数　学

（拓展模块一）上册

选题策划：金颖杰
责任编辑：苏　莉
封面设计：刘文东

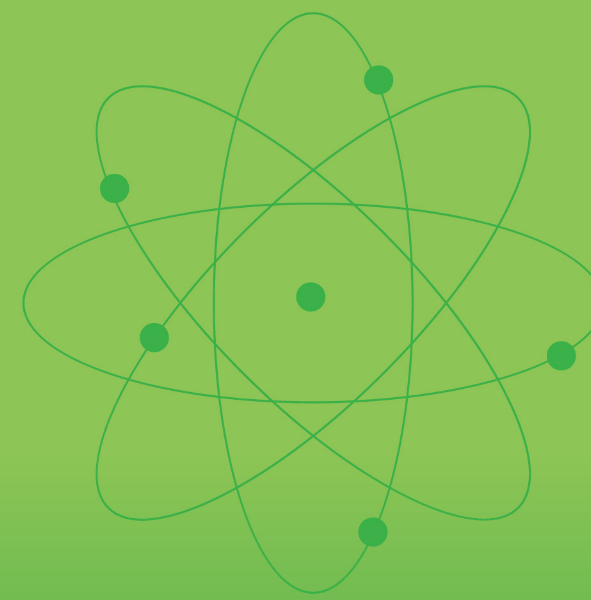
ISBN 978-7-5661-3706-7

定价：35.00元

数学（拓展模块一）上册

主编　赵培勇

哈尔滨工程大学出版社
Harbin Engineering University Press



数　学

主编　赵培勇

（拓展模块一）上册

哈尔滨工程大学出版社
Harbin Engineering University Press

数 学

主　编　赵培勇
副主编　钟流福

（拓展模块一）上册

哈尔滨工程大学出版社
Harbin Engineering University Press

内 容 简 介

本书共分为 5 个单元，内容包括命题与充要条件、三角计算、数列、平面向量、圆锥曲线。

本书既可作为中等职业学校各专业学生的教学用书，也可作为广大中等职业学校学生的学习资料。

图书在版编目(CIP)数据

数学. 拓展模块一 上册 / 赵培勇主编. —哈尔滨：哈尔滨工程大学出版社，2023.1(2025.7 重印)

ISBN 978-7-5661-3706-7

Ⅰ.①数… Ⅱ.①赵… Ⅲ.①数学课 - 中等专业学校 - 教学参考资料 Ⅳ.①G634.603

中国国家版本馆 CIP 数据核字(2023)第 015286 号

数学(拓展模块一)上册

SHUXUE(TUOZHAN MOKUAI YI)SHANGCE

选题策划 金颖杰
责任编辑 苏 莉
封面设计 刘文东

出版发行 哈尔滨工程大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区南通大街 145 号
邮政编码 150001
电 话 0451-82519989
经 销 新华书店
印 刷 三河市骏杰印刷有限公司
开 本 850 mm×1 168 mm 1/16
印 张 10.75
字 数 222 千字
版 次 2023 年 1 月第 1 版
印 次 2025 年 7 月第 3 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5661-3706-7
定 价 35.00 元

http://www.hrbeupress.com

E-mail:heupress@hrbeu.edu.cn

前言 PREFACE

本教材是根据教育部颁布的2020年版《中等职业学校数学课程标准》（以下简称《课程标准》）规定的课程目标和课程内容，紧密结合中等职业学校的教学实际编写而成的，旨在帮助学生掌握必要的数学基础知识，提升他们的计算技能、计算工具使用技能和数据处理技能，培养他们的观察能力、空间想象能力、分析与解决问题能力和数学思维能力，为他们学习专业知识、掌握职业技能、继续学习和终身发展奠定基础.

本教材所选取的内容均为《课程标准》中规定的学生必修的基础性内容，符合《课程标准》规定的"教学要求".

本教材的编写特色主要体现在以下几个方面.

