

策划编辑：刘桂君
责任编辑：谭宏微
封面设计：蒋碧君

• 广西普通高等教育专升本考试 •

专用教材	语文
	数学
	英语
	电子与信息
	财经商贸
考前冲刺卷	教育与体育
	语文
	数学
	英语
	电子与信息
	财经商贸
	教育与体育

ISBN 978-7-5635-7232-8



定价：38.00元

广西普通高等教育专升本考试考前冲刺卷·数学

华腾新思专升本考试研究中心 主编

北京邮电大学出版社



X1



依据最新版《广西普通高等教育专升本考试大纲与说明》编写

广西

华腾新思专升本考试研究中心 主编

普通高等教育专升本考试
考前冲刺卷

数学



北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

广西普通高等教育专升本考试 考前冲刺卷·数学

华腾新思专升本考试研究中心 主编

 北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

内 容 简 介

本书严格依照《广西普通高等教育专科升本科招生考试·数学考试要求》进行编写。全书共有 20 套考前冲刺卷,试题题型、难度、分值设置与广西普通高等教育专升本考试高等数学试卷基本保持一致,能够很好地帮助考生把握重点、找准方向、高效学习、科学备考。考生可以利用本书模拟考试情境,掌握答题速度,巩固所学知识,学习必备的应试技巧,切实提高应试能力。

本书既可以作为参加广西普通高等教育专升本考试的考生的复习资料,也可作为广大专科学校学生的学习资料。

图书在版编目(CIP)数据

广西普通高等教育专升本考试考前冲刺卷·数学 / 华腾新思专升本考试研究中心主编. -- 北京: 北京邮电大学出版社, 2024.5(2025.8 重印)

ISBN 978-7-5635-7232-8

I. ①广… II. ①华… III. ①高等数学—成人高等教育—升学参考资料 IV. ①G724.4

中国国家版本馆 CIP 数据核字(2024)第 095123 号

策划编辑: 刘桂君 责任编辑: 谭宏微 封面设计: 蒋碧君

出版发行: 北京邮电大学出版社

社 址: 北京市海淀区西土城路 10 号

邮政编码: 100876

发 行 部: 电话: 010-62282185 传真: 010-62283578

E-mail: publish@bupt.edu.cn

经 销: 各地新华书店

印 刷: 三河市骏杰印刷有限公司

开 本: 787 mm×1 092 mm 1/8

印 张: 7.75

字 数: 189 千字

版 次: 2024 年 5 月第 1 版

印 次: 2025 年 8 月第 2 次印刷

ISBN 978-7-5635-7232-8

定 价: 38.00 元

· 如有印装质量问题,请与北京邮电大学出版社发行部联系 ·

服务电话: 400-615-1233

前 言

为了帮助参加广西普通高等教育专升本考试的考生系统、全面、准确、高效地复习备考,我们特组织省内具有丰富教研经验的教研员,以广西普通高等教育专科升本科招生考试相应科目的考试要求为依据,深入研究近几年广西普通高等教育专升本考试的命题情况,紧密结合考生的学习特点,精心编写了这套广西普通高等教育专升本考试复习丛书。

本书是该套复习丛书之《广西普通高等教育专升本考试考前冲刺卷·数学》,共包括 20 套考前冲刺卷。本书整体难易程度与《广西普通高等教育专科升本科招生考试·数学考试要求》基本一致,旨在为考生营造逼真的模拟环境,帮助考生把握考试的命题特点,强化考生对基础知识的理解与运用,使考生学习必备的应试技巧,切实提高应试能力。本书内容充实,结构严谨,要点突出,指导性强,是广大考生复习备考和储备知识的重要参考资料。

在编写本套复习丛书的过程中,编者广泛征求了在高等院校中长期从事专升本考试研究工作的一线教师的意见,秉承高效、实用的理念打造精品。我们相信,凝聚着众多名师智慧的本套复习丛书定能成为考生通向成功彼岸的金桥,帮助考生到达理想的殿堂!

衷心希望本套复习丛书能为广大考生的复习备考带来实质性的帮助。对书中的不足之处,敬请各位读者不吝指正。

华腾新思专升本考试研究中心

目 录

考前冲刺卷(一)	共 6 页
考前冲刺卷(二)	共 6 页
考前冲刺卷(三)	共 6 页
考前冲刺卷(四)	共 6 页
考前冲刺卷(五)	共 6 页
考前冲刺卷(六)	共 6 页
考前冲刺卷(七)	共 6 页
考前冲刺卷(八)	共 6 页
考前冲刺卷(九)	共 6 页
考前冲刺卷(十)	共 6 页
考前冲刺卷(十一)	共 6 页
考前冲刺卷(十二)	共 6 页
考前冲刺卷(十三)	共 6 页
考前冲刺卷(十四)	共 6 页
考前冲刺卷(十五)	共 6 页
考前冲刺卷(十六)	共 6 页
考前冲刺卷(十七)	共 6 页
考前冲刺卷(十八)	共 6 页
考前冲刺卷(十九)	共 6 页
考前冲刺卷(二十)	共 6 页

考前冲刺卷(一)

一、单项选择题(本大题共 10 小题,每小题 5 分,共 50 分)

在每小题列出的四个备选项中只有一个是符合题目要求的.

