数学

同步提升与练习

（拓展模块1•上）

选题策划：苏　莉　王晓军
责任编辑：张佳凯
封面设计：刘文东

ISBN 978-7-5661-4951-0

定价：29.90元

中等职业学校公共基础课程辅导用书

数学　同步提升与练习（拓展模块1•上）

主编　华腾新思职教高考研究中心

哈尔滨工程大学出版社
Harbin Engineering University Press

中等职业学校公共基础课程辅导用书

数学

同步提升与练习

（拓展模块1•上）

主编　华腾新思职教高考研究中心

哈尔滨工程大学出版社
Harbin Engineering University Press

中等职业学校公共基础课程辅导用书

数学

同步提升与练习

（拓展模块1·上）

主编　华腾新思职教高考研究中心

哈爾濱工程大學出版社
Harbin Engineering University Press

内容简介

本书按照教材《数学 拓展模块一》的章节顺序进行编写。“知识脉络”模块对本章知识点进行了总结。“学习目标”模块参照考试大纲，使学生对知识要点的掌握程度有一个初步了解。“知识梳理”模块通过预习，培养学生的阅读能力、理解能力及总结能力。“典型例题”模块对经典例题进行详细讲解，使学生能更好地掌握课本知识。“巩固练习”模块分为基础巩固和能力提升两部分，使学生通过自我检测做到及时查缺补漏，确保当堂内容当堂清。每章后配有章节测试题，既能强化学生对相应章节知识之间关系的认识，又能培养学生解决综合问题的能力，从而提升学生的数学思维及解题技巧。

本书既可作为广大中等职业学校学生的学习用书，也可作为教师教学的参考资料。

图书在版编目（CIP）数据

数学同步提升与练习 ：拓展模块 1. 上 / 华腾新思职教高考研究中心主编. -- 哈尔滨 ：哈尔滨工程大学出版社，2025. 9. -- ISBN 978-7-5661-4951-0

Ⅰ. G634.603

中国国家版本馆 CIP 数据核字第 2025QY2884 号

数学同步提升与练习(拓展模块 1・上)

SHUXUE TONGBU TISHENG YU LIANXI (TUOZHAN MOKUAI 1・SHANG)

选题策划 苏 莉 王晓军
责任编辑 张佳凯
封面设计 刘文东

出版发行 哈尔滨工程大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区南通大街 145 号
邮政编码 150001
电 话 0451-82519989
经 销 新华书店
印 刷 三河市骏杰印刷有限公司
开 本 880 mm×1 230 mm 1/16
印 张 9.25
字 数 175 千字
版 次 2025 年 9 月第 1 版
印 次 2025 年 9 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5661-4951-0
定 价 29.90 元

http://www.hrbeupress.com
E-mail:heupress@hrbeu.edu.cn

前言

PREFACE

职业教育是培养技术技能人才，促进就业创业创新，推动中国制造和服务上水平提升的重要基础。而中等职业教育的基础地位，既是国家经济发展的需要，也是维护社会稳定的需要。这就要求中等职业学校必须与时俱进，不断进行教育教学改革。本书以深化学校教育教学改革、提高课堂教学实效性为目标，以《中等职业学校数学课程标准》(2020 年版)为基础，充分落实学生的主体地位，从而激发学生的自信，挖掘学生的潜力。