1. 突出基础性，着眼于中职数学教学的实际

本教材的编写遵循学生认知的发展规律，在保证科学性的基础上，知识点的讲述由已知到未知，由浅入深，由具体到抽象；从学生的实际出发，既做到与九年义务教育阶段相衔接，又兼顾与专业课程相衔接.

2. 体现时代特征，突出数学与现代信息技术的结合

随着现代信息技术的不断发展，数学的教学手段和方法也在不断更新. 本教材的编写不但落实了《课程标准》对计算器的使用要求，还落实了《课程标准》对计算机软件的使用要求，旨在培养学生的计算能力和数据处理能力，加强学生对数学的理解；同时，本教材利用软件的强大功能为教师教学提供更直观、更高效的教学手段.

3. 注重学生的参与，紧密结合学生生活中的实际问题

本教材在编写过程中最大可能地强调学生的参与. 因此，本教材在讲解知识的过程中不但设计了"想一想""议一议""做一做"等栏目，而且从生活实际问题入手引出数学概念，利用数学知识解决这些问题，让学生的思维活跃起来，以达到激发他们的学习兴趣、提升他们的数学知识应用能力的目标.

本教材内容主要包括命题与充要条件、三角计算、数列、平面向量、圆锥曲线.

本书由赵培勇(郑州财税金融职业学院)担任主编,由钟流福(南雄市中等职业学校)担任副主编.

由于编者水平有限,书中难免存在不妥之处,敬请读者批评指正,提出宝贵的意见和建议.

编　者

目录

CONTENTS

第1单元 命题与充要条件

1.1 命　　题

1.1.1 命题的概念

用语言、符号或式子表达的,可以判断真假的陈述句叫作**命题**. 其中,正确的命题称为**真命题**,错误的命题称为**假命题**.

例如:

(1)$1+1=2$;

(2)河北的省会是石家庄;

(3)所有的自然数都大于零;

(4)$\varnothing=\{0\}$.

这些语句都是命题,其中(1)(2)是真命题,(3)(4)是假命题.

又如:

$1+1=2$ 吗?

姚明长得真高!

请不要迟到.

这些语句都不是命题,因为疑问句、感叹句和祈使句都不可以判断真假,不满足命题的定义.

为方便起见,常用大写字母 P,Q,R 等作为命题的记号.

做一做

下面的语句哪些是命题? 哪些不是命题? 如果是命题,请指出其真假.

(1)我国的四大发明不包括造纸术;

(2)42 不能被 3 整除；

(3)5 是偶数；

(4)请你现在来一下办公室.

1.1.2 四种命题

1. 原命题和逆命题

一般地，对于两个命题，如果一个命题的条件和结论分别是另一个命题的结论和条件，那么我们把这样的两个命题称为**互逆命题**. 其中一个命题称为**原命题**，另一个命题称为原命题的**逆命题**.

也就是说，如果原命题为

“若 p，则 q”

那么它的逆命题为

“若 q，则 p”

例如，将命题“若 $a=b$，则 $a^2=b^2$”的条件和结论互换，就得到它的逆命题“若 $a^2=b^2$，则 $a=b$”.

2. 否命题

如果一个命题的条件和结论恰好是另一个命题条件的否定和结论的否定，我们把这样的两个命题称为**互否命题**. 如果把其中一个命题称为**原命题**，那么另一个命题称为原命题的**否命题**.

也就是说，如果原命题为

“若 p，则 q”

那么它的否命题为

“若非 p，则非 q”

为书写简便，常将否命题记为

“若 $\neg p$，则 $\neg q$”

例如，如果原命题是“若 $a=b$，则 $a^2=b^2$”，那么它的否命题是“若 $a\neq b$，则 $a^2\neq b^2$”.

想一想

如果原命题是真命题，那么它的逆命题、否命题和逆否命题是真命题吗？

3. 逆否命题

如果一个命题的条件和结论恰好是另一个命题结论的

否定和条件的否定,我们把这样的两个命题称为**互为逆否命题**. 如果把其中一个命题称为**原命题**,那么另一个命题称为原命题的**逆否命题**.