1. 函数 $y = \sqrt{16 - x^2}$ 的定义域是().

- A. $[0, 4]$ B. $[-4, 4]$
C. $(-4, 4)$ D. $[-4, 0]$

2. 下列函数中,在区间 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减的是().

- A. $f(x) = \sin x$ B. $f(x) = |\sin x|$
C. $f(x) = \sqrt{1 - \sin x}$ D. $f(x) = \cos x$

3. 函数 $f(x) = \int_2^x e^{-t} dt$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内().

- A. 单调递减,曲线为凹的 B. 单调递减,曲线为凸的
C. 单调递增,曲线为凹的 D. 单调递增,曲线为凸的

4. 若 $F'(x) = \Phi'(x)$,则下列成立的是().

- A. $F(x) - \Phi(x) = 0$ B. $F(x) - \Phi(x) = C$
C. $\int F(x) dx = \int \Phi(x) dx$ D. $\frac{d}{dx} \left(\int F(x) dx \right) = \frac{d}{dx} \left(\int \Phi(x) dx \right)$

5. 当 $x \rightarrow 0$ 时,下列函数前者与后者是等价无穷小的是().

- A. $2x - x^2$ 与 $x^2 - x^3$ B. $1 - \cos x$ 与 x^2
C. $1 - \cos x$ 与 $2 \sin x^2$ D. $\tan x$ 与 $\sin x$

6. 方程 $x^3 - 4x = 1$ 至少存在一个实根在区间()内.

- A. $(-1, 0)$ B. $(0, 1)$
C. $(1, 2)$ D. $(-3, -2)$

7. 方程 $y'' - 6y' + 5y = 0$ 的通解为().

- A. $y = C_1 e^x + C_2 e^{5x}$ B. $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-5x}$
C. $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{5x}$ D. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-5x}$

8. 设 $x_1 = 1, x_2 = 2$ 都是函数 $y = a \ln x + bx^2 + 3x$ 的极值点,则().

- A. $a = 2, b = \frac{1}{2}$ B. $a = -2, b = \frac{1}{2}$
C. $a = 2, b = -\frac{1}{2}$ D. $a = -2, b = -\frac{1}{2}$

9. 若 $\int_a^b f(x) dx = 2, \int_a^b g(x) dx = 1$, 则 $\int_a^b [3f(x) - 2g(x)] dx = ()$.

- A. 1 B. 2
C. 3 D. 4

10. $\frac{d}{dx} \left[x \int_0^x \cos t^4 dt \right] = ()$.

- A. $\int_0^x \cos t^4 dt$ B. $-4x^4 \int_0^x \sin t^4 dt$
C. $\int_0^x \cos t^4 dt + x \cos x^4$ D. $x \cos x^4$

二、填空题(本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分)

11. 函数 $y = x^3 - 2x + 1$ 在区间 $[1, 2]$ 上的最小值为_____.

12. 若函数 $f(x) = \tan x$, 则 $f'(0) =$ _____.

13. 设 $f(x) = \ln x$, 则 $\int e^{2x} f'(e^x) dx =$ _____.

14. $F(x) = \int_{\cos x}^1 \sqrt{1 - t^2} dt$, 则 $F'(\pi) =$ _____.

三、计算题(本大题共 7 小题,每小题 8 分,共 56 分)

15. 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2}{x - 1} - x \right)$.

16. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x - \tan x}$.

17. 设 $f(x) = \begin{cases} a + x^2, & x < 0, \\ 1, & x = 0, \\ \ln(b + x), & x > 0 \end{cases}$ 在点 $x = 0$ 处连续,求 a, b 的值.

18. 已知 y 是 x 的函数,且 $y' = \ln \sqrt{x} + \sqrt{\ln x} + 2 \ln 2$,求 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=e}$.

19. 已知曲线 $x^2 + y^2 = 25$,求曲线在点 $(3, 4)$ 处的切线方程.

20. 求不定积分 $\int \frac{x^2}{1 + 4x^2} dx$.

21. 求定积分 $\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx$.

23. 已知曲线 $y=e^x$ 与直线 $x=0$ 和 $y=e$ 所围成的平面图形,求该图形的面积.

