专升本考试

决胜好题

策划编辑：王晓军
责任编辑：任瑞丽
封面设计：张瑞阳

ISBN 978-7-5635-7425-4

定价：58.00元

专升本考试 决胜好题 高等数学

华腾新思专升本考试研究中心 主编

北京邮电大学出版社

华腾新思

依据普通高校专升本招生考试最新大纲编写

专升本考试

决胜好题

华腾新思专升本考试研究中心 主编

高等数学

题量大 2000+常考好题

高标准 专业团队精心严选

分层次 筑基强化&决胜提升

含答案册

北京邮电大学出版社
www. buptpress. com

依据普通高校专升本招生考试最新大纲编写

专升本考试

决胜好题

华腾新思专升本考试研究中心 主编

高等数学

北京邮电大学出版社
www. buptpress. com

内容简介

本书分为“函数、极限与连续”“一元函数微分学”“一元函数积分学”“向量代数与空间解析几何”“多元函数微分学”“多元函数积分学”“常微分方程”“无穷级数”八章内容.每章下面分不同小节,每一小节中按照题目的难易程度分为“筑基强化”和“决胜提升”两个板块,帮助考生循序渐进地实现突破.本书题量丰富,包含专升本考试高等数学科目的各种常见题型和常考知识点,能够充分满足考生刷题的需求.考生可以利用本书巩固所学知识,提高应试能力.

本书既可以作为普通高校专升本考试高等数学科目的复习用书,也可以作为相关学校学生的学习资料.

图书在版编目(CIP)数据

专升本考试决胜好题.高等数学/华腾新思专升本考试研究中心主编. -- 北京:北京邮电大学出版社,2024. -- ISBN 978-7-5635-7425-4

Ⅰ. G724.4

中国国家版本馆 CIP 数据核字第 2025H7C037 号

策划编辑:王晓军　　**责任编辑:**任瑞丽　　**封面设计:**张瑞阳

出版发行:北京邮电大学出版社

社　　址:北京市海淀区西土城路 10 号

邮政编码:100876

发 行 部:电话:010-62282185　传真:010-62283578

E-mail:publish@bupt.edu.cn

经　　销:各地新华书店

印　　刷:三河市龙大印装有限公司

开　　本:880 mm×1 230 mm　1/16

印　　张:11

字　　数:323 千字

版　　次:2024 年 12 月第 1 版

印　　次:2024 年 12 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5635-7425-4　　　　定　价:58.00 元

·如有印装质量问题,请与北京邮电大学出版社发行部联系·

服务电话:400-615-1233

PREFACE 前言

专升本考试，即普通高等学校专升本考试，是以省（区、市）为单位组织的选拔性考试。普通高等学校应、往届专科毕业生参加专升本考试，考试通过后即可进入本科院校继续深造。近年来，随着我国职业教育改革的不断深化，专升本考试受到越来越多的考生青睐，成为他们提升学历、拓宽就业渠道、增强职业竞争力的重要途径。

为帮助广大考生高效复习、快速提分，我们组织专升本领域具有丰富经验的专家，精心编写了这套“专升本考试决胜好题”。

本书是专门针对专升本考试中的高等数学科目考试编写而成的，具有以下显著特色。

◎高标准选题

我们精研考纲考情，依托培训及教学的丰富经验，广泛收集海量试题，坚持高标准、严要求，选好题，选常考题，选有代表性的题，确保把高质量的精品试题呈现给考生。

◎分层次布局

我们遵循考生的学习规律，按照先易后难、先巩固后提升的思路组织内容，将各部分的试题分为“筑基强化”“决胜提升”两个板块，帮助考生循序渐进地实现突破。

◎容量足够大

本书内容丰富，包含高等数学科目考试的各种常见题型和常考知识点，题目总数量超过 2 000 道。“一本在手，训练足够”，充分满足考生刷题的需求！

◎解析超实用

本书附赠独立的“参考答案及解析”册，便于考生检测刷题效果；其从答案、考查点、答题思路、作答技巧等角度对试题进行全方位解析，能够真正提升考生的考试能力！

刷决胜好题，共圆本科梦！

伙伴们，拿起这本书，向着目标，一起冲冲冲！

华腾新思专升本考试研究中心

CONTENTS 目录

第一章

函数、极限与连续

第一节 函数

筑基强化

一、单项选择题

1. 函数 $y=\sqrt{1-x}+\sqrt{x}$ 的定义域是(　　).

A. $\{x|x\leqslant 1\}$　　B. $\{x|x\geqslant 0\}$　　C. $\{x|x\geqslant 1$ 或 $x\leqslant 0\}$　　D. $\{x|0\leqslant x\leqslant 1\}$

2. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{\ln(x-1)}+\sqrt{9-x}$ 的定义域为(　　).

A. $(1,9)$　　B. $(1,9]$　　C. $(1,2)\cup(2,9)$　　D. $(1,2)\cup(2,9]$

3. 函数 $f(x)=\sqrt{x-3}+\arctan\dfrac{1}{x}$ 的定义域是(　　).

A. $(-\infty,+\infty)$　　B. $[0,3]$　　C. $(-\infty,0)\cup(0,3)$　　D. $[3,+\infty)$

4. 函数 $y=\sqrt{x-1}+\lg(2-x)$ 的定义域是(　　).

A. $(1,2)$　　B. $[1,4]$　　C. $[1,2)$　　D. $(1,2]$

5. 函数 $f(x)=\sqrt{2^x-1}+\dfrac{1}{x-1}$ 的定义域为(　　).

A. $[0,1)$　　B. $(1,+\infty)$　　C. $[0,1)\cup(1,+\infty)$　　D. $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$

6. 函数 $f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x},0\leqslant x<1,\\1+x,|x|\geqslant 1\end{cases}$ 的定义域是(　　).

A. $(-\infty,-1)\cup[0,1)$　　B. $(-\infty,-1]\cup[0,+\infty)$

C. $[-1,1]$　　D. $[0,+\infty)$

7. 下列函数中,定义域和值域分别与函数 $y=10^{\lg x}$ 的值域和定义域相同的是(　　).

A. $y=x$　　B. $y=\lg x$　　C. $y=2^x$　　D. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

8. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2,x\leqslant 1,\\x+\dfrac{6}{x}-6,x>1,\end{cases}$ 则 $f(f(-3))=$(　　).

A. $\dfrac{11}{3}$　　B. 9　　C. $\dfrac{2}{3}$　　D. 6

9. 设 $f(x-a)=x(x-a)$(a 为大于零的常数),则 $f(x)=$(　　).

A. $x(x-a)$　　B. $x(x+a)$　　C. $(x-a)(x+a)$　　D. $(x-a)^2$

10. 设函数 $f(3x+2)=9x+5$,则 $f(x)$的表达式是(　　).

A. $3x+1$　　B. $3x-1$　　C. $9x+1$　　D. $9x-1$

11. 已知 $f\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=\frac{1-x^2}{1+x^2}$,那么 $f(x)$的解析式可取为(　　).

A. $\frac{x}{1+x^2}$　　B. $\frac{-2x}{1+x^2}$　　C. $\frac{2x}{1+x^2}$　　D. $\frac{-x}{1+x^2}$

12. 下列函数中,在$(-\infty,0)$上单调递增的是(　　).

A. $y=x^2$　　B. $y=\sin x$　　C. $y=x$　　D. $y=|x|$

13. 已知 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,且当 $x<0$ 时,$f(x)=3^x$,则 $f(1)$的值为(　　).

A. -3　　B. 3　　C. $-\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{3}$

14. 已知函数 $f(x)=(x+3)(x-a)$是偶函数,函数 $g(x)=x^3+4\sin x+b+2$ 是奇函数,则 $a+b$ 的值为(　　).

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

15. 设 $f(x)$是周期为 2 的奇函数,且当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时,$f(x)=2x(1-x)$,则 $f\left(-\frac{5}{2}\right)=$(　　).

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{2}$

16. 函数 $f(x)=2\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-1$ 是(　　).

A. 最小正周期为 π 的偶函数　　B. 最小正周期为$\frac{\pi}{2}$的偶函数

C. 最小正周期为 π 的奇函数　　D. 最小正周期为$\frac{\pi}{2}$的奇函数

17. 下列函数中,最小正周期为$\frac{\pi}{2}$,并且图像关于 y 轴对称的是(　　).

A. $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$　　B. $y=\sin\left(4x+\frac{\pi}{2}\right)$　　C. $y=\cos\left(4x+\frac{\pi}{2}\right)$　　D. $y=\sin 2x+\cos 2x$

18. 函数 $f(x)=4^x$ 和 $g(x)=\log_4 x$ 的图像(　　).

A. 关于 x 轴对称　　B. 关于 y 轴对称　　C. 关于原点对称　　D. 关于直线 $y=x$ 对称

19. 记函数 $f(x)$的反函数为 $f^{-1}(x)$. 若 $f(x)=\log_3 x$,则 $f^{-1}(-1)=$(　　).

A. -3　　B. $-\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. 3

20. 设函数 $y=2+\ln(x+3)$,则此函数的反函数是(　　).

A. $y=e^{2x+3}-3$　　B. $y=e^{x-2}-3$　　C. $x=\ln(y-2)-3$　　D. $y=\ln(x-2)-3$

二、填空题

1. 函数 $f(x)=\sqrt{1-\log_3 x}$的定义域为__________.

2. 函数 $f(x)=\sqrt{\frac{x}{3}-1}$的定义域为__________.

3. 设函数 $f(x)$的定义域是$[-2,1]$,则函数 $f(3x-5)$的定义域是__________.

4. 设 $f(x)$的定义域是$[0,1]$,则 $f(9x^2)$的定义域是__________.

5. $\lg\sqrt{2}+\lg\sqrt{5}+2^0+(5^{\frac{1}{3}})^2\times\sqrt[3]{5}=$__________.

6. 设函数 $f(x)=\begin{cases}1+\log_2(1-x), & x<1,\\ 2^{x-2}, & x\geqslant 1,\end{cases}$ 则 $f(-1)+f(\log_2 4)=$__________.

7. 若函数 $y=\frac{m-1}{x}(x<0)$是减函数,则 m 的取值范围是__________.

8. 已知 $y=f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的周期为 4 的奇函数,且当 $0<x<2$ 时,$f(x)=\ln x+x$,则 $f(2\,019)=$____________.

9. 设函数 $f(x)$是周期为 5 的奇函数,当 $0<x\leqslant 2$ 时,$f(x)=2^x-3$,则 $f(2\,013)=$____________.

10. 若函数 $f(x)=x(x+a)$为偶函数,则 $a=$____________.

11. 函数 $y=a^x(0<a<1)$在$[1,2]$上的最大值为 m,最小值为 n,且 $m+n=\frac{3}{4}$,则 a 的值是____________.

12. 设 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,且当 $x\geqslant 0$ 时,$f(x)=\log_2(x+1)+m+1$,则 $f(-3)=$____________.

三、解答题

1. 求函数 $y=\sqrt{x+3}$的定义域.

2. 求函数 $y=\dfrac{1}{x+2}$的定义域.