也就是说,如果原命题为

“若 p,则 q”

那么它的逆否命题为

“若非 q,则非 p”

同理,常将逆否命题记为

“若 $\neg q$,则 $\neg p$”

例如,如果原命题是“若 $a=b$,则 $a^2=b^2$”,那么它的逆否命题是“若 $a^2\neq b^2$,则 $a\neq b$”.

综上可知,设命题“若 p,则 q”为**原命题**,那么

- 命题“若 q,则 p”是原命题的**逆命题**;
- 命题“若 $\neg p$,则 $\neg q$”是原命题的**否命题**;
- 命题“若 $\neg q$,则 $\neg p$”是原命题的**逆否命题**.

4. 四种命题间的相互关系

原命题、逆命题、否命题和逆否命题之间的相互关系如图 1-1 所示.

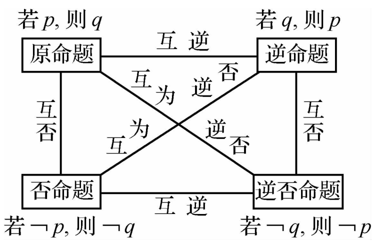


图 1-1

一般地,四种命题的真假性之间具有以下关系:

- 如果两个命题互为逆否命题,那么它们具有相同的真假性(同为真命题或同为假命题);
- 如果两个命题为互逆命题或互否命题,它们的真假性没有关系.

例如,在以下四个命题中:

(1)若 a,b 都是偶数,则 $a+b$ 是偶数;

(2)若 $a+b$ 是偶数,则 a,b 都是偶数;

(3)若 a,b 不都是偶数,则 $a+b$ 不是偶数;

(4)若 $a+b$ 不是偶数,则 a,b 不都是偶数.

若设命题(1)是原命题，显然命题(2)(3)(4)分别是它的逆命题、否命题和逆否命题.

此外，我们发现，命题(2)(3)互为逆否命题，命题(2)(4)互为否命题，命题(3)(4)互为逆命题.

不难判断，原命题(1)是真命题，它的逆命题(2)是假命题，它的否命题(3)是假命题，而它的逆否命题(4)是真命题.

总结而言，命题(1)(4)互为逆否命题，它们同为真命题；命题(2)(3)互为逆否命题，它们同为假命题；其他两两命题的真假性之间没有关系.

例 1　下列语句中哪些是命题？是真命题还是假命题？

(1)矩形的对角线相等；

(2)垂直于同一条直线的两条直线必平行吗？

(3)对角线互相垂直的四边形是菱形；

(4)两个全等三角形的面积相等；

(5)若方程 $x^2+a=0$ 无实根，则 $a\geqslant 0$；

(6)$x>13$.

分析　判断一个语句是不是命题，要看它是否符合“是陈述句”和“可以判断真假”这两个条件.

解　在上面 6 个语句中，(2)不是陈述句，所以它不是命题；(6)虽然是陈述句，但因为无法判断它的真假，所以也不是命题；其余 4 个都是陈述句，而且都可以判断真假，所以它们都是命题，其中(1)(4)是真命题，(3)(5)是假命题.

例 2　写出命题“若 $xy=0$，则 $x=0$ 或 $y=0$”的逆命题、否命题和逆否命题.

解　原命题：若 $xy=0$，则 $x=0$ 或 $y=0$.

逆命题：若 $x=0$ 或 $y=0$，则 $xy=0$.

否命题：若 $xy\neq 0$，则 $x\neq 0$ 且 $y\neq 0$.

逆否命题：若 $x\neq 0$ 且 $y\neq 0$，则 $xy\neq 0$.

例 3　将下列命题改写成“若 p，则 q”的形式，同时写出它的逆命题、否命题和逆否命题，并分别判断它们的真假.

(1)负数的立方是负数;

(2)个位上数字为 0 的整数能被 5 整除.

解 (1)原命题可以改写成:若一个数是负数,则这个数的立方是负数.

逆命题:若一个数的立方是负数,则这个数是负数.

否命题:若一个数不是负数,则这个数的立方不是负数.

逆否命题:若一个数的立方不是负数,则这个数不是负数.