四、应用题(本大题共 2 小题,每小题 12 分,共 24 分)

22. 某公司机床年产量为 x 台,总成本为 C 万元,其中固定成本为 2 万元,每产 100 台成本增加 1 万元,市场上每年可销售此商品 400 台,其销售收入 $R(x)$ (单位:万元)是 x 的函数,问每年生

产多少台时利润最大? 最大利润是多少? 其中, $R(x)=\begin{cases} \frac{1}{25}x-\frac{1}{20\,000}x^2, & 0\leq x\leq 400, \\ 8, & x>400. \end{cases}$

考前冲刺卷(二)

一、单项选择题(本大题共 10 小题,每小题 5 分,共 50 分)

在每小题列出的四个备选项中只有一个是符合题目要求的.

1. 下列函数对中,互为反函数的是().

A. $y=\sin x, y=\cos x$ B. $y=3^x, y=3^{-x}$

C. $y=\tan x, y=\cot x$ D. $y=x^3, y=\sqrt[3]{x}$

2. 当 $x \rightarrow 0$ 时,下列函数为无穷小量的是().

A. $\frac{\sin x}{x}$ B. $x \sin x$

C. $\frac{\cos x}{x}$ D. $1 - \sin x$

3. 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} = ()$.

A. 0 B. $\frac{1}{2}$

C. 1 D. 2

4. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ 的拐点是().

A. (0, 3) B. 0

C. 1 D. (1, 1)

5. 若函数 $f(x) = x^{2020} + 2020x$, 则 $f'(1) = ()$.

A. 2020 B. 3030

C. 4040 D. 5050

6. 设 $\lim_{x \rightarrow 0} [\cos x - f(x)] = 1$, 则下列等式正确的是().

A. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ B. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \cos x = 1$

C. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$ D. $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) + \cos x] = 1$

7. 函数 $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ 的极小值点是().

A. $x = -1$ B. $x = 0$

C. $x = 1$ D. $x = 2$

8. 已知 3^x 是函数 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $f(x) = ()$.

A. 3^x B. $3^x \ln 3$

C. $x3^{x-1}$ D. $\frac{3^x}{\ln 3}$

9. 设 $y + \ln 2x = 2$, 则 $dy = ()$.

A. $-\frac{2}{x}dx$ B. $-\frac{1}{x}dx$

C. $\frac{1}{x}dx$ D. $\frac{2}{x}dx$

10. 不定积分 $\int \cot x dx = ()$.

A. $\ln |\sin x| + C$ B. $-\ln |\sin x| + C$

C. $\ln |\cos x| + C$ D. $-\ln |\cos x| + C$

二、填空题(本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分)

11. 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{kx} = e^2$, 则 $k =$ _____.

12. $x = 1$ 为函数 $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ 的 _____ 间断点.

13. 微分方程 $y'' - 4y' + 4y = 0$ 的通解为 _____.

14. 定积分 $\int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} \sin x dx =$ _____.

三、计算题(本大题共 7 小题,每小题 8 分,共 56 分)

15. 设 $f(x)$ 是一次函数,且 $f[f(x)] = 4x + 3$,求 $f(x)$.

16. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2 - 1)}{x - 1}$.

17. 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x + 1}{x^3 + x^2 + 1}$.

18. 若函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}, & x \neq 1, \\ a, & x = 1 \end{cases}$ 在点 $x = 1$ 处连续,求 a 的值.

19. 设 $y = 2^x + x^x (x > 0)$,求 $\frac{dy}{dx}$.

20. 求不定积分 $\int \sin(2x - 1) dx$.

21. 求定积分 $\int_1^3 x e^x dx$.

23. 设函数 $f(x) = x e^{-x}$, 求函数 $f(x)$ 的定义域和单调区间.

四、应用题(本大题共 2 小题,每小题 12 分,共 24 分)

22. 设曲线 $y = x - x^2$ 与 x 轴所围成的封闭图形为 D , 求 D 的面积.

考前冲刺卷(三)

一、单项选择题(本大题共 10 小题,每小题 5 分,共 50 分)

在每小题列出的四个备选项中只有一个是符合题目要求的.

1. 若 $f(x) = \begin{cases} -1, & x < -2, \\ 0, & -2 \leq x < 2, \\ 1, & x \geq 2, \end{cases}$ 则 $f[f(2)] = (\quad)$.

- A. -1 B. 0
C. 1 D. 2

2. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\tan 2x$ 是 x 的().

- A. 高阶无穷小 B. 低阶无穷小
C. 等价无穷小 D. 同阶非等价无穷小

3. 下列各式中正确的是().

- A. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = e^2$ B. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1+x)^{\frac{2}{x}} = e^2$
C. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = e^2$ D. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^x = e$

4. 下列微分方程中,属于一阶可分离变量微分方程的是().