本书是与中等职业教育课程改革规划新教材《数学 拓展模块一》相配套的学生辅导用书，主要包含以下模块：

知识脉络——对本章知识点进行了总结。

学习目标——参考考试大纲，使学生对知识要点的掌握程度有一个初步了解。

知识梳理——通过预习，培养学生的阅读能力、理解能力及总结能力。

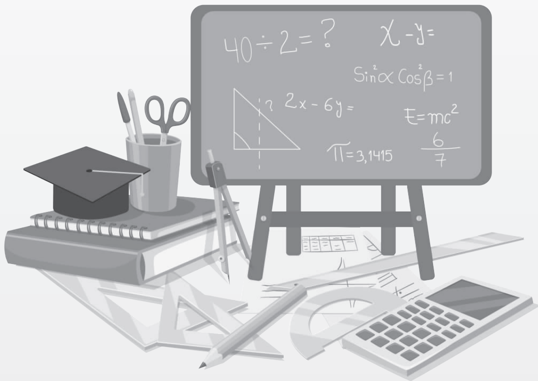
典型例题——对经典例题进行详细讲解，使学生能更好地掌握课本知识。

巩固练习——分为基础巩固和能力提升两部分，通过自我检测，使学生做到及时查缺补漏，确保当堂内容当堂清。

章节测试题——通过章节测试，既能强化学生对相应章节知识之间关系的认识，又能培养学生解决综合问题的能力，培养学生的数学思维和解题技巧。

由于编者学术水平有限，书中难免存在不足之处，敬请读者提出宝贵的意见和建议。

编　者



目录

CONTENTS

第一章　三角计算　1

1.1　和角公式 ………… 2

1.1.1　两角和与差的余弦公式 ………… 2

1.1.2　两角和与差的正弦公式 ………… 5

1.1.3　两角和与差的正切公式 ………… 8

1.2　倍角公式 ………… 11

1.3　正弦型函数 ………… 15

1.4　解三角形 ………… 20

1.4.1　余弦定理 ………… 20

1.4.2　三角形的面积及正弦定理 ………… 24

1.5　三角计算的应用 ………… 28

第一章测试题 ………… 34

第二章　数列　37

2.1　数列的概念 ………… 38

2.1.1　数列的定义 ………… 38

2.1.2　数列的通项 ………… 39

2.2　等差数列 ………… 43

2.2.1　等差数列的概念 ………… 43

2.2.2　等差数列的前 n 项和 ………… 45

2.3　等比数列 ………… 48

2.3.1　等比数列的概念 ………… 48

2.3.2　等比数列的前 n 项和 ………… 51

2.4　数列的应用 ………… 54

第二章测试题 ………… 58

第三章　平面向量　61

3.1　平面向量的概念 …… 62
3.2　平面向量的线性运算 …… 66
3.2.1　向量的加法 …… 66
3.2.2　向量的减法 …… 69
3.2.3　数乘向量 …… 71
3.3　平面向量的内积 …… 75
3.4　平面向量的直角坐标及其应用 …… 78
3.4.1　平面向量的直角坐标及其运算 …… 78
3.4.2　平面向量平行和垂直的坐标表示 …… 81
3.4.3　中点公式和距离公式 …… 83
第三章测试题 …… 86

第四章　圆锥曲线　88

4.1　椭圆 …… 89
4.1.1　椭圆的标准方程 …… 89
4.1.2　椭圆的几何性质 …… 93
4.2　双曲线 …… 96
4.2.1　双曲线的标准方程 …… 96
4.2.2　双曲线的几何性质 …… 99
4.3　抛物线 …… 103
4.3.1　抛物线的标准方程 …… 103
4.3.2　抛物线的几何性质 …… 105
第四章测试题 …… 109

期末测试题　112

第一章 三角计算

知识脉络

- 三角计算
  - 和角公式
    - 两角和与差的余弦公式
    - 两角和与差的正弦公式
    - 两角和与差的正切公式
  - 倍角公式
  - 正弦型函数
  - 解三角形
    - 余弦定理
    - 三角形的面积及正弦定理
  - 三角计算的应用

1.1 和角公式

1.1.1 两角和与差的余弦公式

学习目标

1. 了解两角和与两角差的余弦公式的推导过程.
2. 理解两角和与两角差的余弦公式在求值、化简及证明等方面的应用.

知识梳理

两角和与差的余弦公式

$\cos(\alpha+\beta)=$________________________.

$\cos(\alpha-\beta)=$________________________.

（答案在本节末尾）

典型例题

例 1　不用计算器，求 $\cos 75^\circ$ 的值.

解　将 75° 看成是 30° 与 45° 的和，利用公式得

$$\begin{aligned}\cos 75^\circ&=\cos(30^\circ+45^\circ)\\&=\cos 30^\circ\cos 45^\circ-\sin 30^\circ\sin 45^\circ\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

点拨　把一个大角分解成两个特殊角，用两角和的余弦公式计算.

例 2　设 $\cos\alpha=\frac{3}{5}$，$\cos\beta=\frac{4}{5}$，并且 α 和 β 都是锐角，求 $\cos(\alpha+\beta)$ 的值.

解　因为 $\cos\alpha=\frac{3}{5}$，$\cos\beta=\frac{4}{5}$，并且 α 和 β 都是锐角，所以由

$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$，$\cos^2\beta+\sin^2\beta=1$，得

$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{4}{5}$，$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\frac{3}{5}$，

因此，利用公式得

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$$=\frac{3}{5}\times\frac{4}{5}-\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}=0.$$

点拨　可利用两角和的余弦公式来进行求解，但首先应求出 $\sin\alpha$，$\sin\beta$ 的值，灵活运用公式 $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$ 即可解决.

例 3　化简下列各式.

(1) $\cos 40°\cos 20°-\sin 40°\sin 20°$；

(2) $\cos(\alpha-\beta)\cos\beta-\sin(\alpha-\beta)\sin\beta$.

解　(1) $\cos 40°\cos 20°-\sin 40°\sin 20°=\cos(40°+20°)$

$$=\cos 60°=\frac{1}{2}.$$

(2) $\cos(\alpha-\beta)\cos\beta-\sin(\alpha-\beta)\sin\beta=\cos[(\alpha-\beta)+\beta]$

$$=\cos\alpha.$$

点拨　两角和与差的余弦公式把角 $\alpha+\beta$ 的三角函数转化成了 α，β 的三角函数式. 如果反过来，从右向左使用公式，我们就可以将上述的三角函数式化简.

巩固练习

基础巩固

一、选择题

1. $\cos 69°\cos 9°+\sin 69°\sin 9°=$　　(　　)

A. 0　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. 1

2. $\cos 16°\cos 14°-\sin 16°\sin 14°=$　　(　　)

A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. 已知 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$，则 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$ 等于　　(　　)

A. $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{6}}{6}$　　B. $1-\frac{\sqrt{6}}{6}$　　C. $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{6}}{6}$　　D. $\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}$

4. 在 $\triangle ABC$ 中，$\cos A=\frac{3}{5}$，$\cos B=\frac{5}{13}$，则 $\cos C=$　　(　　)

A. $\frac{63}{65}$　　B. $-\frac{33}{65}$　　C. $-\frac{63}{65}$　　D. $\frac{33}{65}$

二、填空题

5. $\cos 105^\circ=$____________.

