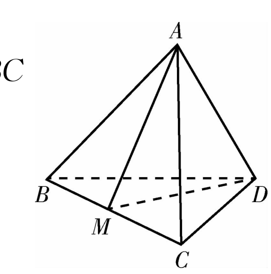
(2)如果两条平行直线中有一条直线垂直于一个平面,那么另一条直线也__________于这个平面.

6. 如果一条直线和一个平面平行,那么这条直线上任意一点到这个平面的距离都是相等的,这个距离称为__________.

(答案在本节末尾)

典型例题

例 1 如图所示,已知四面体 $ABCD$,$AB=AC$,$DB=DC$,点 M 为 BC 的中点.



求证:$BC\perp$平面 AMD.

证明 $\because AB=AC,DB=DC,M$ 为 BC 的中点,

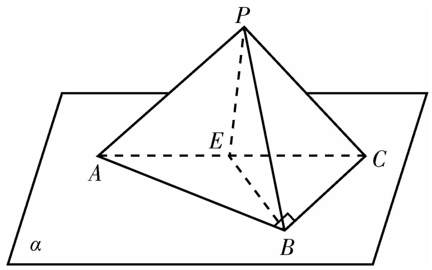
$\therefore AM \perp BC, DM \perp BC.$

又$\because AM \cap DM = M$,

$\therefore BC \perp$平面 AMD.

例 2 如图所示,已知在平面α内的直角$\triangle ABC$中,点E是其斜边AC的中点,点P为平面α外一点,且$PA=PB=PC$.

求证:$PE \perp \alpha$.



证明 连接EB.

因为$PA=PC$,点E为直角$\triangle ABC$的斜边AC的中点,所以$PE \perp AC$,$EB=\dfrac{1}{2}AC=EC$.

又因为$PB=PC$,所以$\triangle PEB \cong \triangle PEC$,则$\angle PEB=\angle PEC=90^\circ$,即$PE \perp EB$.

因为$EB \subset \alpha$,$EC \subset \alpha$,EB与EC相交于点E,所以$PE \perp \alpha$.

巩固练习

基础巩固

一、选择题

1. 空间内垂直于同一平面的两条直线 ( )

A. 平行 B. 相交 C. 异面 D. 平行、相交或异面

2. 下列不能判断直线l与平面α垂直的是 ( )

A. 直线l与平面α内的所有直线都垂直

B. 直线l与平面α内的任意直线都垂直

C. 直线l与平面α内的两条相交直线都垂直

D. 直线l与平面α内的无数条直线都垂直

3. 如果直线l与平面α内的两条相交直线都垂直,那么直线l与平面α的位置关系是 ( )

A. 平行 B. 垂直 C. 斜交 D. 直线在平面内

4. 垂直于三角形两边的直线与三角形所在平面的位置关系是 ( )

A. 平行 B. 垂直 C. 斜交 D. 直线在平面内

5. 已知直线 PA 垂直于矩形 $ABCD$ 所在的平面，下列结论不正确的是 ( )

A. $PA\perp BC$ B. $PA\perp CD$ C. $PD\perp BD$ D. $PD\perp CD$

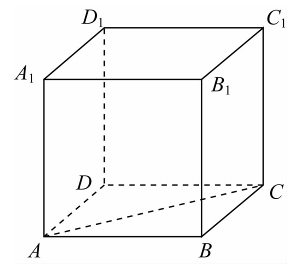
二、填空题

6. 过空间内不在直线 l 上的一点，与直线 l 垂直的直线有__________条.

7. 过空间内不在直线 l 上的一点，与直线 l 垂直的平面有__________个.

8. 垂直于同一个平面的两条直线__________.

9. 如图所示，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，找出符合下列条件的所有直线或平面.



(1)与 AB 垂直的直线有__________;

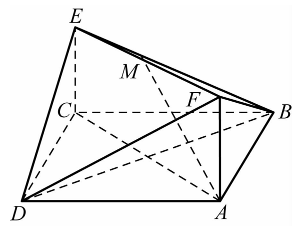
(2)与 AC 垂直的直线有__________;

(3)与 AB 垂直的平面有__________.