- A. $y^2 dx + (x+y)dy = 0$ B. $dx + (x^2 + y)dy = 0$
C. $\frac{dy}{dx} = xy^2 + x$ D. $\frac{d^2 y}{dx^2} = xy$

5. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0, \\ 2, & x = 0, \\ \cos x, & x > 0, \end{cases}$ 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = (\quad)$.

- A. 等于 1 B. 等于 2
C. 等于 1 或 2 D. 不存在

6. 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = 4$, 则常数 $a = (\quad)$.

- A. $\ln 2$ B. $2 \ln 2$
C. 1 D. 4

7. 已知函数 $f(x) = ax + \frac{b}{x}$ 在点 $x = -1$ 处取得极大值, 则常数 a, b 应满足条件().

- A. $a-b=0, b < 0$ B. $a-b=0, b > 0$
C. $a+b=0, b < 0$ D. $a+b=0, b > 0$

8. 下列函数中,在区间 $[-1, 1]$ 上满足罗尔定理所有条件的是().

- A. $y = 2x + 1$ B. $y = |x| - 1$
C. $y = x^2 + 1$ D. $y = \frac{1}{x^2} - 1$

9. 广义积分 $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx = (\quad)$.

- A. 0 B. $\frac{1}{2}$
C. $-\frac{1}{2}$ D. 不存在

10. 已知 $\int f(x) dx = \tan x + C$, $\int g(x) dx = 2^x + C$, C 为任意常数, 则下列等式正确的是

().

- A. $\int [f(x)g(x)] dx = 2^x \tan x + C$ B. $\int \frac{f(x)}{g(x)} dx = 2^{-x} \tan x + C$
C. $\int f[g(x)] dx = \tan(2^x) + C$ D. $\int [f(x) + g(x)] dx = \tan x + 2^x + C$

二、填空题(本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分)

11. 极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2-1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

12. 设函数 $y = e^{x-2}$, 则 $y' = \underline{\hspace{2cm}}$.

13. $\int_{-1}^1 (2 \sin x^5 + 3) dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. 曲线 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 3$ 在点 $(2, -1)$ 处的切线方程为 $y = \underline{\hspace{2cm}}$.

三、计算题(本大题共 7 小题,每小题 8 分,共 56 分)

15. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{1 - \sqrt{1 + 2x}}$.

16. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - 1}{x^2}$.

17. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + ax}{\sin x}, & x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}, \\ 2, & x = 0 \end{cases}$ 在点 $x = 0$ 处连续,求 a 的值.

18. 已知函数 $y = f(x)$ 由方程 $e^y + 2xy = x^2$ 确定,求 $y'(x)$.

19. 求不定积分 $\int 2x \cos 3x dx$.

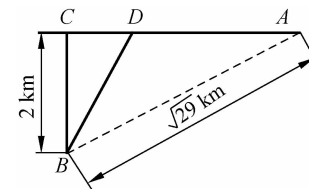
20. 求定积分 $\int_1^e \frac{1 + \ln x}{x} dx$.

21. 设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 2, \\ 6-x, & x > 2. \end{cases}$ 已知 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, 求 $F(x)$ 表达式, 并讨论 $F(x)$ 在点 $x=2$ 处的连续性.

四、应用题(本大题共 2 小题, 每小题 12 分, 共 24 分)

22. 已知平面图形 D 由曲线 $y = e^x$ 和直线 $y = x, x = 0, x = 1$ 围成, 求 D 的面积 A .

23. 设 A 生活区位于一直线河 AC 的岸边, B 生活区与河岸的垂足 C 相距 2 km, 且 A, B 生活区相距 $\sqrt{29}$ km. 现需要在河岸边修建一个水厂 D (如图所示), 向 A, B 生活区供水. 已知从水厂 D 向 A, B 生活区铺设水管的费用分别是 30 万元/km 和 50 万元/km, 求当水厂 D 建在离 C 多远时, 才能使铺设水管的总费用最省?



广西普通高等教育专升本考试
考前冲刺卷·数学
参考答案及解析

目 录

考前冲刺卷(一)参考答案及解析	1
考前冲刺卷(二)参考答案及解析	3
考前冲刺卷(三)参考答案及解析	5
考前冲刺卷(四)参考答案及解析	8
考前冲刺卷(五)参考答案及解析	11
考前冲刺卷(六)参考答案及解析	13
考前冲刺卷(七)参考答案及解析	16
考前冲刺卷(八)参考答案及解析	19
考前冲刺卷(九)参考答案及解析	22
考前冲刺卷(十)参考答案及解析	24
考前冲刺卷(十一)参考答案及解析	27
考前冲刺卷(十二)参考答案及解析	29
考前冲刺卷(十三)参考答案及解析	32
考前冲刺卷(十四)参考答案及解析	35
考前冲刺卷(十五)参考答案及解析	37
考前冲刺卷(十六)参考答案及解析	40
考前冲刺卷(十七)参考答案及解析	43
考前冲刺卷(十八)参考答案及解析	46
考前冲刺卷(十九)参考答案及解析	49
考前冲刺卷(二十)参考答案及解析	52

考前冲刺卷(一)参考答案及解析

一、单项选择题

1.【答案】B

【解析】由 $16-x^2 \geq 0$ 得 $-4 \leq x \leq 4$, 所以函数的定义域为 $[-4, 4]$.