3. 求函数 $y=\ln(x-1)$的定义域.

4. 已知函数 $f(x)$的定义域为$[-1,3]$,求 $f(x+1)$,$f(x^2)$的定义域.

5. 已知 $f(\sqrt{x}+1)=x+2\sqrt{x}$,求 $f(x+1)$的解析式.

6. 已知 $f(x)=x^2+2$,$g(x)=\begin{cases}-x+2, & x<1,\\ x, & x\geqslant 1,\end{cases}$ 求 $g(f(x))$和 $f(g(x))$的解析式.

7. 已知 $f(x)$是一次函数,且 $f(f(x))=4x+3$,求 $f(x)$的解析式.

8. 下列函数是由哪些较简单的函数复合而成的?

(1)$y=\mathrm{e}^{-x}$;　(2)$y=\sin^2(1+2x)$;　(3)$y=\arccos\sqrt{\tan(a^2+x^2)}$.

9. 求函数 $y=\frac{ax+5}{x+2}$ 的反函数.

10. 求函数 $y=\frac{3x-5}{2x+1}$ 的反函数.

11. 已知函数 $y=f(x)$ 是增函数,且存在反函数 $y=f^{-1}(x)$. 证明:反函数 $y=f^{-1}(x)$ 是增函数.

12. 判断函数 $f(x)=-x^3+1$ 的单调性.

13. 判断下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=x^2(1+x^2)$;

(2) $f(x)=x(x+1)(x-1)$.

14. 求函数 $y=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$, $x\in[1,+\infty)$ 的反函数.

决 胜 提 升

一、单项选择题

1. 函数 $f(x)=\sqrt{x-3}+\arcsin\frac{1}{x}$ 的定义域是(　　).

A. $(-\infty,+\infty)$　　B. $[1,3]$　　C. $(-\infty,0)\cup(0,3)$　　D. $[3,+\infty)$

2. 已知函数 $f(x+1)$ 的定义域为 $[2,5]$,则函数 $y=\frac{f(3x)}{\sqrt{\log_2(4-x^2)}}$ 的定义域为(　　).

A. $[1,+\infty)$　　B. $[1,\sqrt{3})$　　C. $(1,+\infty)$　　D. $\left[\frac{1}{3},\sqrt{3}\right)$

3. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}1, x>0,\\ -1, x<0.\end{cases}$ 若 $a\neq b$,则 $\frac{a+b+(a-b)f(a-b)}{2}$ 的值是(　　).

A. a　　B. b　　C. a,b 中较大的数　　D. a,b 中较小的数

4. 在如下四个函数中，奇函数的个数为(　　).

①$f(x)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{x^2-1}$；　②$f(x)=e^x-e^{-x}$；

③$f(x)=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{|x+3|-3}$；　④$f(x)=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$.

A. 4　B. 3　C. 2　D. 1

5. 下列函数中既是偶函数又在$(0,+\infty)$上单调递减的是(　　).

A. $f(x)=e^x-1$　B. $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$　C. $f(x)=\dfrac{1}{x^4}$　D. $f(x)=\lg|x|$

6. 已知函数$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的偶函数，且在$(-\infty,0)$上单调递减，则(　　).

A. $f(-3)<f(-\log_3 13)<f(2^{0.6})$　B. $f(-3)<f(2^{0.6})<f(-\log_3 13)$

C. $f(2^{0.6})<f(-\log_3 13)<f(-3)$　D. $f(2^{0.6})<f(-3)<f(-\log_3 13)$

7. 已知$f(x)$是定义在$[-2,0]$上的增函数，则满足$f(x^2-x-2)>f(1-x)$的x的取值范围是(　　).

A. $(-\infty,-\sqrt{3}]\cup[\sqrt{3},+\infty)$　B. $[1,2]$

C. $[-\sqrt{3},0]$　D. $(\sqrt{3},2]$

8. 已知函数$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的奇函数. 若$f(x)$的最小正周期为4，且$f(1)>0$，$f(3)=\dfrac{m-3}{m+1}$，则m的取值范围是(　　).

A. $-3<m<1$　B. $m>1$或$m<-3$

C. $-1<m<3$　D. $m>3$或$m<-1$

9. 已知$f(x)=\dfrac{a+bx}{c+x}$(a,b,c是常数)的反函数为$f^{-1}(x)=\dfrac{3x+5}{x-2}$，则(　　).

A. $a=2,b=5,c=3$　B. $a=5,b=2,c=-3$　C. $a=5,b=3,c=-2$　D. $a=5,b=-2,c=3$

10. 下列命题中为真命题的是(　　).

①函数$y=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$与$y=\ln\tan\dfrac{x}{2}$是同一函数；

②若函数$y=f(x)$与$y=g(x)$的图像关于直线$y=x$对称，则函数$y=f(2x)$与$y=\dfrac{1}{2}g(x)$的图像也关于直线$y=x$对称；

③若奇函数$f(x)$对定义域内任意x都有$f(x)=f(2-x)$，则$f(x)$为周期函数.

A. ①②　B. ①③　C. ②③　D. ②

11. 下列关于幂函数的命题中，真命题是(　　).

A. 不存在非奇非偶的幂函数

B. 若一个幂函数是奇函数，则它的图像一定过原点

C. 若幂函数的图像不过点$(-1,1)$，则它一定不是偶函数

D. 若两个幂函数的图像有三个不同的公共点，则这两个函数一定是相同的

12. 若在对称区间上$f(x)$为奇函数，$g(x)$为偶函数，则以下函数为奇函数的是(　　).

A. $f(x^4)$　B. $f(x)+g(x)$　C. $f(x)g(x)$　D. $-g(-x)$

13. 函数$f(x)=\ln(\sqrt{1+x^2}-x)$在定义域内是(　　).

A. 不确定奇偶性　B. 偶函数　C. 非奇非偶函数　D. 奇函数

14. 设$f(x)$为$(-\infty,+\infty)$内的奇函数，则函数$\sin f(x)+\ln(\sqrt{1+x^2}-x)$在$(-\infty,+\infty)$内是(　　).

A. 奇函数　B. 偶函数　C. 非奇非偶函数　D. 无法判断

二、填空题

1. 已知函数$f(x)=x^a$的图像经过点$\left(3,\dfrac{1}{3}\right)$，则函数$g(x)=(2x-1)f(x)$在区间$\left[\dfrac{1}{2},2\right]$上的最小值为__________.

2. 已知 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，且在$[0,+\infty)$上是单调增加的，$f\left(\frac{1}{3}\right)=0$，则不等式 $f(\log_{\frac{1}{8}} x)>0$ 的解集为____________.

3. 若 $f(x)=\lg(10^x+1)+ax$ 是偶函数，$g(x)=\frac{4^x-b}{2^x}$是奇函数，则 $a+b=$____________.

4. $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数，且 $f(x+2)=-\frac{1}{f(x)}$，当 $2\leqslant x\leqslant 3$ 时，$f(x)=x$，则 $f\left(-\frac{11}{2}\right)=$____________.

5. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$和偶函数 $g(x)$满足 $f(x)+g(x)=a^x-a^{-x}+4$ $(a>0$，且 $a\neq 1)$，且 $g(2)=a$，则 $f(2)$的值为____________.

6. 设 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=x^2$. 若对任意的 $x\in[a,a+2]$，$f(x+a)\geqslant f(\sqrt{2}x)$恒成立，则 a 的最小值为____________.

7. $y=\frac{2^x}{2^x+1}$的反函数是____________.

三、解答题

1. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|\leqslant 1,\\ 2, & |x|>1,\end{cases}$ 求 $f(g(x))$，$g(f(x))$.

2. 已知函数 $f(x)$的定义域为$[-1,1]$，求 $f(ax)+f\left(\frac{x}{a}\right)$的定义域，其中 $a>0$.

3. 求函数 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$的反函数.

4. 已知 $f(x)$是偶函数，$g(x)$是奇函数，且 $f(x)+g(x)=\frac{1}{x-1}$，求 $f(x)$和 $g(x)$的解析式.

5. 判断下列函数的单调性.

(1) $f(x)=\frac{1}{1-x}$，$x\in(-\infty,1)$；

(2) $f(x)=x^2-2x$，$x\in(1,+\infty)$.

6. 已知函数 $f(x)$ 是定义域为 $[-2,2]$ 的奇函数，且对定义域内任意满足 $a+b\neq 0$ 的实数 a,b，有 $\dfrac{f(a)+f(b)}{a+b}>0$ 成立.

(1)判断 $f(x)$ 在定义域上的单调性，并给出证明；

(2)解不等式 $f(2x-1)\leqslant f(x^2-1)$.

7. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{3}, & -2<x<1,\\ x^2, & 1\leqslant x\leqslant 2,\end{cases}$ 求其反函数 $f^{-1}(x)$.

第二节　极　　限

筑 基 强 化

一、单项选择题

1. 设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$，则下列选项正确的是（　　）.

A. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]=\infty$　　B. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)]=\infty$

C. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)}=0$　　D. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)+g(x)}=0$

2. $\lim\limits_{x\to 0}(1+2\sin x)^{\frac{2}{\sin x}}=$（　　）.

A. e　　B. e^2　　C. e^4　　D. 1

3. 当 $x\to 0$ 时，$(1+x^2)^k-1$ 与 $1-\cos x$ 为等价无穷小，则 k 的值为（　　）.

A. 1　　B. $-\dfrac{1}{2}$　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. -1

4. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=3$，则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$（　　）.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

5. 当 $x\to 0$ 时，下列选项中为无穷小量的是（　　）.

A. $x+2$　　B. x^2　　C. $(x+1)^2$　　D. 2^x

6. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sin 2x}=$（　　）.

A. 1　　B. 2　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. 不存在

7. 当 $x\to 0$ 时，下列变量中与 x 是等价无穷小量的有（　　）.

A. $\sin^2 x$　　B. $\ln(1+x)$　　C. x^2　　D. $2x^2-x$

8. 函数 $f(x)=\begin{cases}2x-1,0<x\leqslant 1,\\ 2-x,1<x\leqslant 3\end{cases}$ 在(　　)时极限为 1.

A. $x\to\frac{1}{2}$　　B. $x\to 1$　　C. $x\to\frac{3}{2}$　　D. $x\to 2$

9. 当 $x\to 0$ 时，与 $e^{2x}-1$ 等价的无穷小量是(　　).

A. x　　B. $2x$　　C. $3x$　　D. x^2

10. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{8^x}{8^x-5^x}=$(　　).

A. 1　　B. $\frac{5}{8}$　　C. $\frac{8}{5}$　　D. 0

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x=$(　　).

A. 1　　B. e^{-1}　　C. e^{-2}　　D. ∞

12. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x}=$(　　).

A. e^{-6}　　B. ∞　　C. 1　　D. e^3

13. $\lim\limits_{x\to 0}2^{\frac{1}{x}}=$(　　).

A. 0　　B. $+\infty$　　C. ∞　　D. 不存在

14. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(x^2-1)}{x-1}=$(　　).