6. 已知 $\sin\alpha=\frac{15}{17}$，α 为第二象限角，则 $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=$____________.

三、解答题

7. 已知 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，$\cos\beta=-\frac{\sqrt{10}}{10}$，$\beta\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$，求 $\cos(\alpha+\beta)$的值.

8. 已知 α 和 β 都是锐角，且满足 $\cos\alpha=\frac{4}{5}$，$\cos(\alpha+\beta)=\frac{3}{5}$，求 $\cos\beta$ 的值.

能 力 提 升

1. 设 $\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin\beta=\frac{\sqrt{10}}{10}$，则 $\alpha+\beta$ 的大小为 （　　）

A. $-\frac{3\pi}{4}$　　B. $\frac{\pi}{4}$　　C. $\frac{3\pi}{4}$　　D. $\frac{\pi}{4}$或$\frac{3\pi}{4}$

2. 在$\triangle ABC$ 中，若 $\cos A\cos B-\sin A\sin B=0$，则$\triangle ABC$ 是____________三角形.

3. 化简：$\sqrt{3}\cos x-\sin x$.

知识梳理答案

$\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

1.1.2 两角和与差的正弦公式

学习目标

1. 了解两角和与两角差的正弦公式的推导过程.
2. 理解两角和与两角差的正弦公式在求值、化简及证明等方面的应用.

知识梳理

两角和与差的正弦公式

$\sin(\alpha+\beta)=$________________________.

$\sin(\alpha-\beta)=$________________________.

(答案在本节末尾)

典型例题

例 1 不用计算器,求 $\sin 75°$的值.

解 将 $75°$看成是 $30°$与 $45°$的和,利用两角和的正弦公式得

$$\sin 75°=\sin(30°+45°)=\sin 30°\cos 45°+\cos 30°\sin 45°$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.$$

点拨 把一个大角分解成两个特殊角,用两角和的正弦公式计算.

例 2 已知 $\cos\alpha=\frac{3}{5}$,$\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$,求 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$的值.

解 由于 $\cos\alpha=\frac{3}{5}$,$\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$,所以

$$\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=-\frac{4}{5},$$

则 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\alpha\cos\frac{\pi}{3}+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{3}$

$$=\left(-\frac{4}{5}\right)\times\frac{1}{2}+\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}-4}{10}.$$

点拨 可利用两角和的正弦公式来进行求解,但首先应运用公式 $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$ 求出 $\sin\alpha$ 的值.

例 3 化简下列各式.

（1）$\sin 12^\circ\cos 18^\circ+\cos 12^\circ\sin 18^\circ$；

（2）$\sin\beta\cos(\alpha-\beta)+\cos\beta\sin(\alpha-\beta)$.

解 （1）$\sin 12^\circ\cos 18^\circ+\cos 12^\circ\sin 18^\circ=\sin(12^\circ+18^\circ)=\sin 30^\circ=\dfrac{1}{2}$.

（2）$\sin\beta\cos(\alpha-\beta)+\cos\beta\sin(\alpha-\beta)=\sin[\beta+(\alpha-\beta)]=\sin\alpha$.

点拨 两角和与差的正弦公式把角 $\alpha+\beta$ 的三角函数转化成了 α,β 的三角函数式. 如果反过来，从右向左使用公式，我们就可以将上述三角函数式化简.

巩固练习

基础巩固

一、选择题

1. $\sin 30^\circ\cos 15^\circ+\cos 30^\circ\sin 15^\circ=$ （　　）

A. 1　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

2. $\sin 105^\circ=$ （　　）

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$　　B. $\dfrac{1}{4}$　　C. $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$　　D. $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

3. 已知 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$，则 $\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=$ （　　）

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$　　D. $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

4. 已知 α 为锐角，且 $\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{3}$，则 $\sin\alpha=$ （　　）

A. $\dfrac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{6}$　　B. $\dfrac{\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{6}$　　C. $\dfrac{1+2\sqrt{6}}{6}$　　D. $\dfrac{1-2\sqrt{6}}{6}$

二、填空题

5. 若 $\sin\dfrac{\pi}{4}\cos\dfrac{\pi}{12}-\sin\dfrac{\pi}{12}\cos\dfrac{\pi}{4}=\sin x$，请写出一个符合要求的 x 为____________.

6. 化简：$\dfrac{1}{2}\sin 2x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x=$____________.

三、解答题

7. 已知 $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$，$\cos\beta=-\dfrac{2}{3}$，$\beta\in\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$，求 $\sin(\alpha+\beta)$，$\sin(\alpha-\beta)$的值.

8. 已知 $\cos(\alpha+\beta)=\frac{5}{13}$，$\sin\alpha=\frac{4}{5}$，$\alpha,\beta$ 均为锐角，求 $\sin\beta$ 的值.