2.【答案】C

【解析】由复合函数的单调性可知 $f(x) = \sqrt{1-\sin x}$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减.

3.【答案】D

【解析】 $f'(x) = e^{-x}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内恒大于 0, 所以函数单调递增; $f''(x) = -e^{-x}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内恒小于 0, 所以函数是凸的.

4.【答案】B

【解析】依据不定积分的概念知, 原函数之间差一个常数 C .

5.【答案】D

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\sin x} = 1$, 所以 $\tan x$ 与 $\sin x$ 是等价无穷小.

6.【答案】A

【解析】设 $f(x) = x^3 - 4x - 1$, 则 $f(-1) > 0$, $f(0) < 0$, 根据零点定理知, 函数 $f(x)$ 在区间 $(-1, 0)$ 内至少有一个零点.

7.【答案】A

【解析】微分方程对应的特征方程为 $r^2 - 6r + 5 = 0$, 求得其特征根为 $r_1 = 1, r_2 = 5$, 所以其通解为 $y = C_1 e^x + C_2 e^{5x}$.

8.【答案】D

【解析】 $y' = \frac{a}{x} + 2bx + 3$, 依题意得 $y'|_{x=1} = 0, y'|_{x=2} = 0$, 联立这两个方程解得 $a = -2, b = -\frac{1}{2}$.

9.【答案】D

【解析】 $\int_a^b [3f(x) - 2g(x)] dx = 3 \int_a^b f(x) dx - 2 \int_a^b g(x) dx = 3 \times 2 - 2 \times 1 = 4$.

10.【答案】C

【解析】 $\frac{d}{dx} \left[x \int_0^x \cos t^4 dt \right] = \int_0^x \cos t^4 dt + x \cos x^4$.

二、填空题

11.【答案】0

【解析】在给定区间内 $y' = 3x^2 - 2 > 0$, 所以原函数在区间内单调递增, 最小值点在左端点, 将 $x = 1$ 代入, 得最小值为 0.

12.【答案】1

【解析】 $f'(x) = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$, 故 $f'(0) = 1$.

13.【答案】 $e^x + C$

【解析】 $f'(x) = \frac{1}{x}$, $f'(e^x) = e^{-x}$, 则 $\int e^{2x} f'(e^x) dx = \int e^{2x} e^{-x} dx = e^x + C$.

14.【答案】0

【解析】 $F'(x) = \sin x \cdot |\sin x|$, $F'(\pi) = 0$.

三、计算题

15.【解析】 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2}{x - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2 - x(x - 1)}{x - 1}$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2 - x^2 + x}{x - 1}$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 2}{x - 1} = 1.$

16.【解析】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x - \tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{1 - \sec^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{-\tan^2 x} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{x^2} = -3.$

17.【解析】 $f(0) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \ln b$, 因为在 $x = 0$ 处连续, 所以 $1 = a = \ln b$, 得 $a = 1, b = e$.

18.【解析】 $y'' = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot (\sqrt{x})' + \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} \cdot (\ln x)' = \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$, 故 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=e} = y''(e) = \frac{1}{2e} + \frac{1}{2e} = \frac{1}{e}.$

19.【解析】两边对 x 求导得 $2x + 2yy' = 0$, 则 $y' \Big|_{\substack{x=3 \\ y=4}} = -\frac{3}{4}$, 根据点斜式有切线方程: $y - 4 = -\frac{3}{4}(x - 3)$,
化为一般式为 $4y + 3x - 25 = 0$.

20.【解析】 $\int \frac{x^2}{1 + 4x^2} dx = \int \frac{x^2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}}{1 + 4x^2} dx = \int \frac{1}{4} dx - \frac{1}{4} \int \frac{1}{1 + 4x^2} dx$
 $= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \int \frac{1}{1 + (2x)^2} d(2x) = \frac{1}{4}x - \frac{1}{8} \arctan 2x + C.$

21.【解析】令 $t = \sqrt{x-1}$, 则 $x = t^2 + 1$, $dx = 2t dt$, $x = 1 \Rightarrow t = 0$, $x = 2 \Rightarrow t = 1$, 则原式 $= 2 \int_0^1 \frac{t^2 + 1}{t} t dt =$
 $2 \int_0^1 (t^2 + 1) dt = \left(\frac{2}{3} t^3 + 2t \right) \Big|_0^1 = \frac{8}{3}.$