A. $\frac{1}{2}$　　B. 1　　C. 2　　D. 0

15. 设 $f(x)=\frac{|x|}{x}$，则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$(　　).

A. 1　　B. -1　　C. 0　　D. 不存在

16. 下列结论正确的是(　　).

A. 无穷小量是很小的正数　　B. 无穷大量是很大的数

C. 无穷大量的倒数是无穷小量　　D. 一个很小的正数的倒数是无穷大量

17. 设 $\alpha(x)=\ln(1+x^2)$，$\beta(x)=2x\sin x$，当 $x\to 0$ 时，(　　).

A. $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$没有极限　　B. $\alpha(x)$与$\beta(x)$是等价无穷小量

C. $\alpha(x)$与$\beta(x)$是同阶无穷小量　　D. $\alpha(x)$是比$\beta(x)$高阶的无穷小量

18. 在下列各式中，正确的是(　　).

A. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$　　B. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=1$　　C. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sin x}{x}=1$　　D. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=1$

19. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2}{3x-2}\right)^{2x}=$(　　).

A. $e^{\frac{8}{3}}$　　B. e^{-2}　　C. e^{-3}　　D. e^{-4}

20. 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{4x}=$(　　).

A. e^4　　B. e^{-4}　　C. e　　D. 1

21. 函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处左、右极限都存在是 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在的(　　).

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

22. 当 $x\to 0$ 时，下列变量中(　　)是无穷小量.

A. $x\sin\frac{1}{x}$　　B. $\frac{1}{x}\sin x$　　C. $\ln x^2$　　D. e^x

23. 下列函数中，当 $x\to 0$ 时与 $e^{x^3}-1$ 等价的无穷小量是(　　).

A. $x^2\sin x$　　B. $3x^2$　　C. $\sin x^2$　　D. $\frac{x^3}{3}$

24. 极限 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}=$(　　).

A. -3　　B. -2　　C. 1　　D. 2

25. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{2}{x}}=$(　　).

A. e^{-1}　　B. e　　C. e^{-2}　　D. e^2

26. 当 $x\to 0$ 时，下列函数中与 $\sin x^2$ 等价的无穷小量是(　　).

A. x　　B. x^2　　C. $\sin x$　　D. $1-\cos x$

27. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}+\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=$(　　).

A. e　　B. e^{-1}　　C. $e+1$　　D. $e^{-1}+1$

28. 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{2x}=$(　　).

A. e^2　　B. 1　　C. 2　　D. e^{-2}

29. 下列等式正确的是(　　).

A. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin(2\,012x)}{x}=2\,012$　　B. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\sin x=0$

C. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x}=1$　　D. $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=1$

30. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin 3x}{x}=$(　　).

A. -2　　B. 0　　C. 2　　D. 3

31. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{x-1}=$(　　).

A. e^{-2}　　B. e^2　　C. 2e　　D. $-2e$

32. 下列等式正确的是(　　).

A. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$　　B. $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=0$　　C. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^x=e$　　D. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x=e$

33. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos\frac{x}{2}}{x^2}=$(　　).

A. $-\frac{1}{8}$　　B. $-\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{8}$　　D. $\frac{1}{4}$

34. 函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有意义是极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在的(　　).

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

35. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{2x}=1$，则 $a=$(　　).

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

36. 当 $x\to 0$ 时，与 x 等价的无穷小量是(　　).

A. $\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$　　B. $2\sin x$　　C. $\ln(1+x)$　　D. $\ln(1+x^2)$

37. 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin 2x}{x}$ 的值为(　　).

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. ∞

二、填空题

1. $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=$____________.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 2x}=$____________.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}=$____________.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x+1}\right)^{x}=$____________.

5. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(x-2)}{x^{2}-5x+6}=$____________.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}=$____________.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{x^{3}}=$____________.

8. $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}=$____________.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^{2}}}{2x^{2}}=$____________.

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-1}{x}=$____________.

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}=$____________.

12. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^{2}-x\sin 2x+4}=$____________.

13. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln(1+\mathrm{e}^{x})}{x}=$____________.

14. 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{n}\right)^{nk}=\mathrm{e}^{-3}$，则 $k=$____________.

15. $\lim\limits_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{2}{\sin x}}=$____________.

16. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+x}{n-1}\right)^{n}=$____________.

17. 若 $x\to 0$ 时，无穷小量 $2x$ 与 $3x^{2}+mx$ 等价，则常数 $m=$____________.

18. 已知当 $x\to 0$ 时，$f(x)\sim 2x$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{f(x)}=$____________.

三、解答题

1. $\lim\limits_{x\to 1}(x+2)$.

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{2}-1}{x-1}$.

3. 计算$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

4. 计算$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$.

5. 求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^{x}$.

6. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(e^{x}-1)^{2}}{1-\cos x}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}$.

8. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}-2x}{\sin x}$.

9. 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^{3}}$.

10. 计算 $\lim\limits_{x\to 0^{+}}\sqrt[x]{1-2x}$.

11. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{\sin x}$.

12. 求$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}$.

13. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\sin\dfrac{1}{x}+e^{2x-1}+4x\right)$.

14. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{(e^x-1)\sin x}$.

15. $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{3}{\sin x}}$.

16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x^2)}{x^2}$.

17. 计算$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+2x}{2+2x}\right)^x$.

18. 计算 $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(1+x)$.

19. 计算：$\lim\limits_{x\to 2}(x^2+3x)$.

20. 计算$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+x+1}{x^3+2x^2-1}$.

21. 计算$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x-4}$.

22. 计算$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

23. 计算$\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan 2x}{\ln(1+x)}$.

24. 计算$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{1-e^x}$.

25. 设函数 $f(x)=\begin{cases}2+x^2, & x\geqslant1,\\ 1+2x, & x<1,\end{cases}$求$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$,$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)$,并由此判断$\lim\limits_{x\to1}f(x)$是否存在.

26. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x>0\\ 0, & x=0\\ x-1, & x<0\end{cases}$. 证明:当 $x\to0$ 时,$f(x)$的极限不存在.

27. 求极限$\lim\limits_{x\to2}(x^2+3x-2)$.

28. 求极限$\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3+2}{x^2-9}$.

29. $\lim\limits_{x\to3}\frac{x-3}{x^2-5x+6}$.

30. 求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^5-3x^2+1}{4x^5+2x}$.

31. 求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+x-1}{7x^3+3}$.

32. 求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+x+1}{5x^2-1}$.

33. 求$\lim\limits_{x\to 0}x^3\cdot\sin\dfrac{1}{x}$.

34. 计算$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right)$.

35. 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x^3+3x}$.

36. 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$.

37. 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$.

38. 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}$.

39. 求$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{3}{x}}$.

40. 求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{2x}$.

41. 求$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{3\sec x}$.

决 胜 提 升

一、单项选择题

1. 当 $x\to$( )时，$y=\dfrac{x^2-1}{x(x-1)}$ 为无穷大量.

A. 0　　B. 1　　C. $+\infty$　　D. $-\infty$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{x-1}=3$，则 a,b 分别为( ).

A. 1，1　　B. $-1,-2$　　C. $-2,1$　　D. $1,-2$

3. 下列结论正确的是( ).

A. $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=1$　　B. $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=1$　　C. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=1$　　D. $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=0$

4. 下列公式中计算正确的是( ).

A. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=1$　　B. $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=1$　　C. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x=-\mathrm{e}$　　D. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{-x}=\mathrm{e}$

5. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\sin\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x}\sin x\right)=$( ).

A. -3　　B. -2　　C. 1　　D. -1

6. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2-1, x<0,\\ 3^x, x\geqslant 0,\end{cases}$ 则下列等式正确的是( ).

A. $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=2$　　B. $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=-1$　　C. $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=3$　　D. $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=3$

7. 下列等式正确的是( ).

A. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{x^2-1}=\dfrac{1}{2}$　　B. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=1$

C. $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$　　D. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}=1$

8. 设 $f(x)=1-x$，$g(x)=1-\sqrt[3]{x}$，则当 $x\to 1$ 时( ).

A. $f(x)$是比 $g(x)$高阶的无穷小量　　B. $f(x)$是比 $g(x)$低阶的无穷小量

C. $f(x)$与 $g(x)$是同阶但不等价的无穷小量　　D. $f(x)$与 $g(x)$是等价无穷小量

9. 当 $x\to 0$ 时，$\dfrac{1}{4}(\cos 3x-\cos x)$是 x^2 的( ).

A. 高阶无穷小量　　B. 同阶但不等价无穷小量

C. 低阶无穷小量　　D. 等价无穷小量

10. 当 $x\to 0$ 时，下列选项中为 x 的高阶无穷小量的是( ).

A. $\sin 2x$　　B. $\sqrt{1-x}-1$　　C. $\cos x-1$　　D. $\ln(1-5x)$

11. 当 $x\to 0$ 时，与 $2\sin x^2+3x^6$ 等价的无穷小量是( ).

A. x^6　　B. $2x^2$　　C. x^2　　D. $3x^6$

12. $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$，则必有( ).

A. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]=\infty$　　B. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)]=0$

C. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)+g(x)}=0$　　D. $\lim\limits_{x\to a}kf(x)=\infty(k\neq 0)$

13. 下列结论正确的是( ).

A. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{2x}=\mathrm{e}$　　B. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{-x}=\mathrm{e}$

C. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{1-x}=\mathrm{e}$　　D. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{-2x}=\mathrm{e}$

14. 设函数 $f(x)=\begin{cases} x, & -1<x<0, \\ 1, & x=0, \\ -x, & 0<x<1, \\ x-1, & x\geqslant 1. \end{cases}$ 下列陈述中，正确的是(　　).

A. $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$不存在　　B. $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$

C. $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$　　D. $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=1$

15. 极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x}\right)^{2x}=$(　　).

A. e^4　　B. e^{-2}　　C. 1　　D. e^2

16. 下列说法正确的是(　　).

A. $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=1$　　B. $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=1$

C. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=1$　　D. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}=1$

17. 当 $x\to 1$ 时，与$(1-x)$等价的是(　　).

A. $\dfrac{1}{2}(1-x^3)$　　B. $\dfrac{1}{2}(1-\sqrt{x})$　　C. $\dfrac{1}{2}(1-x^2)$　　D. $\dfrac{1}{2}(1+\sqrt{x})$

18. 下列说法中错误的是(　　).

A. 有限个无穷小量的和仍为无穷小量

B. 当 $x\to 1$ 时，$1-x^3$ 是 $1-x$ 的同阶无穷小量

C. 若 α,β,γ 是同一极限过程的无穷小量，且 $\alpha\sim\beta,\beta\sim\gamma$，则 $\alpha\sim\gamma$

D. 已知$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{1-x}=1$，由此断言，当 $x\to 0$ 时，$\cos x$ 与 $1-x$ 是等价无穷小量

19. 下列函数在 $x\to 0$ 时，与 x^2 为等价无穷小量的是(　　).

A. 2^x　　B. 2^x-1　　C. $\ln(1+2x)$　　D. $x\sin x$

20. 下列函数在 $x\to 0$ 时，是对于 x 的三阶无穷小量的是(　　).