原命题、逆命题、否命题和逆否命题均是真命题.

(2)原命题可以改写成:若一个整数的个位上数字为 0,则它能被 5 整除.

逆命题:若一个整数能被 5 整除,则它的个位上数字为 0.

否命题:若一个整数的个位上数字不为 0,则它不能被 5 整除.

逆否命题:若一个整数不能被 5 整除,则它的个位上数字不为 0.

原命题和逆否命题是真命题,逆命题和否命题是假命题.

做一做

1. 下列语句中哪些是命题? 是真命题还是假命题?

(1)$|-1|=1$;

(2)$x^2-1=0$;

(3)$1+1>2$;

(4)等边三角形不是等腰三角形;

(5)$2\,014^{50}$是个大数;

(6)若一个三角形的两个角相等,则这个三角形的两条边相等.

2. 指出下列命题中的条件 p 和结论 q,并判断它们的真假.

(1)若 x,y 互为倒数,则 $xy=1$;

(2)若一个数是负数,则它的平方是正数;

(3)若 $a>b$,则 $ac^2>bc^2$.

3. 写出下列命题的逆命题、否命题和逆否命题，并判断它们的真假：

(1)若$|x|=|y|$，则$x=y$；

(2)若$x=1$，则$x^2=1$.

知识卡片

逻辑联结词

在数学中，有时会使用一些联结词，如“且”“或”“非”来联结两个命题，以构成一个新的命题.

下面介绍逻辑联结词“且”“或”“非”的含义和用法. 为叙述方便，通常用小写字母$p,q,r,s,\cdots$表示命题.

1. 且(and)

一般地，用逻辑联结词“且”把命题p和命题q联结起来，就得到一个新命题，记作

$$p\wedge q$$

读作“p且q”.

例如，在下列三个命题中，命题(3)是由命题(1)(2)使用联结词“且”联结而得到的新命题.

(1)10能被2整除；

(2)10能被5整除；

(3)10能被2整除且能被5整除.

我们规定：**当p,q都是真命题时，$p\wedge q$是真命题；当p,q这两个命题中有一个命题是假命题时，$p\wedge q$是假命题.**

在上述三个命题中，命题(1)(2)都是真命题，所以命题(3)是真命题.

2. 或(or)

一般地，用逻辑联结词“或”把命题p和命题q联结起来，就得到一个新命题，记作

$$p\vee q$$

读作“p或q”.

例如，在下列三个命题中，命题(3)是由命题(1)(2)使用联结词“或”联结而得到的新命题.

(1)21是4的倍数；

(2)21 是 7 的倍数;

(3)21 是 4 的倍数或是 7 的倍数.

我们规定:**当 p,q 这两个命题中有一个命题是真命题时,$p \vee q$ 是真命题;当 p,q 这两个命题都是假命题时,$p \vee q$是假命题.**

在上述三个命题中,命题(1)是假命题,命题(2)是真命题,所以命题(3)是真命题.

3. 非(not)

一般地,对一个命题 p 加以否定,就得到一个新命题,记作

$$\neg p$$

读作"非 p"或"p 的否定".

例如,在下列两个命题中,命题(2)是命题(1)的否定.

(1)正方形是矩形;

(2)正方形不是矩形.

显然,**若 p 是真命题,则 $\neg p$ 必是假命题;若 p 是假命题,则 $\neg p$ 必是真命题.**

在上述两个命题中,命题(1)是真命题,命题(2)是假命题.

例 4 用逻辑联结词"且"联结或改写下列命题,并判断它们的真假.

(1)p:矩形的对角线相等,q:矩形的对角线互相平分;

(2)p:15 是 3 的倍数,q:15 是 10 的倍数;

(3)1 既是奇数,又是质数;

(4)12 能被 2 和 3 整除.

解 (1)$p \wedge q$:矩形的对角线相等且互相平分.

因为 p 是真命题,q 是真命题,所以 $p \wedge q$ 是真命题.

(2)$p \wedge q$:15 是 3 的倍数且是 10 的倍数.