四、应用题

22.【解析】设每年的产量为 x 百台时利润为 y 万元,

$$\text{则 } y = R(x) - C(x) = \begin{cases} \frac{x}{25} - \frac{x^2}{20\,000} - \frac{x}{100} - 2, & 0 \leq x \leq 400, \\ 8 - \frac{x}{100} - 2, & x > 400, \end{cases}$$

$$y' = \begin{cases} \frac{3}{100} - \frac{x}{10\,000}, & 0 \leq x \leq 400, \\ -\frac{1}{100}, & x > 400, \end{cases}$$

令 $y'=0$ 得 $x=300$ (唯一驻点),

根据实际问题的性质可知,

当每年生产 300 台时利润最大,最大利润为 2.5 万元.

23. 【解析】 $S = \int_0^1 (e - e^x) dx = (ex - e^x) \Big|_0^1 = 1.$

考前冲刺卷(二)参考答案及解析

一、单项选择题

1. 【答案】D

【解析】A 选项中函数不互为反函数; B, C 选项中函数互为倒数; D 选项中, $y=x^3 \Rightarrow x=\sqrt[3]{y} \Rightarrow y=\sqrt[3]{x}$, 互为反函数.

2. 【答案】B

【解析】选项 A 中 $x \rightarrow 0$ 时, $\frac{\sin x}{x} \sim 1$; 选项 C 中 $x \rightarrow 0$ 时, $\frac{\cos x}{x} \sim \infty$; 选项 D 中 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - \sin x \sim 1 - x$; 选项 B 中 $x \rightarrow 0$ 时, $x \sin x \sim x^2$, 是比 x 高阶的无穷小量, 故选 B.

3. 【答案】D

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x} = 2.$

4. 【答案】D

【解析】 $f'(x) = 3x^2 - 6x$, $f''(x) = 6x - 6$, 令 $f''(x) = 0$, 解得 $x = 1$. 当 $x > 1$ 时, $f''(x) > 0$; 当 $x < 1$ 时, $f''(x) < 0$, 且 $f(1) = 1$, 故拐点为 $(1, 1)$.

5. 【答案】C

【解析】因为 $f(x) = x^{2020} + 2020x$, 所以 $f'(x) = 2020x^{2019} + 2020$, 故 $f'(1) = 4040$. 选 C.

6. 【答案】D

【解析】因为 $\lim_{x \rightarrow 0} [\cos x - f(x)] = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在且 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \cos x = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) + \cos x] = 0 + 1 = 1$.

7. 【答案】C

【解析】 $f'(x) = 6x^2 - 6x$, 令 $f'(x) = 0$, 则 $x = 0$ 或 1 . 又 $f''(x) = 12x - 6$, 所以 $f''(0) = -6 < 0$, $f''(1) = 6 > 0$, 由极值的第二充分条件知, $f(1)$ 为极小值, $x = 1$ 为极小值点.

8. 【答案】B

【解析】由题意知 $f(x) = (3^x)' = 3^x \ln 3$.

9. 【答案】B

【解析】由 $y + \ln 2x = 2$ 可得 $y = 2 - \ln 2x$, $dy = (2 - \ln 2x)' = -\frac{1}{x} dx$.

10. 【答案】A

【解析】不定积分 $\int \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{1}{\sin x} d(\sin x) = \ln |\sin x| + C$.

二、填空题

11.【答案】2

【解析】因为 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{kx} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]^k = e^k = e^2$, 故 $k=2$.

12.【答案】可去

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$, 故 $x=1$ 是函数的可去间断点.

13.【答案】 $y = (C_1 + C_2 x)e^{2x}$, 其中 C_1, C_2 为任意常数

【解析】方程对应的特征方程为 $r^2 - 4r + 4 = 0$, 解得特征根 $r_{1,2} = 2$, 为二重根, 故方程的通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^{2x}$, 其中 C_1, C_2 为任意常数.

14.【答案】0

【解析】令 $f(x) = \sqrt{1-x^2} \sin x$, 则 $f(-x) = \sqrt{1-x^2} \sin(-x) = -\sqrt{1-x^2} \sin x = -f(x)$, 故 $f(x)$ 是奇函数, 故 $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \sin x dx = 0$.

三、计算题

15.【解析】设 $f(x) = ax + b (a \neq 0)$, 则

$$f[f(x)] = af(x) + b = a(ax + b) + b = a^2x + ab + b,$$

$$\therefore \begin{cases} a^2 = 4, \\ ab + b = 3, \end{cases} \therefore \begin{cases} a = 2, \\ b = 1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a = -2, \\ b = -3, \end{cases}$$

$$\therefore f(x) = 2x + 1 \text{ 或 } f(x) = -2x - 3.$$

16.【解析】 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2 - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = 2$.