A. $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}$　　B. $\sqrt{1+x^3}-1$

C. $x^3+0.002x^2$　　D. $\sqrt[3]{\sin x^3}$

二、填空题

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=$____________.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-x}}{x}=$____________.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{2n^2}=$____________.

4. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{1+x^3}-\dfrac{1}{1+x}\right)=$____________.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+6}\right)^{\frac{x-1}{2}}=$____________.

6. 已知极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x-\sqrt{ax^2-x+1})$存在，则 a 的值为____________.

7. 设 $a>b>0$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n+b^n}{a^{n+1}+b^{n+1}}=$____________.

8. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)})=$____________.

9. 设 a,b 为常数，若$\lim\limits_{x\to\infty}\left(bx+\dfrac{ax^2}{x+1}\right)=2$，则 $a+b=$____________.

三、解答题

1. 计算$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+n+1}{2n^2+5n+2}$.

2. 计算$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.

3. 计算$\lim\limits_{n\to\infty}(1+q+q^2+\cdots+q^n)$，其中$|q|<1$.

4. 计算$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n\cdot(n+1)}\right]$.

5. 求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x-5}\right)^{3x+1}$.

6. 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n-1}+\dfrac{1}{n^2+n-2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n-n}\right)$.

7. 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+x^2\sin\dfrac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}$.

8. 求极限$\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\cos x}$.

9. 求极限$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1-\cos\pi x}{x^2-4x+4}$.

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x^2-1}\right)^x$.

11. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$.

12. 设$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+x+1}{x}-ax-b\right)=0$,求 a,b 的值.

13. 计算$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^x$.

14. 求极限$\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{1}{x^2-3x+2}-\dfrac{1}{x-2}\right)$.

15. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2+1})$.

16. 求极限$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{\sqrt{2x-3}-1}$.

17. 已知$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+3}{x-1}-ax+b\right)=0$,求 a,b 的值.

第一章　函数、极限与连续

第一节　函　　数

筑 基 强 化

一、单项选择题

1. D 【解析】使根式 $\sqrt{1-x}$ 有意义的实数 x 的集合是 $\{x\mid 1-x\geqslant 0\}=\{x\mid x\leqslant 1\}$，使根式 $\sqrt{x}$ 有意义的实数 x 的集合是 $\{x\mid x\geqslant 0\}$. 因此，函数 $y=\sqrt{1-x}+\sqrt{x}$ 的定义域是 $\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 1\}$.

2. D 【解析】使 $\dfrac{1}{\ln(x-1)}$ 有意义的实数 x 的集合是 $\{x\mid \ln(x-1)\neq 0\}=\{x\mid x-1>0$ 且 $x-1\neq 1\}=\{x\mid x>1$ 且 $x\neq 2\}$；使根式 $\sqrt{9-x}$ 有意义的实数 x 的集合是 $\{x\mid 9-x\geqslant 0\}=\{x\mid x\leqslant 9\}$. 因此，函数 $f(x)$ 的定义域是 $\{x\mid 1<x\leqslant 9$ 且 $x\neq 2\}$，即 $(1,2)\cup(2,9]$.

3. D 【解析】使根式 $\sqrt{x-3}$ 有意义的实数 x 的集合是 $\{x\mid x-3\geqslant 0\}=\{x\mid x\geqslant 3\}$，使 $\arctan\dfrac{1}{x}$ 有意义的实数 x 的集合是 $\{x\mid x\neq 0\}$. 因此，函数 $f(x)$ 的定义域是 $\{x\mid x\geqslant 3$ 且 $x\neq 0\}$，即 $[3,+\infty)$.

4. C 【解析】使根式 $\sqrt{x-1}$ 有意义的实数 x 的集合是 $\{x\mid x-1\geqslant 0\}=\{x\mid x\geqslant 1\}$，使对数 $\lg(2-x)$ 有意义的实数 x 的集合是 $\{x\mid 2-x>0\}=\{x\mid x<2\}$. 因此，函数 $y=\sqrt{x-1}+\lg(2-x)$ 的定义域是 $\{x\mid 1\leqslant x<2\}$，即 $[1,2)$.

5. C 【解析】使根式 $\sqrt{2^x-1}$ 有意义的实数 x 的集合是 $\{x\mid 2^x-1\geqslant 0\}=\{x\mid x\geqslant 0\}$，使分式 $\dfrac{1}{x-1}$ 有意义的实数 x 的集合是 $\{x\mid x\neq 1\}$. 因此，函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x\mid x\geqslant 0$ 且 $x\neq 1\}$，即 $[0,1)\cup(1,+\infty)$.

6. B 【解析】函数 $f(x)$ 的定义域是 $\{x\mid 0\leqslant x<1$ 或 $|x|\geqslant 1\}=\{x\mid x\leqslant -1$ 或 $x\geqslant 0\}$，即 $(-\infty,-1]\cup[0,+\infty)$.

7. C 【解析】函数 $y=10\lg x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，值域为 $\mathbf{R}$. 选项中只有 C 项函数 $y=2^x$ 满足定义域为 $\mathbf{R}$，值域为 $(0,+\infty)$.

8. A 【解析】由题意知，$f(-3)=(-3)^2=9$，$f(f(-3))=f(9)=9+\dfrac{6}{9}-6=\dfrac{11}{3}$.

9. B 【解析】令 $t=x-a$，则 $f(t)=t(t+a)$，从而 $f(x)=x(x+a)$.

10. B 【解析】令 $t=3x+2$，则 $f(t)=3t-1$，从而 $f(x)=3x-1$.

11. C 【解析】令 $t=\dfrac{1-x}{1+x}$，则 $x=\dfrac{1-t}{1+t}$，于是 $f(t)=\dfrac{1-\left(\dfrac{1-t}{1+t}\right)^2}{1+\left(\dfrac{1-t}{1+t}\right)^2}=\dfrac{2t}{1+t^2}$，从而 $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$.

12. C 【解析】$y=x^2$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减；$y=\sin x$ 在 $(-\infty,0)$ 上没有单调性；$y=x$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增；$y=|x|$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减.

13. C 【解析】由题意可知，$f(1)=-f(-1)=-3^{-1}=-\dfrac{1}{3}$.

14. A 【解析】因为函数 $f(x)=(x+3)(x-a)$ 是偶函数，所以 $f(3)=f(-3)$，即 $6(3-a)=0$，解得 $a=3$. 因为函数 $g(x)=x^3+4\sin x+b+2$ 是奇函数，所以 $g(0)=b+2=0$，解得 $b=-2$. 综上，$a+b=3-2=1$.

15. A 【解析】由 $f(x)$ 的奇偶性和周期性，得 $f\left(-\dfrac{5}{2}\right)=f\left(-\dfrac{5}{2}+2\right)=f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}$.

16. C 【解析】因为 $f(x)=2\cos^2\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)-1=\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin 2x$，所以函数 $f(x)$ 是最小正周期为 π 的奇函数.

17. B 【解析】函数 $y=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的最小正周期为 $\dfrac{2\pi}{2}=\pi$，A 项错误；函数 $y=\sin\left(4x+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos 4x$ 的最小正周期为 $\dfrac{2\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$，且图像关于 y 轴对称，B 项正确；函数 $y=\cos\left(4x+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin 4x$ 的最小正周期为 $\dfrac{2\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$，但图像不关于 y 轴对称，C 项错误；函数 $y=\sin 2x+\cos 2x=\sqrt{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的最小正周期为 $\dfrac{2\pi}{2}=\pi$，D 项错误.

18. D 【解析】函数 $f(x)=4^x$ 与 $g(x)=\log_4 x$ 互为反函数，它们的图像关于直线 $y=x$ 对称.

19. C 【解析】令 $f(x)=\log_3 x=-1$，解得 $x=3^{-1}=\dfrac{1}{3}$，所以 $f^{-1}(-1)=\dfrac{1}{3}$.

20. B 【解析】由 $y=2+\ln(x+3)$，得 $x=e^{y-2}-3$，交换 x,y，得 $y=e^{x-2}-3$，即所求反函数.

二、填空题

1.$(0,3]$ 【解析】函数 $f(x)=\sqrt{1-\log_3 x}$ 的定义域为 $\{x\mid x>0$ 且 $1-\log_3 x\geqslant 0\}=\{x\mid 0<x\leqslant 3\}$，即$(0,3]$.

2.$[3,+\infty)$ 【解析】使$\sqrt{\frac{x}{3}-1}$有意义的实数 x 的取值范围是$\left\{x\left|\frac{x}{3}-1\geqslant 0\right.\right\}=\{x\mid x\geqslant 3\}$，即$[3,+\infty)$，故函数$f(x)$的定义域为$[3,+\infty)$.

3.$[1,2]$ 【解析】根据题意，令$-2\leqslant 3x-5\leqslant 1$，解得 $1\leqslant x\leqslant 2$，所以复合函数 $f(3x-5)$的定义域为$[1,2]$.

4.$\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$ 【解析】根据题意，令 $0\leqslant 9x^2\leqslant 1$，解得 $-\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant\frac{1}{3}$，所以函数 $f(9x^2)$ 的定义域为$\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$.

5.$\frac{13}{2}$ 【解析】$\lg\sqrt{2}+\lg\sqrt{5}+2^0+(5^{\frac{1}{3}})^2\times\sqrt[3]{5}=\lg\sqrt{10}+1+\sqrt[3]{5^3}=\frac{1}{2}+1+5=\frac{13}{2}$.

6.3 【解析】由题意可得，$f(-1)=1+\log_2 2=2$，$f(\log_2 4)=f(2)=2^{2-2}=1$，所以 $f(-1)+f(\log_2 4)=3$.

7.$(1,+\infty)$ 【解析】由反比例函数 $y=\frac{m-1}{x}(x<0)$的图像可知，$m-1>0$，从而 m 的取值范围是$(1,+\infty)$.

8.-1 【解析】由题意可知，$f(2\,019)=f(-1+4\times 505)=f(-1)=-f(1)=-(\ln 1+1)=-1$.

9.-1 【解析】由题意可知，$f(2\,013)=f(-2+403\times 5)=f(-2)=-f(2)=-(2^2-3)=-1$.

10.0 【解析】因为 $f(x)=x(x+a)$是偶函数，所以 $f(a)=f(-a)$，即 $2a^2=0$，于是 $a=0$.

11.$\frac{1}{2}$ 【解析】因为 $0<a<1$，所以指数函数 $y=a^x$ 在$(-\infty,+\infty)$上单调递减，从而函数在$[1,2]$上的最大值为$m=a$，最小值为 $n=a^2$. 于是 $m+n=a+a^2=\frac{3}{4}$，解得 $a=\frac{1}{2}$(负值舍去).

12.-2 【解析】由题意知，$f(0)=m+1=0$，所以 $m=-1$，从而 $f(-3)=-f(3)=-[\log_2(3+1)-1+1]=-2$.

三、解答题

1.**解**:因为二次根式的被开方数不小于 0，所以 $x+3\geqslant 0$，解得 $x\geqslant -3$. 故 $y=\sqrt{x+3}$的定义域为$[-3,+\infty)$.