能力提升

1. 已知 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\beta\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$，且 $\cos(\alpha-\beta)=\frac{3}{5}$，$\sin\beta=-\frac{\sqrt{2}}{10}$，则 α 的值为　　(　　)

A. $\frac{2\pi}{3}$　　B. $\frac{3\pi}{4}$　　C. $\frac{\pi}{4}$　　D. $\frac{\pi}{3}$

2. 若 $\sin x-\sqrt{3}\cos x=2\sin(x+\theta)$，$\theta\in(-\pi,\pi)$，则 θ 的值为　　(　　)

A. $-\frac{\pi}{3}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{2\pi}{3}$　　D. $-\frac{2\pi}{3}$

3. 已知角 α 的顶点与原点重合，始边与 x 轴的非负半轴重合，终边在直线 $y=3x$ 上，求 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$.

4. 已知 $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{3}$，$\theta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，求 $\sin\theta$.

知识梳理答案

$\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

1.1.3　两角和与差的正切公式

学习目标

1. 了解两角和与两角差的正切公式的推导过程.
2. 理解两角和与两角差的正切公式在求值、化简及证明等方面的应用.

知识梳理

两角和与差的正切公式

$\tan(\alpha+\beta)=$________________________.

$\tan(\alpha-\beta)=$________________________.

（答案在本节末尾）

典型例题

例 1　不用计算器，求下列式子的值.

(1) $\tan\dfrac{11\pi}{12}$；(2) $\tan 285°$.

解　(1) $\tan\dfrac{11\pi}{12}=-\tan\dfrac{\pi}{12}=-\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{\tan\dfrac{\pi}{4}-\tan\dfrac{\pi}{6}}{1+\tan\dfrac{\pi}{4}\tan\dfrac{\pi}{6}}$

$$=-\frac{1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}}{1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}}=-2+\sqrt{3}.$$

(2) $\tan 285°=\tan(360°-75°)=-\tan 75°=-\tan(45°+30°)$

$$=-\frac{\tan 45°+\tan 30°}{1-\tan 45°\tan 30°}=-2-\sqrt{3}.$$

例 2　化简下列各式.

(1) $\dfrac{\sqrt{3}-\tan 15°}{1+\sqrt{3}\tan 15°}$；

(2) $\tan 15°+\tan 30°+\tan 15°\tan 30°$.

解　(1) $\dfrac{\sqrt{3}-\tan 15°}{1+\sqrt{3}\tan 15°}=\dfrac{\tan 60°-\tan 15°}{1+\tan 60°\tan 15°}=\tan(60°-15°)=1.$

(2) $\tan 15^\circ+\tan 30^\circ+\tan 15^\circ\tan 30^\circ=\tan(15^\circ+30^\circ)(1-\tan 15^\circ\tan 30^\circ)+\tan 15^\circ\tan 30^\circ=1$.

点拨　(1)题逆用两角差的正切公式;(2)题利用公式的变形进行转换.

巩固练习

基础巩固

一、选择题

1. 已知 $\tan\alpha=3$,则 $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=$　(　　)

A. 1　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 2　　D. -2

2. $\frac{\tan 75^\circ-\tan 15^\circ}{1+\tan 75^\circ\tan 15^\circ}=$　(　　)

A. 1　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2　　D. $-\sqrt{3}$

3. 若 $\tan\alpha=3$,$\tan\beta=\frac{4}{3}$,则 $\tan(\alpha-\beta)=$　(　　)

A. -3　　B. $-\frac{1}{3}$　　C. 3　　D. $\frac{1}{3}$

4. 已知 $\tan\alpha=\frac{1}{2}$,则$\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-1}{1+\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}$的值是　(　　)

A. 2　　B. $\frac{1}{2}$　　C. -1　　D. -3

二、填空题

5. 已知 $\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=-7$,则 $\tan\alpha=$____________.

6. $\tan 10^\circ+\tan 50^\circ+\sqrt{3}\tan 10^\circ\tan 50^\circ=$____________.

三、解答题

7. 已知角 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,$\sin\alpha=\frac{3}{5}$.

(1)求 $\tan\alpha$ 的值;

(2)求 $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$的值.

8. 若 $\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\tan\alpha=\frac{4}{3}$，$\tan\beta=\frac{1}{7}$，求 $\alpha-\beta$ 的值.

能 力 提 升

1. 已知 $\tan(\alpha+\beta)=7$，$\tan\alpha=\frac{3}{4}$，且 $\beta\in(0,\pi)$，则 β 的值为____________.

2. 设 $\tan\alpha$，$\tan\beta$ 是方程 $x^2-3x+2=0$ 的两根，求 $\tan(\alpha+\beta)$ 的值.

知识梳理答案

$\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

1.2　倍角公式

学习目标

理解二倍角的正弦公式、余弦公式和正切公式的推导过程及在求值、化简与证明等方面的应用.

知识梳理

1. 二倍角公式

(1) $\sin 2\alpha=$____________.

(2) $\cos 2\alpha=$____________$=$____________$=$____________.

(3) $\tan 2\alpha=$____________.

2. 降次公式

(1) $\sin^2\alpha=$____________.

(2) $\cos^2\alpha=$____________.

3. 升幂公式

(1) $1-\cos 2\alpha=$____________.

(2) $1+\cos 2\alpha=$____________.