17.【解析】原式 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2x}{x^3} + \frac{1}{x^3}}{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}} = 1$.

18.【解析】因为 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续, 故 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$,

$$\text{又 } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x}+1) = 2,$$

$$f(1) = a, \text{ 故 } a = 2.$$

19.【解析】 $y = 2^x + x^x = 2^x + e^{x \ln x}$,

$$\text{故 } \frac{dy}{dx} = (2^x)' + (e^{x \ln x})' = 2^x \ln 2 + e^{x \ln x} (\ln x + 1) = 2^x \ln 2 + x^x (\ln x + 1).$$

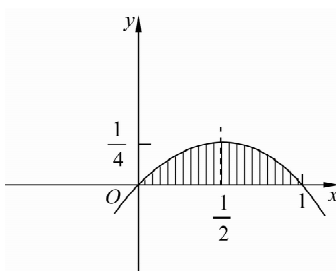
20.【解析】原式 $= \frac{1}{2} \int \sin(2x-1) d(2x-1)$

$$= -\frac{1}{2} \cos(2x-1) + C.$$

$$\begin{aligned}
 21. \text{【解析】原式} &= \int_1^3 x \mathrm{d}e^x = x e^x \Big|_1^3 - \int_1^3 e^x \mathrm{d}x \\
 &= 3e^3 - e - e^x \Big|_1^3 = 3e^3 - e - (e^3 - e) = 2e^3.
 \end{aligned}$$

四、应用题

$$22. \text{【解析】} y = x - x^2 = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}.$$



如图所示,以 x 为积分变量,所求阴影面积为

$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^1 (x - x^2) \mathrm{d}x \\
 &= \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{6}.
 \end{aligned}$$

23. 【解析】 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$.

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= e^{-x} + x \cdot e^{-x}(-1) \\
 &= e^{-x}(1 - x).
 \end{aligned}$$

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = 1$, 列表如下:

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	极大值	↘

如表所示, $f(x)$ 在 $(-\infty, 1]$ 上单调递增, 在 $[1, +\infty)$ 上单调递减.

考前冲刺卷(三)参考答案及解析

一、单项选择题

1. 【答案】B

【解析】由题意得 $f(2) = 1$, 所以 $f[f(2)] = f(1) = 0$.

2. 【答案】D

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sec^2 2x}{1} = 2$, 所以无穷小 $\tan 2x$ 是 x 的同阶非等价无穷小.

3.【答案】A

【解析】 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2} \cdot 2} = \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^2 = e^2$.

4.【答案】C

【解析】根据定义即可判断.

5.【答案】A

【解析】因为 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \cos x = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x+1) = 1$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

6.【答案】B

【解析】 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a} \cdot a} = e^a = 4$, 所以 $a = \ln 4 = 2\ln 2$, 故选 B.

7.【答案】B

【解析】 $f'(x) = a - \frac{b}{x^2}$, $f''(x) = \frac{2b}{x^3}$, 因为 $f(x)$ 在点 $x = -1$ 处取得极大值, 则 $f'(-1) = a - b = 0$,
 $f''(-1) = -2b < 0$, 即 $b > 0$.

8.【答案】C

【解析】函数 $f(x)$ 满足罗尔定理条件包括:

(1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续; (2) 在开区间 (a, b) 内可导; (3) $f(a) = f(b)$.

选项 C 全部满足, 选项 A 不满足第三条, 选项 B 不满足第二条, 选项 D 不满足第一条.

9.【答案】B

【解析】 $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} d(-x^2) = -\frac{1}{2} e^{-x^2} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{2}$.

10.【答案】D

【解析】由不定积分的可加性知, $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx = \tan x + 2^x + C$.

二、填空题

11.【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(x-1)}{2x} = \frac{1}{2}$.

12.【答案】 e^{x-2}

【解析】 $y' = e^{x-2} (x-2)' = e^{x-2}$.

13.【答案】6

【解析】在 $[-1, 1]$ 上, $\sin x^5$ 是奇函数, 根据定积分的性质可得 $\int_{-1}^1 \sin x^5 dx = 0$, 则 $\int_{-1}^1 (2\sin x^5 + 3) dx =$
 $2 \int_{-1}^1 \sin x^5 dx + \int_{-1}^1 3 dx = 6$.

14.【答案】 $x-3$

【解析】 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 3$ 两边对 x 求导得 $x + 2yy' = 0$, 即 $y' = \frac{-x}{2y}$, 则 $y'|_{(2,-1)} = 1$. 因此曲线在点 $(2, -1)$ 处的切线方程为 $y+1 = x-2$, 即 $y = x-3$.