2.**解**:因为分式的分母不能为 0，所以 $x+2\neq 0$，即 $x\neq -2$. 故 $y=\frac{1}{x+2}$的定义域为$(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)$.

3.**解**:因为对数的真数大于 0，所以 $x-1>0$，解得 $x>1$. 故 $y=\ln(x-1)$的定义域为$(1,+\infty)$.

4.**解**:因为 $f(x)$的定义域为$[-1,3]$，所以 $f(x+1)$的定义域为$\{x\mid -1\leqslant x+1\leqslant 3\}=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 2\}$，$f(x^2)$的定义域为$\{x\mid -1\leqslant x^2\leqslant 3\}=\{x\mid -\sqrt{3}\leqslant x\leqslant\sqrt{3}\}$.

5.**解**:(方法一)令 $t=\sqrt{x}+1$，则 $f(t)=(t-1)^2+2(t-1)=t^2-1$，于是 $f(x+1)=(x+1)^2-1=x^2+2x$.

(方法二)因为 $f(\sqrt{x}+1)=(\sqrt{x}+1)^2-1$，所以 $f(x)=x^2-1$，于是 $f(x+1)=(x+1)^2-1=x^2+2x$.

6.**解**:根据题意，$g(f(x))=x^2+2$，$f(g(x))=\begin{cases}x^2-4x+6, & x<1,\\ x^2+2, & x\geqslant 1.\end{cases}$

7.**解**:设 $f(x)=ax+b(a\neq 0)$，则 $f(f(x))=a(ax+b)+b=a^2x+ab+b=4x+3$，于是$\begin{cases}a^2=4,\\ ab+b=3,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a=2,\\ b=1\end{cases}$ 或$\begin{cases}a=-2,\\ b=-3.\end{cases}$ 故 $f(x)$的解析式为 $f(x)=2x+1$ 或 $f(x)=-2x-3$.

8.**解**:(1)$y=\mathrm{e}^{-x}$是由 $y=\mathrm{e}^u$ 与 $u=-x$ 复合而成的.

(2)$y=\sin^2(1+2x)$是由 $y=u^2$，$u=\sin v$ 与 $u=1+2x$ 复合而成的.

(3)$y=\arccos\sqrt{\tan(a^2+x^2)}$是由 $y=\arccos u$，$u=\sqrt{v}$，$v=\tan w$，$w=a^2+x^2$ 复合而成的.

9.**解**:函数 $y=\frac{ax+5}{x+2}=a+\frac{5-2a}{x+2}$的值域为$\{y\mid y\neq a\}$. 由 $y=a+\frac{5-2a}{x+2}$变形，得 $x=\frac{5-2a}{y-a}-2=\frac{5-2y}{y-a}$，交换 x,y，得 $y=\frac{5-2x}{x-a}$，

故函数 $y=\frac{ax+5}{x+2}$的反函数为 $y=\frac{5-2x}{x-a}(x\neq a)$.

10.**解**:在 $y=\frac{3x-5}{2x+1}$两边同时乘 $2x+1$，移项整理得 $x(3-2y)=5+y$，等号两边同时除以 $3-2y$，得 $x=\frac{5+y}{3-2y}$.

故函数 $y=\frac{3x-5}{2x+1}$的反函数为 $y=\frac{5+x}{3-2x}$.

11.**证明**:在 $y=f^{-1}(x)$的定义域内任取两点 x_1,x_2，且 $x_1<x_2$，记 $y_1=f^{-1}(x_1)$，$y_2=f^{-1}(x_2)$，则 $f(y_1)=x_1$，$f(y_2)=x_2$.

由于函数 $y=f(x)$是增函数，所以由 $x_1<x_2$ 可知，$y_1<y_2$.

故反函数 $y=f^{-1}(x)$是增函数.

12.**解**:函数 $f(x)=-x^3+1$ 的定义域为 $\mathbf{R}$. 任取 $x_1,x_2\in$

$\mathbf{R}$,且 $x_1<x_2$,则

$f(x_1)-f(x_2)=(-x_1^3+1)-(-x_2^3+1)=x_2^3-x_1^3$

$=(x_2-x_1)(x_2^2+x_1x_2+x_1^2)$

$\geqslant(x_2-x_1)(2|x_1x_2|+x_1x_2)$

$\geqslant|x_1x_2|(x_2-x_1)>0$,

即得 $f(x_1)>f(x_2)$.

故函数 $f(x)$是减函数.

13. **解**:(1)因为函数 $f(x)=x^2(1+x^2)$的定义域为 $\mathbf{R}$,且 $f(-x)=(-x)^2[1+(-x)^2]=x^2(1+x^2)=f(x)$,

所以 $f(x)=x^2(1+x^2)$是偶函数.

(2)因为函数 $f(x)=x(x+1)(x-1)$的定义域为 $\mathbf{R}$,且 $f(-x)=(-x)[(-x)+1][(-x)-1]=-x(x+1)\cdot(x-1)=-f(x)$,

所以 $f(x)=x(x+1)(x-1)$是奇函数.

14. **解**:由 $y=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$,

解得 $e^y=x+\sqrt{x^2-1}$,$e^{-y}=x-\sqrt{x^2-1}$,

故 $e^y+e^{-y}=2x$,于是 $x=\dfrac{e^y+e^{-y}}{2}$,

故所求反函数为 $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$,$x\geqslant0$.

决 胜 提 升

一、单项选择题

1. D 【解析】使根式 $\sqrt{x-3}$ 有意义的实数 x 的集合是 $\{x|x-3\geqslant0\}=\{x|x\geqslant3\}$,使 $\arcsin\dfrac{1}{x}$ 有意义的实数 x 的集合是 $\left\{x\,\middle|\,-1\leqslant\dfrac{1}{x}\leqslant1\right\}=\{x|x\geqslant1$ 或 $x\leqslant-1\}$. 因此,函数 $f(x)$的定义域是 $\{x|x\geqslant3\}\cap\{x|x\geqslant1$ 或 $x\leqslant-1\}=\{x|x\geqslant3\}$,即 $[3,+\infty)$. 故本题选 D.

2. B 【解析】因为函数 $f(x+1)$的定义域为 $[2,5]$,所以函数 $f(x)$的定义域为 $[3,6]$,从而函数 $f(3x)$的定义域为 $[1,2]$. 又因为使 $\dfrac{1}{\sqrt{\log_2(4-x^2)}}$ 有意义的实数 x 的集合是 $\{x|\log_2(4-x^2)>0\}=\{x|4-x^2>1\}=\{x|-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}\}$,即 $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$,所以函数 $y=\dfrac{f(3x)}{\sqrt{\log_2(4-x^2)}}$ 的定义域为 $[1,2]\cap(-\sqrt{3},\sqrt{3})=[1,\sqrt{3})$.

3. C 【解析】若 $a>b$,则 $a-b>0$,从而 $\dfrac{a+b+(a-b)f(a-b)}{2}=\dfrac{a+b+(a-b)\times1}{2}=a$;若 $a<b$,则 $a-b<0$,从而 $\dfrac{a+b+(a-b)f(a-b)}{2}=\dfrac{a+b+(a-b)\times(-1)}{2}=b$.

综上,$\dfrac{a+b+(a-b)f(a-b)}{2}$ 的值是 a,b 中较大的数.

4. B 【解析】①$f(x)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{x^2-1}$ 的定义域为 $\{-1,1\}$,在定义域内 $f(x)=f(-x)=0$,故该函数是奇函数;②$f(x)=e^x-e^{-x}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,在定义域内 $f(-x)=e^{-x}-e^x=-f(x)$,故该函数是奇函数;③$f(x)=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{|x+3|-3}$ 的定义域为 $[-2,0)\cup(0,2]$,在定义域内 $f(-x)=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{|-x+3|-3}\neq-f(x)$,故该函数不是奇函数;④$f(x)=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$ 的定义域为 $(-1,1)$,在定义域内 $f(-x)=\lg\dfrac{1+x}{1-x}=-\lg\dfrac{1-x}{1+x}=-f(x)$,故该函数是奇函数. 综上,奇函数的个数为 3.

5. C 【解析】容易判断,四个选项中,只有 C,D 两项是偶函数,并且 C 项函数在 $(0,+\infty)$上单调递减,D 项函数在 $(0,+\infty)$上单调递增.

6. C 【解析】因为函数 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数,所以 $f(2^{0.6})=f(-2^{0.6})$,又 $f(x)$在 $(-\infty,0)$上单调递减,而 $-3=-\log_3 27<-\log_3 13<-\log_3 9=-2<-2^{0.6}$,所以 $f(-2^{0.6})<f(-\log_3 13)<f(-3)$,即 $f(2^{0.6})<f(-\log_3 13)<f(-3)$.

7. D 【解析】由题意可列不等式组 $\begin{cases}x^2-x-2>1-x,\\-2\leqslant x^2-x-2\leqslant0,\\-2\leqslant1-x\leqslant0,\end{cases}$

解得 $\sqrt{3}<x\leqslant2$.

8. C 【解析】由函数 $f(x)$的奇偶性和周期性,得 $f(1)=-f(-1)=-f(3)=\dfrac{3-m}{m+1}$. 由于 $f(1)>0$,所以 $\dfrac{3-m}{m+1}>0$,解得 $-1<m<3$.

9. B 【解析】因为 $f(x)$与 $f^{-1}(x)$互为反函数,所以 $f^{-1}(x)$的反函数即为函数 $f(x)$. 令 $y=\dfrac{3x+5}{x-2}$,则 $y=\dfrac{3x+5}{x-2}=\dfrac{3(x-2)+11}{x-2}=3+\dfrac{11}{x-2}$,从而 $x=2+\dfrac{11}{y-3}=\dfrac{2y+5}{y-3}$,交换 x,y,得 $y=\dfrac{2x+5}{x-3}$. 因此,$f(x)=\dfrac{2x+5}{x-3}$,于是 $a=5$,$b=2$,$c=-3$.

10. C 【解析】命题①,函数 $y=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$ 在 $x=-\dfrac{\pi}{2}$ 处有定义,函数 $y=\ln\tan\dfrac{x}{2}$ 在 $x=-\dfrac{\pi}{2}$ 处没有定义,所以两函数定义域不同,从而它们不是同一函数.

命题②,任取函数 $y=f(2x)$图像上一点 (x_0,y_0),则点 $(2x_0,y_0)$在函数 $y=f(x)$的图像上. 因为函数 $y=$

$f(x)$与$y=g(x)$的图像关于直线$y=x$对称，所以点$(y_0,2x_0)$在函数$y=g(x)$的图像上，从而$x_0=\frac{1}{2}g(y_0)$，即点(x_0,y_0)关于直线$y=x$的对称点(y_0,x_0)在函数$y=\frac{1}{2}g(x)$的图像上. 同理可证，任取$y=\frac{1}{2}f(x)$图像上一点(x'_0,y'_0)，其关于直线$y=x$的对称点(y'_0,x'_0)在函数$y=f(2x)$的图像上. 因此，函数$y=f(2x)$与$y=\frac{1}{2}g(x)$的图像关于直线$y=x$对称.