(答案在本节末尾)

典型例题

例 1　已知 $\cos\alpha=-\frac{12}{13}$，且 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，求 $\sin 2\alpha$，$\cos 2\alpha$，$\tan 2\alpha$ 的值.

解　因为 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，所以 $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(-\frac{12}{13}\right)^2}=\frac{5}{13}$.

利用公式可得

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\times\frac{5}{13}\times\left(-\frac{12}{13}\right)=-\frac{120}{169}$，

$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2\times\left(-\frac{12}{13}\right)^2-1=\frac{119}{169}$，

则 $\tan 2\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=-\frac{120}{119}$.

点拨 应用二倍角公式解题，求 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 时要注意角所在的象限.

例 2 已知 $\cos\frac{\alpha}{2}=-\frac{3}{5}$，且 $\alpha\in(\pi,2\pi)$，求 $\sin\alpha$，$\cos\frac{\alpha}{4}$的值.

解 由 $\alpha\in(\pi,2\pi)$可知$\frac{\alpha}{2}\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，

所以 $\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{1-\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$，

故 $\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=2\times\frac{4}{5}\times\left(-\frac{3}{5}\right)=-\frac{24}{25}$.

由$\frac{\alpha}{2}\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$可知$\frac{\alpha}{4}\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$，

所以 $\cos^2\frac{\alpha}{4}=\frac{1+\cos\frac{\alpha}{2}}{2}=\frac{1+\left(-\frac{3}{5}\right)}{2}=\frac{1}{5}$，$\cos\frac{\alpha}{4}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

点拨 $\frac{\alpha}{2}$与 α，$\frac{\alpha}{2}$与$\frac{\alpha}{4}$之间都是具有二倍关系的角，故可以使用二倍角公式来计算.

例 3 已知 $\tan\alpha=2$，化简并求值：$\frac{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{1-\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}$.

解 $\frac{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{1-\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}=\frac{1+2\cos^2\alpha-1+2\sin\alpha\cos\alpha}{1-(1-2\sin^2\alpha)+2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{2\cos\alpha(\cos\alpha+\sin\alpha)}{2\sin\alpha(\cos\alpha+\sin\alpha)}=\frac{1}{\tan\alpha}=\frac{1}{2}$.

点拨 利用倍角公式将 2α 化为 α，合理选择使用余弦二倍角公式.

巩固练习

基础巩固

一、选择题

1. 计算 $1-2\sin^2 22.5°$的结果等于 ( )

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. 已知 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{2}$，则 $\sin 2\alpha=$ ( )

A. $\frac{1}{4}$ B. $-\frac{1}{4}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $-\frac{3}{4}$

3. 已知 $\tan\alpha=2$，则 $\tan 2\alpha$ 的值为 ( )

A. $-\frac{4}{5}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $-\frac{4}{3}$ D. $\frac{4}{3}$

4. 如果 $x=\frac{\pi}{12}$，那么 $\cos^4x-\sin^4x=$ ( )

A. 0 B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

二、填空题

5. $\sin 15^\circ \cos 15^\circ =$____________.

6. 已知 $\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$,则 $\cos 2\alpha$ 的值是____________.

三、解答题

7. 已知 $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$,且 α 是第二象限角,求 $\sin 2\alpha$,$\cos 2\alpha$,$\tan 2\alpha$ 的值.

8. 证明:$\dfrac{\sin 2\alpha+2\sin^2\alpha}{\cos\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)}=2\tan\alpha$.

9. 已知 $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\theta\right)=\dfrac{1}{3}$,求 $\sin 2\theta$.

10. 已知 $\tan\alpha=-\frac{3}{4}$，求$\frac{\sin^2\alpha-\sin 2\alpha}{\cos^2\alpha+\cos 2\alpha}$的值.

能 力 提 升

1. 角 α 的顶点在坐标原点，始边与 x 轴非负半轴重合，终边过点 $P(-1,2)$，则 $\sin 2\alpha$ 等于 ( )

A. $-\frac{3}{5}$　　B. $\frac{3}{5}$　　C. $-\frac{4}{5}$　　D. $\frac{4}{5}$

2. 已知 $\sin\frac{x}{2}-2\cos\frac{x}{2}=0$.

(1)求 $\tan x$ 的值；

(2)求$\frac{\cos 2x}{\cos\left(\frac{5\pi}{4}+x\right)\sin(\pi+x)}$的值.

知识梳理答案

1. (1)$2\sin\alpha\cos\alpha$　(2)$\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$　$2\cos^2\alpha-1$　$1-2\sin^2\alpha$　(3)$\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

2. (1)$\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$　(2)$\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$

3. (1)$2\sin^2\alpha$　(2)$2\cos^2\alpha$

（RJ）

数学同步提升与练习
（拓展模块 1 · 上）
参考答案及解析

目　　录

第一章　三角计算 …… 1
1.1　和角公式 …… 1
1.2　倍角公式 …… 3
1.3　正弦型函数 …… 4
1.4　解三角形 …… 5
1.5　三角计算的应用 …… 7
第一章测试题 …… 8
第二章　数列 …… 10
2.1　数列的概念 …… 10
2.2　等差数列 …… 11
2.3　等比数列 …… 12
2.4　数列的应用 …… 13
第二章测试题 …… 14
第三章　平面向量 …… 15
3.1　平面向量的概念 …… 15
3.2　平面向量的线性运算 …… 16
3.3　平面向量的内积 …… 17
3.4　平面向量的直角坐标及其应用 …… 17
第三章测试题 …… 19
第四章　圆锥曲线 …… 20
4.1　椭圆 …… 20
4.2　双曲线 …… 21
4.3　抛物线 …… 23
第四章测试题 …… 24
期末测试题 …… 25