因为 p 是真命题,q 是假命题,所以 $p \wedge q$ 是假命题.

(3)命题"1 既是奇数,又是质数"可以改写为"1 是奇数且 1 是质数".

因为"1 是奇数"是真命题,"1 是质数"是假命题,所以这个命题是假命题.

(4)命题"12 能被 2 和 3 整除"可以改写为"12 能被 2 整除且 12 能被 3 整除".

因为"12 能被 2 整除"与"12 能被 3 整除"都是真命题,所以这个命题是真命题.

例 5 判断下列命题的真假.

(1)$114 \leqslant 114$;

(2)等腰三角形有一个角是 $90°$或有两个角是 $45°$;

(3)集合 M 是 $M \cup N$ 的子集或是 $M \cap N$ 的子集.

解　(1)命题“$114\leqslant114$”是由命题

$$p:114<114$$

$$q:114=114$$

用“或”联结后构成的新命题，即 $p\vee q$.

因为命题 p 是假命题，命题 q 是真命题，所以命题$p\vee q$是真命题.

(2)命题“等腰三角形有一个角是 90°或有两个角是 45°”是由命题

p:等腰三角形有一个角是 90°

q:等腰三角形有两个角是 45°

用“或”联结后构成的新命题，即 $p\vee q$.

因为命题 p,q 都是假命题，所以命题 $p\vee q$ 是假命题.

(3)命题“集合 M 是$M\cup N$ 的子集或是 $M\cap N$ 的子集”是由命题

p:集合 M 是$M\cup N$ 的子集

q:集合 M 是$M\cap N$ 的子集

用“或”联结后构成的新命题，即 $p\vee q$.

因为命题 p 是真命题，命题 q 是假命题，所以命题$p\vee q$ 是真命题.

例 6　写出下列命题的否定，并判断它们的真假.

(1)p:空集是集合 A 的子集；

(2)p:$7<5$；

(3)p:π 是有理数.

解　(1)$\neg p$:空集不是集合 A 的子集.

命题$\neg p$ 是假命题.

(2)$\neg p$:$7\geqslant5$.

命题$\neg p$ 是真命题.

(3)$\neg p$:π 不是有理数.

命题$\neg p$ 是真命题.

习题 1.1

1. 下列语句中哪些是命题？是真命题还是假命题？

(1)若一个三角形的两条边相等，则这个三角形的两个角相等；

(2)$\sqrt{(-3)^2}=3$；

(3)$x^2-2x-3=0$;

(4)等边三角形不是等腰三角形.

2.将下列命题改写成“若 p,则 q”的形式,并指出条件 p 和结论 q.

(1)平行四边形的对角线互相垂直;

(2)空集是任何集合的真子集;

(3)能被 10 整除的整数一定能被 3 整除;

(4)对顶角相等.

3.写出下列命题的逆命题、否命题和逆否命题,并判断它们的真假.

(1)若整数 a 不能被 2 整除,则 a 是奇数;

(2)若 $x^2+y^2\neq0$,则 x,y 不全为 0;

(3)若 $x=2$,则 $x^2=4$.

1.2　充分条件、必要条件

观察下列推论是否成立：

(a)$x=2$，则 $x^2=4$.

(b)$xy=0$，则 $x=0$.

显然，由(a)中的“$x=2$”一定能推断出“$x^2=4$”；由(b)中的“$xy=0$”不能推断出“$x=0$”，因为有可能 $y=0$.

像上述那样，已知条件 p 和结论 q，则

(1)如果由条件 p 成立可推出结论 q 成立，则说条件 p 是结论 q 的充分条件，记作“$p \Rightarrow q$”. 上述(a)中，条件 p:$x=2$，结论 q:$x^2=4$，即“$x=2$”是“$x^2=4$”的**充分条件**.

(2)如果由结论 q 成立可推出条件 p 成立，则说条件 p 是结论 q 的必要条件，记作“$q \Rightarrow p$(或 $p \Leftarrow q$)”. 上述(b)中，条件 p:$xy=0$，结论 q:$x=0$，即“$xy=0$”是“$x=0$”的**必要条件**.