命题③，已知奇函数$f(x)$满足$f(x)=f(2-x)$，则$f(x)=-f(-x)=-f(2+x)$，于是$f(x)=-f(2+x)=-[-f(4+x)]=f(4+x)$，即$f(x)$是周期为4的周期函数. 综上，命题②③正确.

11. C **【解析】**幂函数$y=x^{\frac{1}{2}}$是非奇非偶函数，A项命题是假命题；幂函数$y=x^{-1}$是奇函数，但其图像不过原点，B项命题是假命题；若幂函数$y=x^a$的定义域关于原点对称，且它的图像不过点$(-1,1)$，则$(-1)^a\neq1$，$(-x)^a=(-1)^a\cdot x^a\neq x^a$，从而该幂函数一定不是偶函数，C项命题是真命题；幂函数$y=x^3$与$y=x$有三个不同的交点$(-1,-1)$，$(1,1)$，$(0,0)$，但这两个函数不相同，D项命题是假命题.

12. C **【解析】**根据题意，在对称区间上$f(-x)=-f(x)$，$g(-x)=g(x)$，则$f((-x)^4)=f(x^4)$，$f(-x)+g(-x)=-f(x)+g(x)$，$f(-x)g(-x)=-f(x)g(x)$，$-g(-(-x))=-g(x)=-g(-x)$，从而$f(x)g(x)$是奇函数.

13. D **【解析】**因为函数$f(x)=\ln(\sqrt{1+x^2}-x)$的定义域为$\mathbf{R}$，且$f(-x)=\ln(\sqrt{1+x^2}+x)=\ln\frac{(\sqrt{1+x^2}+x)(\sqrt{1+x^2}-x)}{\sqrt{1+x^2}-x}=\ln\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x}=-\ln(\sqrt{1+x^2}-x)=-f(x)$，所以$f(x)$是奇函数.

14. A **【解析】**因为$f(x)$是奇函数，所以$\sin f(-x)+\ln(\sqrt{1+(-x)^2}-(-x))=-\sin f(x)-\ln(\sqrt{1+x^2}-x)=-[\sin f(x)+\ln(\sqrt{1+x^2}-x)]$，即$\sin f(x)+\ln(\sqrt{1+x^2}-x)$是奇函数.

二、填空题

1. 0 **【解析】**因为函数$f(x)=x^a$的图像经过点$\left(3,\frac{1}{3}\right)$，所以$3^a=\frac{1}{3}$，于是$a=\log_3\frac{1}{3}=-1$，从而$g(x)=(2x-1)x^{-1}=2-x^{-1}$. 显然，$g(x)=2-x^{-1}$在区间$\left[\frac{1}{2},2\right]$上单调递增，所以$g(x)$在$\left[\frac{1}{2},2\right]$上的最小值为$g\left(\frac{1}{2}\right)=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=0$.

2. $\left(0,\frac{1}{2}\right)\cup(2,+\infty)$ **【解析】**根据已知条件，结合偶函数的性质，不等式$f(\log_{\frac{1}{8}}x)>0$的解集为$\left\{x\,\middle|\,\left|\log_{\frac{1}{8}}x\right|>\frac{1}{3}\right\}=\left\{x\,\middle|\,0<x<\frac{1}{2}\text{或}x>2\right\}$，即$\left(0,\frac{1}{2}\right)\cup(2,+\infty)$.

3. $\frac{1}{2}$ **【解析】**由$f(x)$是偶函数，得$f(1)=f(-1)$，即$\lg(10+1)+a=\lg\left(\frac{11}{10}\right)-a$，整理得$a=-\frac{1}{2}$；由$g(x)$是奇函数，得$g(0)=\frac{4^0-b}{2^0}=0$，整理得$b=1$. 因此，$a+b=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$.

4. $\frac{5}{2}$ **【解析】**由$f(x+2)=-\frac{1}{f(x)}$，得$f(x)=-\frac{1}{f(x+2)}=f(x+4)$，即$f(x)$是周期为4的周期函数. 由于当$2\leqslant x\leqslant3$时，$f(x)=x$，所以$f\left(-\frac{11}{2}\right)=f\left(-\frac{11}{2}+4\times2\right)=f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{5}{2}$.

5. $\frac{255}{16}$ **【解析】**因为$f(x)$是奇函数，$g(x)$是偶函数，所以在$f(x)+g(x)=a^x-a^{-x}+4$中，分别令$x=2$和-2，得$\begin{cases}f(2)+g(2)=a^2-a^{-2}+4,\\-f(2)+g(2)=a^{-2}-a^2+4.\end{cases}$于是$a=g(2)=\frac{[f(2)+g(2)]+[-f(2)+g(2)]}{2}=4$，从而$f(2)=4^2-4^{-2}+4-4=\frac{255}{16}$.

6. $\sqrt{2}$ **【解析】**因为当$x\geqslant0$时，$f(x)=x^2$，所以函数$f(x)$在$[0,+\infty)$上是单调增加的，又$f(x)$是$\mathbf{R}$上的奇函数，所以$f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增. 于是，由$f(x+a)\geqslant f(\sqrt{2}x)$知，$x+a-\sqrt{2}x\geqslant0$，对任意的$x\in[a,a+2]$恒成立. 令$g(x)=x+a-\sqrt{2}x$，由于函数$g(x)$在$[a,a+2]$上是单调减少的，所以令$2a+2-\sqrt{2}(a+2)\geqslant0$，解得$a\geqslant\sqrt{2}$. 因此，$a$的最小值为$\sqrt{2}$.

7. $y=\log_2\frac{x}{1-x}$，$x\in(0,1)$ **【解析】**由$y=\frac{2^x}{2^x+1}$，得$2^x=\frac{y}{1-y}$，等号两边取2为底的对数，得$x=\log_2\frac{y}{1-y}$，交换x,y得$y=\log_2\frac{x}{1-x}$，于是$y=\frac{2^x}{2^x+1}$的反函数为$y=\log_2\frac{x}{1-x}$，$x\in(0,1)$.

三、解答题

1. **解**：$f(g(x))=\begin{cases}1,|g(x)|\leqslant 1,\\0,|g(x)|>1\end{cases}=\begin{cases}1,|x|=1,\\0,|x|\neq 1.\end{cases}$

$g(f(x))=\begin{cases}2-[f(x)]^2,|f(x)|\leqslant 1,\\2, \quad |f(x)|>1\end{cases}=\begin{cases}1,|x|\leqslant 1,\\2,|x|>1.\end{cases}$

2. **解**：因为 $f(x)$ 的定义域为 $[-1,1]$，所以 $f(ax)$ 的定义域为 $\{x|-1\leqslant ax\leqslant 1\}=\left\{x\left|-\frac{1}{a}\leqslant x\leqslant \frac{1}{a}\right.\right\}$，$f\left(\frac{x}{a}\right)$ 的定义域为 $\left\{x\left|-1\leqslant \frac{x}{a}\leqslant 1\right.\right\}=\{x|-a\leqslant x\leqslant a\}$.

因此，当 $a\geqslant 1$ 时，$f(ax)+f\left(\frac{x}{a}\right)$ 的定义域为 $\left\{x\left|-\frac{1}{a}\leqslant x\leqslant \frac{1}{a}\right.\right\}$，即 $\left[-\frac{1}{a},\frac{1}{a}\right]$；

当 $0<a<1$ 时，$f(ax)+f\left(\frac{x}{a}\right)$ 的定义域为 $\{x|-a\leqslant x\leqslant a\}$，即 $[-a,a]$.

3. **解**：分别以 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 的两边为指数，e 为底数，得 $e^y=x+\sqrt{x^2+1}$，

移项整理得 $\sqrt{x^2+1}=e^y-x$，

等号两边同时平方，整理得 $x=\frac{e^y-e^{-y}}{2}$.

故函数 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 的反函数为 $y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$.

4. **解**：因为 $f(x)$ 是偶函数，$g(x)$ 是奇函数，

所以 $f(x)-g(x)=f(-x)+g(-x)=\frac{1}{-x-1}$，

于是 $f(x)=\frac{[f(x)+g(x)]+[f(x)-g(x)]}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)=\frac{1}{x^2-1}$，

$g(x)=\frac{[f(x)+g(x)]-[f(x)-g(x)]}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}\right)=\frac{x}{x^2-1}$.

5. **解**：(1) 任取 $x_1,x_2\in(-\infty,1)$，且 $x_1<x_2$，则 $1-x_1>1-x_2>0$，从而 $\frac{1}{1-x_1}<\frac{1}{1-x_2}$，

即得 $f(x_1)<f(x_2)$.

故 $f(x)=\frac{1}{1-x}$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调增加.

(2) 任取 $x_1,x_2\in(1,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，则 $x_1+x_2>2$，$x_2-x_1>0$，从而 $f(x_2)-f(x_1)=x_2^2-x_1^2-2(x_2-x_1)=(x_2+x_1-2)(x_2-x_1)>0$，即得 $f(x_1)<f(x_2)$.

故 $f(x)=x^2-2x$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调增加.

6. **解**：(1) $f(x)$ 在定义域上是单调增加的.

证明：在 $[-2,2]$ 上任取两点 x_1,x_2，且 $x_1<x_2$，则 $x_1+(-x_2)<0$. 因为 $x_1+(-x_2)\neq 0$，所以 $\frac{f(x_1)+f(-x_2)}{x_1+(-x_2)}>0$，又 $f(x)$ 是奇函数，所以 $f(x_1)-f(x_2)=f(x_1)+f(-x_2)=\frac{f(x_1)+f(-x_2)}{x_1+(-x_2)}\cdot[x_1+(-x_2)]<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$，

故 $f(x)$ 在定义域上是单调增加的.

(2) 因为 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上是单调增加的，所以由 $f(2x-1)\leqslant f(x^2-1)$，得 $\begin{cases}-2\leqslant 2x-1\leqslant 2,\\-2\leqslant x^2-1\leqslant 2,\\2x-1\leqslant x^2-1,\end{cases}$

解得 $-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 0$.

7. **解**：设 $y=f(x)$，则由反函数的定义，得

$x=\begin{cases}3y,-2<3y<1,\\\sqrt{y},1\leqslant\sqrt{y}\leqslant 2\end{cases}=\begin{cases}3y,-\frac{2}{3}<y<\frac{1}{3},\\\sqrt{y},1\leqslant y\leqslant 4,\end{cases}$

将 x,y 互换，得所求反函数为

$f^{-1}(x)=y=\begin{cases}3x,-\frac{2}{3}<x<\frac{1}{3},\\\sqrt{x},1\leqslant x\leqslant 4.\end{cases}$

第二节　极　　限

筑 基 强 化

一、单项选择题

1. C 【解析】令 $f(x)=-g(x)$，则 $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]=0$，A 项错误；令 $f(x)=g(x)$，则 $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)]=0$，B 项错误；由无穷小量与无穷大量的关系知 $\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=0$，C 项正确；令 $f(x)=-g(x)$，则 $\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{f(x)+g(x)}$ 没有意义，D 项错误.