第一章　三角计算

1.1　和角公式

1.1.1　两角和与差的余弦公式

巩固练习

【基础巩固】

一、选择题

1. B　2. D

3. A　**解析:**因为 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,$\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$,所以 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{6}}{3}$,所以 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\alpha\cos\frac{\pi}{6}-\sin\alpha\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{6}}{6}$. 故选 A.

4. D　**解析:**易得 $\sin A=\frac{4}{5}$,$\sin B=\frac{12}{13}$,则 $\cos C=\cos[\pi-(A+B)]=-\cos(A+B)=\sin A\sin B-\cos A\cos B=\frac{33}{65}$.

二、填空题

5. $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

6. $\frac{15\sqrt{3}-8}{34}$　**解析:**由题意可知 $\cos\alpha=-\frac{8}{17}$,所以 $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cos\alpha+\sin\frac{\pi}{3}\sin\alpha=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{8}{17}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{15}{17}=\frac{15\sqrt{3}-8}{34}$.

三、解答题

7. **解:**由 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$,$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,

可得 $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$,

由 $\cos\beta=-\frac{\sqrt{10}}{10}$,$\beta\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$,

可得 $\sin\beta=-\sqrt{1-\cos^2\beta}=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

因此,$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

8. **解:**因为 $\cos\alpha=\frac{4}{5}$,α 是锐角,所以 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$. 因为 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$,$0<\beta<\frac{\pi}{2}$,所以 $0<\alpha+\beta<\pi$. 又因为 $\cos(\alpha+\beta)=\frac{3}{5}$,所以 $\sin(\alpha+\beta)=\frac{4}{5}$,所以 $\cos\beta=\cos[(\alpha+\beta)-\alpha]=\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha+\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha=\frac{24}{25}$.

【能力提升】

1. B　**解析:**易得 $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,$\cos\beta=\frac{3\sqrt{10}}{10}$,则 $\cos(\alpha+\beta)=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 因为 $\alpha+\beta\in(0,\pi)$,所以 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$.

2. 直角　**解析:**由题意可知 $\cos A\cos B-\sin A\sin B=\cos(A+B)=0$. 又因为是在 $\triangle ABC$ 中,所以 $A+B=\frac{\pi}{2}$,所以 $\triangle ABC$ 是直角三角形.

3. **解:**原式 $=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos x-\sin\frac{\pi}{6}\sin x\right)=2\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)$.

1.1.2　两角和与差的正弦公式

巩固练习

【基础巩固】

一、选择题

1. C　2. D

3. D　**解析:**因为 $\sin\alpha=\frac{1}{2}$,$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,所以 $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4}+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, 故选 D.

4. A　**解析:**由 α 为锐角,且 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{3}$,可求得 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

故 $\sin\alpha=\sin\left[\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{6}\right]$

$=\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{6}+\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\sin\frac{\pi}{6}$

$=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{6}$.

二、填空题

5. $\frac{\pi}{6}$(答案不唯一)　**解析:**由两角差的正弦公式知,

$\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{4}=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{12}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}=\sin x$,所以 $x=2k\pi+\frac{\pi}{6}$ 或 $2k\pi+\frac{5\pi}{6}$,$k\in\mathbf{Z}$. 故答案可为$\frac{\pi}{6}$(答案不唯一).

6. $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ **解析**:$f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x=\sin 2x\cos\frac{\pi}{3}+\cos 2x\sin\frac{\pi}{3}=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

三、解答题

7. **解**:由 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$,$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,

得 $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\frac{4}{5}$.

又由 $\cos\beta=-\frac{2}{3}$,$\beta\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$,

得 $\sin\beta=-\sqrt{1-\cos^2\beta}=-\frac{\sqrt{5}}{3}$.

所以 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$=\frac{3}{5}\times\left(-\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{4}{5}\right)\times\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)=\frac{4\sqrt{5}-6}{15}$,

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$=\frac{3}{5}\times\left(-\frac{2}{3}\right)-\left(-\frac{4}{5}\right)\times\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)=-\frac{4\sqrt{5}+6}{15}$.

8. **解**:由 α,β 均为锐角,可知 $0^\circ<\alpha+\beta<180^\circ$,
$\cos\alpha>0$,$\sin(\alpha+\beta)>0$,

则由 $\cos(\alpha+\beta)=\frac{5}{13}$,

得 $\sin(\alpha+\beta)=\sqrt{1-\cos^2(\alpha+\beta)}=\frac{12}{13}$,

由 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$,得 $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{3}{5}$.

所以 $\sin\beta=\sin[(\alpha+\beta)-\alpha]=\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha-\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha=\frac{12}{13}\times\frac{3}{5}-\frac{5}{13}\times\frac{4}{5}=\frac{16}{65}$.