例　指出下列各组命题中 p 是 q 的什么条件.

(1)p:$x>3$，q:$x>5$；

(2)p:$x-2=0$，q:$(x-2)(x+4)=0$；

(3)p:$-2x>4$，q:$x\leqslant -2$.

解　(1)由条件 $x>3$ 成立不能推出结论 $x>5$ 成立，如 $x=4$ 时，$4>3$ 但 $4<5$，因此 p 不是 q 的充分条件；而由结论 $x>5$ 可以推出条件 $x>3$ 成立，所以 p 是 q 的必要不充分条件.

(2)由条件 $x-2=0$ 能够推出结论 $(x-2)(x+4)=0$ 成立，但是由结论 $(x-2)(x+4)=0$ 不能推出条件 $x-2=0$ 成立，所以 p 是 q 的充分不必要条件.

(3)由条件$-2x>4$成立不能够推出结论$x\leqslant -2$成立,而由结论$x\leqslant -2$成立也不能够推出条件$-2x>4$成立,所以p既不是q的充分条件,也不是q的必要条件.

做一做

填空题.

(1)“$x^2=y^2$”是“$x=y$”的________条件;

(2)“$ac=bc$”是“$a=b$”的________条件;

(3)“$x=0$”是“$xy\neq 0$”的________条件.

习题 1.2

1. 用符号“$\Rightarrow$”“$\Leftarrow$”填空.

(1)$x=2$ ________ $(x-1)(x-2)=0$;

(2)$x>5$ ____________ $x>10$;

(3)$|a|=|b|$ ________ $a=b$(a,b均为实数);

(4)$x=-2$ ________ $x^2=4$;

(5)$a>b$ ________ $ac^2>bc^2$.

2. 指出条件p是结论q的什么条件.

(1)p:a是有理数,q:a是实数;

(2)p:$|x|>0$,q:$x>0$;

(3)p:$x^2+x-6=0$,q:$x=3$;

(4)p:$\sin A=\frac{1}{2}$,q:$A=30°$.

3. 已知p:$a^2>b^3$,q:$a^4>b^6$,求p是q的什么条件.

1.3 充要条件

已知条件 p 和结论 q.

如果 $p \Rightarrow q$,且 $p \Leftarrow q$,那么 p 是 q 的充分且必要条件,简称**充要条件**,记作“$p \Leftrightarrow q$”.

例 已知 p:$-6x>3$,q:$x<-\frac{1}{2}$,p 是 q 的什么条件?

解 由条件 $-6x>3$ 成立能够推出结论 $x<-\frac{1}{2}$ 成立,而由结论 $x<-\frac{1}{2}$ 成立也能够推出条件 $-6x>3$ 成立,所以 p 是 q 的充要条件.

做一做

用符号“$\Rightarrow$”“$\Leftarrow$”“$\Leftrightarrow$”填空.

(1)$x<-1$ 或 $x>2$ ________ $(x-2)(x+1)>0$;

(2)$x>3$ ________ $x>7$;

(3)$\triangle ABC$ 的每个内角都是 $60°$________ $\triangle ABC$ 为等边三角形;

(4)$x \in A \cap B$ ________ $x \in A \cup B$.

习题 1.3

1. 填空题.

(1)“内错角相等”是“两直线平行”的________条件;

(2)“$x=0$ 或 $y=0$”是“$xy=0$”的________条件;

(3)已知 m,n 都是实数,则“$m \neq 0$ 且 $n \neq 0$”是“$mn \neq 0$”的________条件.

2.指出条件 p 是结论 q 的什么条件.

(1)p:$a=0$,q:$a+b=b$;

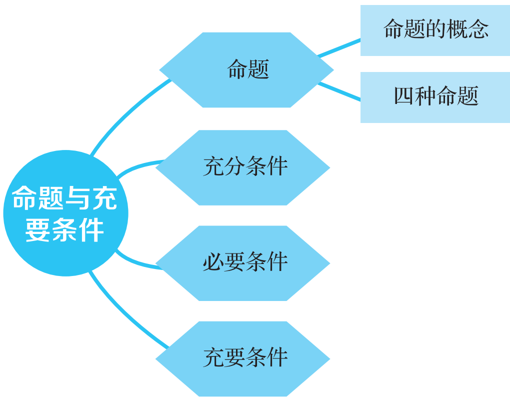
(2)p:$|x|>0$,q:$x^2>0$;

(3)p:$|3x-5|<4$,q:$x<3$.