2. C 【解析】$\lim\limits_{x\to 0}(1+2\sin x)^{\frac{2}{\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(2\sin x\cdot\frac{2}{\sin x}\right)}=e^4$.

3. C 【解析】根据题意，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x^2)^k-1}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{kx^2}{\frac{1}{2}x^2}=2k=1$，所以 $k=\frac{1}{2}$.

4. A 【解析】因为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=3$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{x}\cdot x\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}x=3\times 0=0$.

5. B 【解析】因为 $\lim\limits_{x\to 0}(x+2)=2$，$\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$，$\lim\limits_{x\to 0}(x+1)^2=1$，$\lim\limits_{x\to 0}2^x=1$，所以 x^2 是 $x\to 0$ 时的无穷小量.

6. C 【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}$.

7. B 【解析】当 $x\to0$ 时，$\sin^2 x$ 和 x^2 是 x 的高阶无穷小量，$\ln(1+x)$ 是 x 的等价无穷小量，$2x^2-x$ 是 x 的同阶非等价无穷小量.

8. B 【解析】因为 $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(2-x)=1$，$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(2x-1)=1$，所以 $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}f(x)$，从而 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=1$.

9. B 【解析】$x\to0$ 时，$e^x-1\sim x$，所以 $e^{2x}-1\sim 2x$.

10. A 【解析】$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{8^x}{8^x-5^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1-\left(\frac{5}{8}\right)^x}=1$.

11. C 【解析】$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x+1}\right)^x=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\frac{2}{x+1}\cdot x\right)}=e^{-2}$.

12. A 【解析】$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{3}{x+1}\right)^{2x}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{3}{x+1}\cdot 2x\right)}=e^{-6}$.

13. D 【解析】因为 $\lim\limits_{x\to0^-}2^{\frac{1}{x}}=0$，$\lim\limits_{x\to0^+}2^{\frac{1}{x}}=\infty$，所以 $\lim\limits_{x\to0}2^{\frac{1}{x}}$ 不存在.

14. C 【解析】$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin(x^2-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}(x+1)=2$.

15. D 【解析】因为 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{-x}{x}=-1$，所以 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$，从而 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 不存在.

16. C 【解析】无穷小量是极限为零的变量，无穷大量是极限为无穷的变量，无穷大量的倒数是无穷小量.

17. C 【解析】因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{2x\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{2x^2}=\dfrac{1}{2}$，所以当 $x\to0$ 时，$\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是同阶无穷小.

18. A 【解析】$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$.

19. A 【解析】$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-2}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{3x-2}\right)^{2x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4}{3x-2}\cdot 2x\right)}=e^{\frac{8}{3}}$.

20. B 【解析】$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{4x}=\lim\limits_{x\to\infty}e^{\left(-\frac{1}{x}\right)\cdot 4x}=e^{-4}$.

21. B 【解析】函数在一点处的极限存在的充要条件是，函数在该点处左、右极限都存在且相等. 由 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在可推出函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处左、右极限都存在，但反之不成立，因此函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处左、右极限都存在是 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在的必要不充分条件.

22. A 【解析】因为 $\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}\sin x=1$，$\lim\limits_{x\to0}\ln x^2=-\infty$，$\lim\limits_{x\to0}e^x=1$，所以当 $x\to0$ 时，$x\sin\dfrac{1}{x}$ 是无穷小量.

23. A 【解析】当 $x\to0$ 时，$e^{x^3}-1\sim x^3$，$x^2\sin x\sim x^3$，所以 $e^{x^3}-1\sim x^2\sin x$.

24. A 【解析】$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+2}{x-2}=-3$.

25. D 【解析】$\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{2}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\left(x\cdot\frac{2}{x}\right)}=e^2$.

26. B 【解析】当 $x\to0$ 时，$\sin x^2\sim x^2$.

27. C 【解析】因为 $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$，$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=1$，所以 $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}+\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=e+1$.

28. D 【解析】$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{2x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\cdot 2x\right)}=e^{-2}$.

29. D 【解析】$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin(2\,012x)}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}\sin x=1$，$\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=1$.

30. A 【解析】$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin 3x}{x}=\lim\limits_{x\to0}(\sec^2 x-3\cos 3x)=-2$.

31. A 【解析】$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{x-1}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left[-\frac{2}{x}\cdot(x-2)\right]}=e^{-2}$.

32. A 【解析】$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to0}(1+x)^x=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x=e^{-1}$.

33. C 【解析】$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos\frac{x}{2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2}{x^2}=\dfrac{1}{8}$.

34. D 【解析】函数在一点处是否存在极限与函数在该点处是否有意义无关.

35. C 【解析】因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin ax}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{ax}{2x}=\dfrac{a}{2}=1$，所以 $a=2$.

36. C 【解析】当 $x\to0$ 时，$\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}\sim\dfrac{x}{\sqrt{x}}=\sqrt{x}$，所以 $\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$ 是 x 的低阶无穷小量；当 $x\to0$ 时，$2\sin x\sim 2x$，所以 $2\sin x$ 是 x 的同阶无穷小量，但不是等价无穷小量；当 $x\to0$ 时，$\ln(1+x)\sim x$，所以 $\ln(1+x)$ 是 x 的等价无穷小量；当 $x\to0$ 时，$\ln(1+x^2)\sim x^2$，所以 $\ln(1+x^2)$ 是 x 的高阶无穷小量. 故本题选 C.

37. A 【解析】当 $x\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{x}$ 是无穷小量，$\sin 2x$ 是有界

量，所以$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin 2x}{x}=0$. 故本题选 A.

二、填空题

1. 0 【解析】当 $x\to 0$ 时，x 是无穷小量，$\sin\frac{1}{x}$ 是有界量，因此，$\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$.

2. $\frac{5}{2}$ 【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x}{2x}=\frac{5}{2}$.

3. e 【解析】$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$.

4. e^{-2} 【解析】$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x+1}\right)^x=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\frac{2}{x+1}\cdot x\right)}=\mathrm{e}^{-2}$.

5. -1 【解析】$\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sin(x-2)}{x^2-5x+6}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(x-3)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{x-3}=-1$.

6. $\frac{1}{2}$ 【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x}{x}=\frac{1}{2}$.

7. $-\frac{1}{3}$ 【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1-x^2}}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{3(x^2-1)}=-\frac{1}{3}$.

8. e^{-2} 【解析】$\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\left[(-2x)\cdot\frac{1}{x}\right]}=\mathrm{e}^{-2}$.

9. $\frac{1}{4}$ 【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{2x^2}=\frac{1}{4}$.

10. $\frac{1}{2}$ 【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\sin x}{x}=\frac{1}{2}$.

11. 2 【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=2$.

12. 2 【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^2-x\sin 2x+4}=\sqrt{\lim\limits_{x\to 0}(x^2-x\sin 2x+4)}=\sqrt{4}=2$.

13. 1 【解析】$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\mathrm{e}^{-x}+1}=1$.

14. -1 【解析】因为$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{nk}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n}\cdot nk\right)}=\mathrm{e}^{3k}=\mathrm{e}^{-3}$，所以 $k=-1$.

15. e^8 【解析】$\lim\limits_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{2}{\sin x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\left(4x\cdot\frac{2}{\sin x}\right)}=\mathrm{e}^8$.

16. e^{x+1} 【解析】$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+x}{n-1}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x+1}{n-1}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{e}^{\left(\frac{x+1}{n-1}\right)\cdot n}=\mathrm{e}^{x+1}$.

17. 2 【解析】根据题意，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2+mx}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{3}{2}x+\frac{m}{2}\right)=\frac{m}{2}=1$，解得 $m=2$.

18. 3 【解析】利用等价无穷小因子替换，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{f(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{6x}{2x}=3$.

三、解答题

1. **解**：当 x 趋于 1 时，$x+2$ 无限接近于 3，所以$\lim\limits_{x\to 1}(x+2)=3$.

2. **解**：当 x 趋于 1 时，$\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}=x+1$，所以 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2$.

3. **解**：当 n 无限增大时，$1+\frac{1}{n}$ 无限接近于 1，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$.

4. **解**：当 n 无限增大时，$\left(\frac{1}{3}\right)^n$ 无限接近于 0，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$.

5. **解**：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x-2}\right)^x=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4}{x-2}\cdot x\right)}=\mathrm{e}^4$.

6. **解**：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\mathrm{e}^x-1)^2}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2}=2$.

7. **解**：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2}=2$.

8. **解**：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}-2x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^x\sin x}-\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{x\mathrm{e}^x}-2=2-2=0$.

9. **解**：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^3}{x^3\cos x}=\frac{1}{2}$.

10. **解**：$\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt[x]{1-2x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\mathrm{e}^{\frac{\ln(1-2x)}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(1-2x)}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-2x}{x}}=\mathrm{e}^{-2}$.

11. **解**：$\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{\sin x}=1$.

12. **解**：$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{x+1}=0$.

13. **解**：$\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\sin\frac{1}{x}+\mathrm{e}^{2x-1}+4x\right)=\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\frac{1}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{2x-1}+\lim\limits_{x\to 0}4x=0+\mathrm{e}^{-1}+0=\mathrm{e}^{-1}$.

14. **解**：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{(\mathrm{e}^x-1)\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}=1$.

15. **解**：$\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{3}{\sin x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\left(3x\cdot\frac{3}{\sin x}\right)}=\mathrm{e}^9$.

16. **解**：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x^2)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^2}{x^2}=2$.

17. **解**:$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+2x}{2+2x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2+2x}\right)^x=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2+2x}\cdot x\right)}$

$=e^{\frac{1}{2}}$.

18. **解**:$\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln(1+x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(1+x)^x=\ln 1=0$.

19. **解**:$\lim\limits_{x\to 2}(x^2+3x)=\lim\limits_{x\to 2}x^2+\lim\limits_{x\to 2}3x=4+6=10$.

20. **解**:$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+x+1}{x^3+2x^2-1}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 1}(2x^2+x+1)}{\lim\limits_{x\to 1}(x^3+2x^2-1)}=$

$\dfrac{\lim\limits_{x\to 1}2x^2+\lim\limits_{x\to 1}x+\lim\limits_{x\to 1}1}{\lim\limits_{x\to 1}x^3+\lim\limits_{x\to 1}2x^2-\lim\limits_{x\to 1}1}=\dfrac{2+1+1}{1+2-1}=2$.

21. **解**:$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x-4)(x+4)}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4}(x+4)=$

$\lim\limits_{x\to 4}x+\lim\limits_{x\to 4}4=8$.

22. **解**:因为当 $x\to 0$ 时,$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$,

所以$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{2x^2}=\dfrac{1}{2}$.

23. **解**:因为当 $x\to 0$ 时,$\tan 2x\sim 2x$,$\ln(1+x)\sim x$,

所以$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{x}=2$.

24. **解**:因为当 $x\to 0$ 时,$\sqrt{1+x}-1\sim\dfrac{1}{2}x$,$e^x-1\sim x$,所以

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{1-e^x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{-2x}=-\dfrac{1}{2}$.

25. **解**:$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(2+x^2)=2+1^2=3$,

$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(1+2x)=1+2\times 1=3$.