【能力提升】

1. C **解析**:因为 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,$\beta\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$,

所以 $\alpha-\beta\in(0,\pi)$.

因为 $\cos(\alpha-\beta)=\frac{3}{5}$,所以 $\sin(\alpha-\beta)=\frac{4}{5}$.

因为 $\beta\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$,$\sin\beta=-\frac{\sqrt{2}}{10}$,所以 $\cos\beta=\frac{7\sqrt{2}}{10}$.

所以 $\sin\alpha=\sin[(\alpha-\beta)+\beta]$

$=\sin(\alpha-\beta)\cos\beta+\cos(\alpha-\beta)\sin\beta$

$=\frac{4}{5}\times\frac{7\sqrt{2}}{10}+\frac{3}{5}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{10}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

所以 $\alpha=\frac{\pi}{4}$.

2. A **解析**:$\sin x-\sqrt{3}\cos x=2\left(\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)=2\left(\sin x\cos\frac{\pi}{3}-\cos x\sin\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$,故 θ 的值为$-\frac{\pi}{3}$.

3. **解**:当 α 为第一象限角时,由题意,得 $\sin\alpha=\frac{3}{\sqrt{10}}$,$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{10}}$,所以 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{4}{\sqrt{10}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$;当 α 为第三象限角时,由题意,得 $\sin\alpha=-\frac{3}{\sqrt{10}}$,$\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{10}}$,所以 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{4}{\sqrt{10}}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

4. **解**:由 $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{3}$,得$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta=\frac{1}{3}$,即 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{3}$,联立$\begin{cases}\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{3},\\ \sin^2\theta+\cos^2\theta=1,\end{cases}$得$\sin^2\theta+\left(\frac{\sqrt{2}}{3}-\sin\theta\right)^2=1$,即 $2\sin^2\theta-\frac{2\sqrt{2}}{3}\sin\theta-\frac{7}{9}=0$,解得 $\sin\theta=\frac{\sqrt{2}\pm4}{6}$,又因为 $\theta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,所以 $\sin\theta=\frac{4+\sqrt{2}}{6}$.

1.1.3 两角和与差的正切公式

巩固练习

【基础巩固】

一、选择题

1. D **解析**:$\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\alpha+1}{1-\tan\alpha}=-2$.

2. B **解析**:原式$=\tan(75^\circ-15^\circ)=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$.

3. D **解析**:$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

$$=\frac{3-\frac{4}{3}}{1+3\times\frac{4}{3}}=\frac{1}{3}.$$

4. B　**解析:** 因为 $\tan\alpha=\frac{1}{2}$，所以 $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\alpha+1}{1-\tan\alpha}=3$，所以$\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-1}{1+\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}=\frac{3-1}{1+3}=\frac{1}{2}$.

二、填空题

5. $-\frac{3}{4}$　**解析:** 由 $\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\alpha-1}{1+\tan\alpha}=-7$，解得 $\tan\alpha=-\frac{3}{4}$.

6. $\sqrt{3}$　**解析:** 因为 $\tan 60°=\tan(10°+50°)=\frac{\tan 10°+\tan 50°}{1-\tan 10°\tan 50°}=\sqrt{3}$，所以 $\tan 10°+\tan 50°+\sqrt{3}\tan 10°\tan 50°=\sqrt{3}$.

三、解答题

7. **解:** (1)因为角 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，$\sin\alpha=\frac{3}{5}$，

所以 $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\frac{4}{5}$，

所以 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{3}{4}$.

(2)$\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\alpha}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\alpha}=\frac{1-\frac{3}{4}}{1+\frac{3}{4}}=\frac{1}{7}$.

8. **解:** 由题意可得 $\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{4}{3}-\frac{1}{7}}{1+\frac{4}{3}\times\frac{1}{7}}=1$，由 $\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 得 $\alpha-\beta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，故 $\alpha-\beta=\frac{\pi}{4}$.

【能力提升】

1. $\frac{\pi}{4}$　**解析:** $\tan\beta=\tan[(\alpha+\beta)-\alpha]=\frac{\tan(\alpha+\beta)-\tan\alpha}{1+\tan(\alpha+\beta)\tan\alpha}=\frac{7-\frac{3}{4}}{1+7\times\frac{3}{4}}=1$，又 $\beta\in(0,\pi)$，

所以 $\beta=\frac{\pi}{4}$.

2. **解:** 因为 $\tan\alpha,\tan\beta$ 是方程 $x^2-3x+2=0$ 的两个根，所以 $\tan\alpha+\tan\beta=3$，$\tan\alpha\tan\beta=2$，则 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{3}{1-2}=-3$.

1.2　倍角公式

巩固练习

【基础巩固】

一、选择题

1. B　2. D　3. C

4. B　**解析:** $\cos^4x-\sin^4x=(\cos^2x+\sin^2x)(\cos^2x-\sin^2x)=\cos 2x=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

二、填空题

5. $\frac{1}{4}$　**解析:** $\sin 15°\cos 15°=\frac{1}{2}\times 2\sin 15°\cos 15°=\frac{1}{2}\sin 30°=\frac{1}{4}$.