3.已知方程 $x^2+(2k-1)x+k^2=0$,求"方程有两个大于 1 的不等实根"的充要条件.

整理与复习

知识脉络图



主要知识点

1. 命题

命题是指能够判断真假的语句(陈述句或式子).

2. 充分条件、必要条件

当 $p \Rightarrow q$ 为真时,称 p 是 q 的充分条件,称 q 是 p 的必要条件.

3. 充要条件

如果 $p \Rightarrow q$ 为真且 $q \Rightarrow p$ 为真,则称 p 是 q 的充分必要条件,简称充要条件,也称 p 与 q 等价,记作 $p \Leftrightarrow q$.

本单元练习题

A组

1. 下列命题中,是真命题的是________.

①$3\geqslant 3$;

②100 或 50 是 10 的倍数;

③有两个角是锐角的三角形是锐角三角形;

④等腰三角形至少有两个内角相等.

2. 下列命题中,是假命题的是________.

①$\forall x\in\mathbf{R},2^{x-1}>0$;

②$\forall x\in\mathbf{N}^{+},(x-1)^2>0$;

③$\exists x_0\in\mathbf{R},\lg x_0<1$;

④$\exists x_0\in\mathbf{R},\tan x_0=2$.

3. 下列语句中,是命题的是________,是真命题的是________.

①空集是任何集合的真子集.

②三角函数是周期函数吗?

③一个数不是正数就是负数.

④老师画的图案真漂亮!

⑤若 $x\in\mathbf{R}$,则 $x^2+4x+5>0$.

⑥作$\triangle ABC\cong\triangle A_1B_1C_1$.

4. 用符号“$\Rightarrow$”“$\Leftarrow$”“$\Leftrightarrow$”填空.

(1)$x=1$ ________ $|x|=1$;

(2)$x^2>0$ ________ $x>0$;

(3)$a=b$ ________ $a+c=b+c$;

(4)$x=1$ ________ $x^2-3x+2=0$;

(5)x 是 3 的倍数________x 是 9 的倍数;

(6)$x\in\mathbf{Z}$ ________ $x\in\mathbf{N}$.

5. 指出下列各组中条件 p 是结论 q 的什么条件.

(1)p:$\triangle ABC$ 是等腰三角形,q:$\triangle ABC$ 是等腰直角三角形;

(2)p:$A\subseteq B$,q:$A\cup B=B$;

(3)p:$x>0,y>0$,q:$xy>0$;

(4)p:$x=y$,q:$|x|=|y|$;

(5) p: $ab\neq 0$, q: $a\neq 0$;

(6) p: $x>1$, q: $x^2>x$.

B 组

1. 已知命题 p: $1\in\{x \mid x^2<a\}$,命题 q: $2\in\{x \mid x^2<a\}$.

(1)若“p 或 q”为真命题,求实数 a 的取值范围;

(2)若“p 且 q”为真命题,求实数 a 的取值范围.

2. 求 $x^2-5x-6\leqslant 0$ 的充要条件.

阅读与拓展

全称量词与存在量词

一、全称量词

观察下面的语句：

(1)$x<5$；

(2)$3x+2$ 是整数；

(3)对所有的 $x\in\mathbf{R}$，$x<5$；

(4)对任意一个 $x\in\mathbf{Z}$，$3x+2$ 是整数.

不难发现，语句(1)(2)无法判断真假，因此不是命题. 语句(3)在语句(1)的基础上用短语“对所有的”对变量 x 进行限定，语句(4)在语句(2)的基础上用短语“对任意一个”对变量 x 进行限定，从而使语句(3)(4)成为可以判断真假的语句，因此语句(3)(4)是命题.