三、解答题

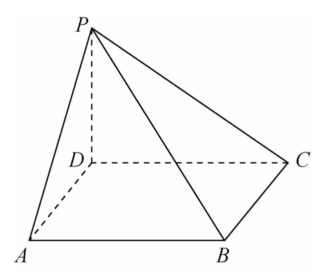
10. 如图所示，已知正方形 $ABCD$ 和矩形 $ACEF$ 所在的平面互相垂直，$AB=\sqrt{2}$，$AF=1$，M 是线段 EF 的中点.

求证：$AM\perp$平面 BDF.



能 力 提 升

如图所示，四边形 $ABCD$ 是正方形，$PD\perp$平面 $ABCD$，连接 PA，PB，PC. 请写出图中所有的直角三角形，并说明理由.



知识梳理答案

1. 任意 垂线段 长度 2. 垂直 3. 相交直线 4. 平行

5. (1)任意 (2)垂直 6. 这条直线到这个平面的距离

5.3.3 直线与平面所成的角

学习目标

了解直线与平面所成的角的概念.

知识梳理

1. 直线与平面斜交的概念:如果直线 l 与平面 α 相交但不垂直,则称直线 l 与平面 α 斜交,直线 l 称为平面 α 的__________,斜线 l 与平面 α 的交点称为__________.

2. 斜线在平面内的射影:设直线 PB 是平面 α 的斜线,斜足为 B,过点 P 作平面 α 的__________ PA,垂足为 A,则过垂足 A 和斜足 B 的直线 AB 称为斜线 PB 在平面 α 内的__________.

3. 直线与平面所成的角

(1)当直线与平面平行时,直线与平面所成的角是__________;

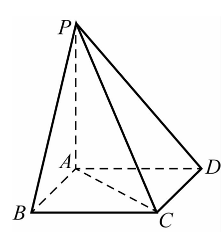
(2)当直线与平面垂直时,直线与平面所成的角是__________;

(3)当直线与平面相交但不垂直时,斜线与斜线在平面内的射影所成的__________,称为直线与平面所成的角.

(答案在本节末尾)

典型例题

例 1 如图所示,在四棱锥 P-$ABCD$ 中,$PA\perp$平面 $ABCD$,四边形 $ABCD$ 是正方形,$PA=\sqrt{2}AB$,则直线 PC 与平面 $ABCD$ 所成角的大小为 ( )



A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°

解析 连接 AC,因为 $PA\perp$平面 $ABCD$,所以 $PA\perp AC$. 在直角三角形 PAC 中,$PA=\sqrt{2}AB$,$AC=\sqrt{2}AB$,即 $PA=AC$,所以$\angle PCA=45^\circ$. 故选 B.

例 2 在正方体 $ABCD$ - $A_1B_1C_1D_1$ 中,直线 BD_1 与平面 AA_1D_1D 所成角的正切值为__________.

解析 连接 AD_1,因为 $AB\perp$平面 AA_1D_1D,所以直线 BD_1 与平面 AA_1D_1D 所成的角为$\angle AD_1B$. 设正方体的棱长为 1,则 $AD_1=\sqrt{2}$,所以 $\tan\angle AD_1B=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

巩固练习

基础巩固

一、选择题

1. 直线与平面所成角的取值范围是 （　　）

A. $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$　　B. $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$　　C. $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$　　D. $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

2. 在正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中，B_1C 与平面 $ABCD$ 所成的角是 （　　）

A. 0°　　B. 45°　　C. 60°　　D. 90°

3. 在正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中，BB_1 与平面 CC_1D_1D 所成的角是 （　　）

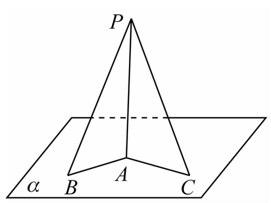
A. 0°　　B. 45°　　C. 60°　　D. 90°

4. 在正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中，直线 AB_1 与平面 $ABCD$ 所成角为 （　　）

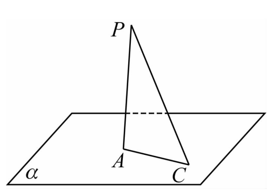
A. 45°　　B. 60°　　C. 90°　　D. 120°

二、填空题

5. 如图所示，$PA\perp\alpha$，则图中平面 α 的垂线有__________，斜线有__________，垂足有__________，斜足有__________；点 P 在平面 α 内的射影是__________；斜线 PC 在平面 α 内的射影是__________；直线 PA 与 α 所成的角是__________(用角度表示)；直线 PB 与平面 α 所成的角是__________(用符号表示).