三、计算题

15.【解析】当 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$, $1 - \sqrt{1+2x} \sim -x$,

$$\text{所以 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{1 - \sqrt{1+2x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{-x} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2} = 0.$$

16.【解析】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \sin x}{2} = \frac{1}{2}.$

17.【解析】函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + ax}{\sin x}, & x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}, \\ 2, & x = 0 \end{cases}$ 在点 $x = 0$ 处连续, 则

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 2.$$

$$\text{而 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + ax}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + a}{\cos x} = a, \text{ 所以 } a = 2.$$

18.【解析】方程两边同时对 x 求导, 得

$$e^y y' + 2y + 2xy' = 2x,$$

$$\text{解得 } y' = \frac{2x - 2y}{e^y + 2x}.$$

19.【解析】 $\int 2x \cos 3x dx = \frac{1}{3} \int 2xd(\sin 3x)$

$$= \frac{1}{3} (2x \sin 3x - 2 \int \sin 3x dx) = \frac{1}{3} (2x \sin 3x + \frac{2}{3} \cos 3x) + C$$

$$= \frac{2}{3} x \sin 3x + \frac{2}{9} \cos 3x + C.$$

20.【解析】 $\int_1^e \frac{1 + \ln x}{x} dx = \int_1^e (1 + \ln x) d(\ln x) = \left(\ln x + \frac{1}{2} \ln^2 x \right) \Big|_1^e = \frac{3}{2}.$

21.【解析】当 $x \leq 2$ 时, $F(x) = \int_0^x t^2 dt = \frac{1}{3} x^3.$

$$\text{当 } x \geq 2 \text{ 时, } F(x) = \int_0^2 t^2 dt + \int_2^x (6 - t) dt = \frac{8}{3} + \left(6t - \frac{1}{2} t^2 \right) \Big|_2^x = 6x - \frac{1}{2} x^2 - \frac{22}{3}.$$

$$\text{故 } F(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} x^3, & x \leq 2, \\ 6x - \frac{1}{2} x^2 - \frac{22}{3}, & x > 2. \end{cases}$$

由于 $F(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} F(x) = \frac{8}{3}$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} F(x) = \frac{8}{3}$, 故函数在 $x = 2$ 处函数值等于极限值,

即 $F(x)$ 在 $x = 2$ 处是连续的.

四、应用题

22.【解析】平面图形 D 的面积 A 为

$$A = \int_0^1 (e^x - x) dx = \left(e^x - \frac{1}{2} x^2 \right) \Big|_0^1 = e - \frac{3}{2}.$$

23.【解析】设 C 点距 D 点 x km, $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = 5$, 则 $AD = 5 - x$, $BD = \sqrt{4 + x^2}$. 则铺设水管的总费用为

$$f(x) = 30(5 - x) + 50\sqrt{4 + x^2} \quad (0 \leq x \leq 5). \text{ 令 } f'(x) = [30(5 - x) + 50\sqrt{4 + x^2}]' = -30 + \frac{50x}{\sqrt{4 + x^2}} =$$

$$0, \text{ 解得 } x = \frac{3}{2}.$$

由于 $x = \frac{3}{2}$ 是函数 $f(x) = 30(5 - x) + 50\sqrt{4 + x^2}$ 在定义域内的唯一驻点, 且总运费必存在最小值,

所以 $x = \frac{3}{2}$ 就是函数的最小值点, 即当水厂 D 设在离 C 1.5 km 时, 才能使铺设水管的总费用最省.

考前冲刺卷(四)参考答案及解析

一、单项选择题

1.【答案】A

【解析】定义域为 $\mathbf{R}$, 因为 $f(-x) = \ln(-x + \sqrt{1 + (-x)^2}) = \ln(\sqrt{1 + x^2} - x) = -\ln(\sqrt{1 + x^2} + x) = -f(x)$, 所以原函数为奇函数.

2.【答案】C

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\cos x \cdot x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{\cos x \cdot x^2} = \frac{1}{2}$, 所以 $\sec x - 1$ 与 x^2 是同阶但不等价无穷小.

3.【答案】D

【解析】根据可微与可导之间的关系可知可微必可导.

4.【答案】D

【解析】 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 5h) - f(x_0)}{\sin h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 5h) - f(x_0)}{h} \cdot \frac{h}{\sin h} =$
 $(-5) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 5h) - f(x_0)}{-5h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{\sin h} = -5f'(x_0) \times 1 = -5a.$

5.【答案】A

【解析】由函数在 (a, b) 内有两个不同的零点可得区间内两点 x_1 和 x_2 处, $f(x_1) = f(x_2) = 0$; 再由罗尔定理可知在区间 (x_1, x_2) 即 (a, b) 内至少存在一点, 使得 $f'(x_0) = 0$.

6.【答案】D

【解析】 $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{e^{-t^2}}{2+2t}$, 故选 D.

7.【答案】C

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$, 故选 C.