6. $\frac{1}{2}$　**解析:** 由二倍角公式可得 $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=1-2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.

三、解答题

7. **解:** 因为 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$，且 α 是第二象限角，所以

$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=-\frac{4}{5}$.

利用公式可得

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\times\frac{3}{5}\times\left(-\frac{4}{5}\right)=-\frac{24}{25}$，

$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2\times\left(-\frac{4}{5}\right)^2-1=\frac{7}{25}$，

则 $\tan 2\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=-\frac{24}{7}$.

8. **证明:** 左边$=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha+2\sin^2\alpha}{\cos\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)}$

$=\frac{2\sin\alpha(\cos\alpha+\sin\alpha)}{\cos\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)}$

$=2\tan\alpha=$ 右边.

9. **解:** 由 $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)=\frac{1}{3}$，得 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{3}$，两边平方得 $1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{2}{9}$，所以 $\sin 2\theta=-\frac{7}{9}$.

10. **解:** $\frac{\sin^2\alpha-\sin 2\alpha}{\cos^2\alpha+\cos 2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$

$=\frac{\tan^2\alpha-2\tan\alpha}{2-\tan^2\alpha}=\frac{33}{23}$.

【能力提升】

1. C　**解析:** 因为角 α 的终边过点 $P(-1,2)$，所以 $\sin\alpha=$

$\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}$. 由二倍角公式 $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$，

得 $\sin 2\alpha=2\times\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)=-\frac{4}{5}$.

2. **解**：(1)由 $\sin\frac{x}{2}-2\cos\frac{x}{2}=0$，得 $\tan\frac{x}{2}=2$，

所以 $\tan x=\dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}=\dfrac{2\times2}{1-2^2}=-\frac{4}{3}$.

(2)原式 $=\dfrac{\cos^2x-\sin^2x}{-\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)(-\sin x)}$

$=\dfrac{(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x-\sin x)\sin x}$，

由(1)知 $\cos x-\sin x\neq0$，

所以上式 $=\sqrt{2}\times\dfrac{\cos x+\sin x}{\sin x}=\sqrt{2}\times\dfrac{1+\tan x}{\tan x}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

1.3 正弦型函数

巩固练习

【基础巩固】

一、选择题

1. B 2. B

3. B **解析**：根据图像"左加右减"的性质即可获得.

4. A **解析**：如题图所示，可得 $A=2$，又 $\frac{\pi}{6}-\left(-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{T}{4}$，$T=\frac{2\pi}{\omega}$，可得 $\omega=2$，故原函数解析式为 $y=2\sin(2x+\varphi)\left(|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$. 又 $2\sin\left(2\times\frac{\pi}{6}+\varphi\right)=2$，得 $\frac{\pi}{3}+\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，故 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，故所求的解析式为 $y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.

二、填空题

5. π；4；-4

6. $\frac{2}{3}$

三、解答题

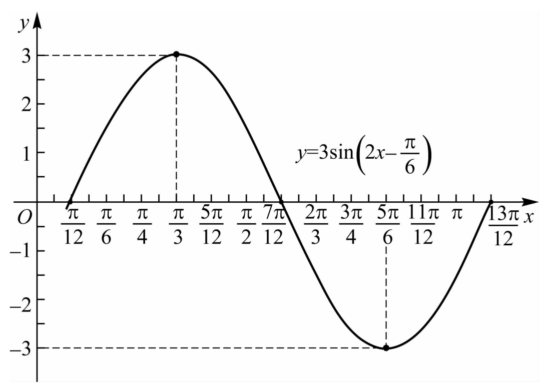
7. **解**：(1)$y=3\left(\sin 2x\cos\frac{\pi}{6}-\cos 2x\sin\frac{\pi}{6}\right)=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，故函数的周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

(2)令 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant2x-\frac{\pi}{6}\leqslant2k\pi+\frac{3\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $k\pi+\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{5\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$，故函数的单调递减区间为 $\left[k\pi+\frac{\pi}{3},k\pi+\frac{5\pi}{6}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$.

(3)列表：

x	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{13\pi}{12}$
$2x-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	0	3	0	-3	0

描点、连线如图所示：



8. **解**：(1)由 $T=\frac{2\pi}{|\omega|}=\pi$ 且 $\omega>0$，得 $\omega=2$.

(2)当 $2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$，即 $x=k\pi+\frac{5}{12}\pi(k\in\mathbf{Z})$ 时函数取得最大值，最大值为 2.

【能力提升】

1. B

2. C **解析**：由图像可知，该函数不关于原点、y 轴对称，为非奇非偶函数，最大值为 2.

$\frac{T}{4}=\frac{\pi}{3}-\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=\pi$，所以最小正周期是 4π. 因为 $\frac{2\pi}{\omega}=4\pi$，所以 $\omega=\frac{1}{2}$. 令 $\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{3}+\varphi=0$，得 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$.

3. **解**：(1)由表可知 $A=3$，

$T=\frac{5\pi}{6}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\pi$，因为 $T=\frac{2\pi}{\omega}$，故 $\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，

解得 $\omega=2$，

所以 $y=3\sin(2x+\varphi)$.

因为函数图像过点 $\left(\frac{\pi}{12},3\right)$，