6. 如图所示，$PA\perp\alpha$，PC 是平面 α 的斜线，若 $PC=6$，$AC=3$，PC 与平面 α 所成的角是__________(用角度表示).



三、解答题

7. 如图所示，在正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中，连接 A_1C.

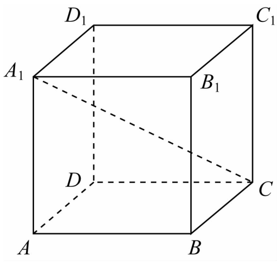
(1)求下列直线与平面所成角的大小.

①AB 与平面 $ABCD$；　　②A_1B_1 与平面 $ABCD$；

③A_1D_1 与平面 $ABCD$；　　④B_1C_1 与平面 ABB_1A_1.

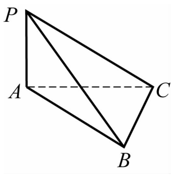
(2)在图中画出下列各对直线与平面所成的角.

①A_1C 与平面 $ABCD$；　　②A_1C 与平面 BCC_1B_1.



能 力 提 升

如图所示，$\triangle ABC$ 是直角三角形，$\angle ABC=90°$，$PA\perp$平面 ABC，此图形中有__________个直角三角形.



知识梳理答案

1.斜线　斜足　2.垂线　射影　3.(1)零角　(2)直角　(3)角

（RJ）

数学同步提升与练习
（拓展模块1·下）

参考答案及解析

目　录

第五章　立体几何

5.1　平面的基本性质

巩固练习

【基础巩固】

一、选择题

1.D　2.D　3.A　4.B　5.A　6.D　7.D　8.C

二、填空题

9.$A\in\alpha$　10.$B\notin\alpha$　11.$l\subset\alpha$　12.$l\not\subset\alpha$　13.$\subset$

14.直线 AB　15.不在同一条直线上　16.平行;相交

17.直线外　18.2;3 或 4

三、解答题

19.**解**:(1)错误,可以用三角形、梯形、圆等图形表示平面.(2)正确.(3)错误,平面没有厚薄之分.

20.**解**:3 个,3 个.

【能力提升】

1.$\in$;$\notin$;$\in$;$\notin$;$\not\subset$

2.**解**:不能.如果三点共线,那么过这条直线和这条直线外一点,有且只有一个平面,不符合题意.

5.2　空间中两条直线的位置关系

巩固练习

【基础巩固】

一、选择题

1.D　2.C　3.D　4.B　5.D　6.D　7.D

二、填空题

8.平行或相交　9.$/\!/$　10.$45°$;$90°$

三、解答题

11.**解**:在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,AC 与 AC_1 所成角为 $\angle CAC_1$.在直角三角形 ACC_1 中,$AC_1=\sqrt{3}CC_1$,所以 AC 与 AC_1 所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{3}}{3}$.

【能力提升】

CC_1,DD_1,A_1D_1,B_1C_1;$45°$

5.3　直线与平面的位置关系

5.3.1　直线与平面平行

巩固练习

【基础巩固】

一、选择题

1.B　2.C　3.D

二、填空题

4.平行或直线 l 在平面 α 内

5.2

6.①②④

7.(1)平面 ADD_1A_1,平面 BCC_1B_1

(2)直线 A_1B_1,直线 A_1D_1,直线 C_1B_1,直线 C_1D_1

(3)直线 AA_1,直线 BB_1,直线 CC_1,直线 DD_1

(4)平面 $ABCD$,平面 ABB_1A_1

三、解答题

8.**解**:(1)错误.

(2)正确.

(3)错误.

(4)错误.

9.**证明**:在矩形 $ABCD$ 中,$BC/\!/AD$,

又因为 $BC\not\subset$平面 PAD,$AD\subset$平面 PAD,

所以 $BC/\!/$平面 PAD.

又 $BC\subset$平面 $BCFE$,

且平面 $BCFE\cap$平面 $PAD=EF$,

所以 $EF/\!/BC$,又 $BC=AD$,$EF\neq AD$,

所以 $EF\neq BC$,

故四边形 $BCFE$ 为梯形.

【能力提升】

证明:因为在$\triangle CBD$ 中,G,F 是 CD,CB 的中点,

所以 $GF/\!/BD$.

又 $BD\not\subset$平面 $EFGH$,$GF\subset$平面 $EFGH$,

所以 $BD/\!/$平面 $EFGH$.