“对所有的”“对任意一个”等短语在逻辑中通常称为全称量词，并用符号“$\forall$”表示. 含有全称量词的命题称为全称命题.

例如，命题“所有的等边三角形都相似”“对任意的 $k\in\mathbf{Z}$，$2k$ 是偶数”都是全称命题.

一般地，将含有变量 x 的语句用 $p(x)$，$q(x)$，$r(x)$，…表示，变量 x 的取值范围用 M 表示.

那么，全称命题“对 M 中任意一个 x，有 $p(x)$ 成立”可用符号简记为 $\forall x\in M, p(x)$，读作“对任意 x 属于 M，有 $p(x)$ 成立”.

二、存在量词

观察下面的语句：

(1)$2x-3=1$；

(2)x 能被 3 和 5 整除；

(3)存在一个 $x_0\in\mathbf{R}$，使 $2x_0-3=1$；

(4)至少有一个 $x_0\in\mathbf{Z}$，x_0 能被 3 和 5 整除.

容易判断，语句(1)(2)不是命题. 语句(3)在语句(1)的基础上用短语“存在一个”对变量 x 的取值进行限定，语句(4)在语句(2)的基础上，用“至少有一个”对变量 x 的取值进行限定，从而使语句(3)(4)变成了可以判断真假的语句，因此语句(3)(4)是命题.

“存在一个”“至少有一个”等短语在逻辑中通常称为存在量词，并用符号“$\exists$”表示. 含

有存在量词的命题称为特称命题.

例如，命题“有一个质数是偶数”“有的平行四边形是矩形”都是特称命题.

特称命题“存在 M 中的一个 x_0，使 $p(x_0)$ 成立”可用符号简记为 $\exists x_0 \in M, p(x_0)$，读作“存在一个 x_0 属于 M，使 $p(x_0)$ 成立”.

三、含有一个量词的命题的否定

1. 全称命题的否定

写出下列命题的否定：

(1)所有的菱形都是平行四边形；

(2)每个质数都是奇数；

(3) $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 - x + 1 > 0$.

易知，上面三个命题都是全称命题，即符合形式“$\forall x \in M, p(x)$”.

命题(1)的否定是“并非所有的菱形都是平行四边形”，也就是说，存在一个菱形不是平行四边形；

命题(2)的否定是“并非每个质数都是奇数”，也就是说，存在一个质数不是奇数；

命题(3)的否定是“并非所有的 $x \in \mathbf{R}, x^2 - x + 1 > 0$”，也就是说，$\exists x_0 \in \mathbf{R}, {x_0}^2 - x_0 + 1 \leqslant 0$.

从命题形式看，这三个全称命题的否定都变成了特称命题.

一般地，对于全称命题的否定有下面的结论：对于全称命题 p：$\exists x \in M, p(x)$，它的否定 $\neg p$ 为 $\exists x_0 \in M, p(x_0)$.

全称命题的否定是特称命题.

2. 特称命题的否定

写出下列命题的否定：

(1)有些整数的绝对值是正数；

(2)某些矩形是正方形；

(3) $\exists x_0 \in \mathbf{R}, {x_0}^2 + 1 < 1$.

易知，上面三个命题都是特称命题，即符合形式“$\exists x_0 \in M, \neg p(x_0)$”.

命题(1)的否定是“不存在一个整数，它的绝对值是正数”，也就是说：所有整数的绝对值都不是正数；

命题(2)的否定是“没有一个矩形是正方形”，也就是说：每个矩形都不是正方形；

命题(3)的否定是“不存在 $x_0 \in \mathbf{R}, {x_0}^2 + 1 < 1$”，也就是说：$\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + 1 \geqslant 1$.

从命题形式看，这三个特称命题的否定都变成了全称命题.

一般地，对于特称命题的否定有下面的结论：

对于特称命题 p：$\exists x_0 \in M, p(x_0)$，它的否定 $\neg p$ 为：$\forall x \in M, \neg p(x)$.

特称命题的否定是全称命题.