5.3.2　直线与平面垂直

巩固练习

【基础巩固】

一、选择题

1.A　2.D　3.B　4.B　5.C

二、填空题

6. 无数　7. 1　8. 平行

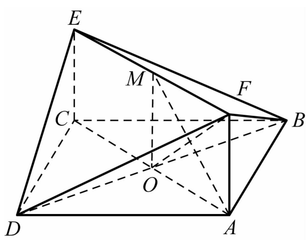
9. (1)$AD,BC,A_1D_1,B_1C_1,AA_1,BB_1,CC_1,DD_1$

(2)AA_1,BB_1,CC_1,DD_1

(3)平面 ADD_1A_1,平面 BCC_1B_1

三、解答题

10. **证明:**如图所示,设 $AC\cap BD=O$,连接 OM,OF. 易得 $BD\perp AC,BD\perp AF$,且 AC 交 AF 于 A,



所以 $BD\perp$平面 $ACEF$.

又因为 $AM\subset$平面 $ACEF$,

所以 $BD\perp AM$.

因为 $AD=\sqrt{2},AF=1$,所以 $OA=1$,

所以四边形 $AOMF$ 是正方形.

所以 $AM\perp OF$. 又 $AM\perp BD$,且 $OF\cap BD=O$,

所以 $AM\perp$平面 BDF.

【能力提升】

解:直角三角形有$\triangle PDA,\triangle PDC,\triangle PAB,\triangle PCB$.

因为 $PD\perp$平面 $ABCD$,

所以 $PD\perp AD,PD\perp DC,PD\perp AB,PD\perp BC$.

于是$\triangle PDA,\triangle PDC$是直角三角形.

因为 $BC\perp PD,BC\perp DC$,

所以 $BC\perp$平面 PDC,

从而 $BC\perp PC$,$\triangle PCB$是直角三角形.

同理可得$\triangle PAB$也是直角三角形.

5.3.3　直线与平面所成的角

巩固练习

【基础巩固】

一、选择题

1. D　2. B　3. A　4. A

二、填空题

5. $PA;PB,PC;A;B,C;A;AC;90°;\angle PBA$

6. 60°　**解析:**因为 $PA\perp\alpha$,所以$\angle PCA$就是 PC 与平面 α 所成的角. 又 $PC=6,AC=3$,所以 $\cos\angle PCA=\frac{AC}{PC}=\frac{1}{2}$,从而$\angle PCA=60°$.

三、解答题

7. **解:**(1)①0°;②0°;③0°;④90°.

(2)略

【能力提升】

4　**解析:**由 $PA\perp$平面 ABC 知 $PA\perp AB,PA\perp AC,PA\perp BC$,所以$\triangle PAB,\triangle PAC$为直角三角形. 由$\angle ABC=90°$得$\triangle ABC$为直角三角形,且 $BC\perp PB$,所以$\triangle PBC$是直角三角形,所以共有4个直角三角形.

5.4　平面与平面的位置关系

5.4.1　平面与平面平行

巩固练习

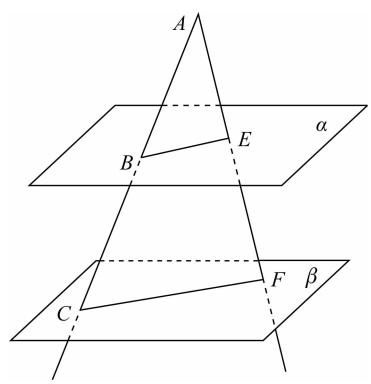
【基础巩固】

一、选择题

1. A　2. D　3. A　4. C　5. A

二、解答题

6. (1)**解:**



(2)**证明:**∵平面 $ACF\cap\alpha=BE$,平面$ACF\cap\beta=CF$,∴$BE\subset\alpha,CF\subset B$,

∵BE,CF 无公共点,且 BF,CF 均在平面 ACF 内,

∴$BE/\!/CF$.

7. **解:**连接 A_1C_1,在平面 $A_1B_1C_1D_1$ 中,过点 P 作 $EF/\!/A_1C_1$,分别交 A_1B_1,B_1C_1 于点 E,F,则 $EF/\!/A_1C_1$.

因为平面 $ABCD/\!/$平面 $A_1B_1C_1D_1$,而平面 $ACC_1A_1\cap$平