因为 $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=3$,所以由函数 $f(x)$在点 $x=1$ 处极限存在的充要条件可知,$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=3$.

26. **证明**:$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2+1)=0+1=1$,

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x-1)=0-1=-1$,

因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$,所以$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$不存在.

27. **解**:$\lim\limits_{x\to 2}(x^2+3x-2)=\lim\limits_{x\to 2}x^2+\lim\limits_{x\to 2}3x-\lim\limits_{x\to 2}2=(\lim\limits_{x\to 2}x)^2$

$+3\lim\limits_{x\to 2}x-2=2^2+3\times 2-2=8$.

28. **解**:因为$\lim\limits_{x\to 2}(x^2-9)=-5\neq 0$,

所以$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+2}{x^2-9}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 2}(x^3+2)}{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-9)}=\dfrac{2^3+2}{2^2-9}=-2$.

29. **解**:当 $x\to 3$ 时,分子和分母的极限均为零,但可约去公因子 $x-3\neq 0$,即$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-5x+6}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{(x-3)(x-2)}$

$=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{x-2}=1$.

30. **解**:当 $x\to\infty$ 时,分子、分母的极限均不存在,为无穷大,不能直接应用运算法则.将分子、分母同除以 x 的最高次幂 x^5,得$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^5-3x^2+1}{4x^5+2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-\dfrac{3}{x^3}+\dfrac{1}{x^5}}{4+\dfrac{2}{x^4}}=$

$\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\dfrac{3}{x^3}+\dfrac{1}{x^5}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(4+\dfrac{2}{x^4}\right)}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$.

31. **解**:分子、分母同除以 x 的最高次幂 x^3,

得$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x-1}{7x^3+3}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}}{7+\dfrac{3}{x^3}}=$

$\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(7+\dfrac{3}{x^3}\right)}=\dfrac{0}{7}=0$.

32. **解**:分子、分母同除以 x 的最高次幂 x^4,得

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+x+1}{5x^2-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x^4}}{\dfrac{5}{x^2}-\dfrac{1}{x^4}}$.

由于分子极限为 1,分母极限为 0,

所以$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+x+1}{5x^2-1}=\infty$.

33. **解**:因为$\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$,又$\lim\limits_{x\to 0}x^3=0$,所以$\lim\limits_{x\to 0}x^3\cdot\sin\dfrac{1}{x}$

$=0$.

34. **解**:$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2}=$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{2}n(n+1)}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2n}=\dfrac{1}{2}$.

35. **解**:当 $x\to 0$ 时,$\sin x\sim x$,

所以$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x^3+3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x^3+3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2+3}=\dfrac{1}{3}$.

36. **解**:$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}=1$.

37. **解**:$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}=\dfrac{2}{3}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\sin 2x}{2x}}{\dfrac{\sin 3x}{3x}}=\dfrac{2}{3}$.

38. **解**:$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{2}x^2}{3x^2}=\dfrac{1}{6}$.

39. **解**:$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{3}{x}}=[\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}]^3=e^3$.

40. **解**:$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^{-2}=e^{-2}$.

41. **解**:$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{3\sec x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}[(1+\cos x)^{\frac{1}{\cos x}}]^3=e^3$.

决胜提升

一、单项选择题

1. A 【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-1}{x(x-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+1}{x}=\infty$，$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x}=2$，$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2-1}{x(x-1)}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x+1}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2-1}{x(x-1)}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x+1}{x}=1$.

2. D 【解析】因为$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^2+(a+2)(x-1)+a+b+1}{x-1}=3$，所以$\begin{cases}a+2=3,\\a+b+1=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=1,\\b=-2.\end{cases}$

3. B 【解析】$\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to \infty}x\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sin\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}}=1$，$\lim\limits_{n\to \infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$.

4. B 【解析】$\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to \infty}x\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sin\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}}=1$，$\lim\limits_{x\to \infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\cdot x\right)}=\mathrm{e}^{-1}$，$\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{-x}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{1}{x}\cdot(-x)\right]}=\mathrm{e}^{-1}$.

5. D 【解析】因为$\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\sin x=1$，所以$\lim\limits_{x\to 0}\left(x\sin\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x}\sin x\right)=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\sin x=0-1=-1$.

6. B 【解析】根据题意，$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x^2-1)=-1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}3^x=1$.

7. A 【解析】$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{2}$，$\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to +\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}=1$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2}{x^2}=2$.

8. C 【解析】因为$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{1-\sqrt[3]{x}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{1-(1+x-1)^{\frac{1}{3}}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{-\dfrac{1}{3}(x-1)}=3$，所以$f(x)$与$g(x)$是同阶但不等价的无穷小量.

9. B 【解析】因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{4}(\cos 3x-\cos x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{4}[\cos(2x+x)-\cos(2x-x)]}{x^2}=-\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x\sin x}{x^2}=-\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2}{x^2}=-1$，所以当$x\to 0$时，$\dfrac{1}{4}(\cos 3x-\cos x)$是$x^2$的同阶但不等价无穷小量.

10. C 【解析】因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\dfrac{1}{2}x^2}{x}=0$，所以当$x\to 0$时，$\cos x-1$是$x$的高阶无穷小量.

11. B 【解析】因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x^2+3x^6}{2x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x^2}{2x^2}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^6}{2x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2}{2x^2}+\dfrac{3}{2}\lim\limits_{x\to 0}x^4=1+0=1$，所以当$x\to 0$时，与$2\sin x^2+3x^6$等价的无穷小量是$2x^2$.

12. D 【解析】令$f(x)=x+1$，$g(x)=-x$，则$\lim\limits_{x\to \infty}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to \infty}g(x)=\infty$，但$\lim\limits_{x\to \infty}[f(x)+g(x)]=1$，$\lim\limits_{x\to \infty}[f(x)-g(x)]=\infty$，$\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{1}{f(x)+g(x)}=1$，A，B，C三项错误.

13. C 【解析】$\lim\limits_{x\to \infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{2x}=\mathrm{e}^{-2}$，$\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{-x}=\mathrm{e}^{-1}$，$\lim\limits_{x\to \infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{1-x}=\mathrm{e}$，$\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{-2x}=\mathrm{e}^{-2}$.

14. B 【解析】因为$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}x=0$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)=0$，所以$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0$，从而$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$. 因为$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(-x)=-1$，$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)=0$，所以$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)$，从而$\lim\limits_{x\to 1}f(x)$不存在. 故本题选B.

15. A 【解析】$\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x+2}{x}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{2x}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2}{x}\cdot 2x\right)}=\mathrm{e}^4$.

16. A 【解析】$\lim\limits_{x\to \infty}x\sin\dfrac{1}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2}=0$.

17. C 【解析】因为$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{1}{2}(1-x^3)}{1-x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-x)(1+x+x^2)}{1-x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 1}(1+x+x^2)=\dfrac{3}{2}\neq 1$，所以$\dfrac{1}{2}(1-x^3)$是$(1-x)$的同阶无穷小量，但不是等价无穷小量；因为$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{1}{2}(1-\sqrt{x})}{1-x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt{x}}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}=\dfrac{1}{4}$，所以

$\frac{1}{2}(1-\sqrt{x})$是$(1-x)$的同阶无穷小量，但不是等价无穷小量；因为$\lim\limits_{x\to1}\frac{\frac{1}{2}(1-x^2)}{1-x}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to1}\frac{(1+x)(1-x)}{1-x}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to1}(1+x)=1$，所以$\frac{1}{2}(1-x^2)$与$(1-x)$是$x\to1$时的等价无穷小量；因为$\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{2}(1+\sqrt{x})=1\neq0$，所以$\frac{1}{2}(1+\sqrt{x})$不是无穷小量.

综上，本题选C.

18. D 【解析】根据极限的四则运算，有限个无穷小量的和仍为无穷小量，A项说法正确；因为$\lim\limits_{x\to1}\frac{1-x^3}{1-x}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(1-x)(1+x+x^2)}{1-x}=3$，所以当$x\to1$时，$1-x^3$是$1-x$的同阶无穷小量，B项说法正确；因为$\alpha\sim\beta,\beta\sim\gamma$，所以$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta}=1$，$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\beta}{\gamma}=1$，从而$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\gamma}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta}\cdot\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\beta}{\gamma}=1$，即$\alpha\sim\gamma$，C项说法正确；当$x\to0$时，$\cos x$与$1-x$都不是无穷小量，D项说法错误. 故本题选D.

19. D 【解析】A项，当$x\to0$时2^x不是无穷小量；B项，因为$\lim\limits_{x\to0}\frac{2^x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x\ln2}{x^2}=\infty$，所以当$x\to0$时$2^x-1$为$x^2$的低阶无穷小量；C项，因为$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+2x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2x}{x^2}=\infty$，所以当$x\to0$时$\ln(1+2x)$为$x^2$的低阶无穷小量；D项，因为$\lim\limits_{x\to0}\frac{x\sin x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{x^2}=1$，所以当$x\to1$时，$x\sin x$为$x^2$的等价无穷小量.

20. B 【解析】$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^{\frac{1}{3}}-1}{x^{\frac{8}{3}}}=\infty$，A项错误；$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^3}-1}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{x^3}{2}}{x^3}=\frac{1}{2}$，B项正确；$\lim\limits_{x\to0}\frac{x^3+0.002x^2}{x^3}=1+\lim\limits_{x\to0}\frac{0.002}{x}=\infty$，C项错误；$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{\sin x^3}}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^2}=\infty$，D项错误.

二、填空题

1. 1 【解析】因为$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$，而$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1$.

2. $\frac{3}{2}$ 【解析】$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{(\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-x})}{x(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-x})}=\lim\limits_{x\to0}\frac{3}{\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-x}}=\frac{3}{2}$.

3. $\frac{1}{4}$ 【解析】$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{2n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2+n}{2}}{2n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{4}=\frac{1}{4}$.

4. 1 【解析】$\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{3}{1+x^3}-\frac{1}{1+x}\right)=\lim\limits_{x\to1}\frac{3}{1+x^3}-\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{1+x}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=1$.

5. $e^{-\frac{3}{2}}$ 【解析】$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+6}\right)^{\frac{x-1}{2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x+6}\right)^{\frac{x-1}{2}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(-\frac{3}{x+6}\right)\cdot\frac{x-1}{2}\right]}=e^{-\frac{3}{2}}$.

6. 9 【解析】因为$\lim\limits_{x\to+\infty}(3x-\sqrt{ax^2-x+1})=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(3x-\sqrt{ax^2-x+1})(3x+\sqrt{ax^2-x+1})}{3x+\sqrt{ax^2-x+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(9-a)x^2+x-1}{3x+\sqrt{ax^2-x+1}}$存在，

所以$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(9-a)x^2+x-1}{3x+\sqrt{ax^2-x+1}}\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(9-a)x^2+x-1}{3x^2+x\sqrt{ax^2-x+1}}=\frac{9-a}{3+\sqrt{a}}=0$，从而$a=9$.

7. $\frac{1}{a}$ 【解析】因为$a>b>0$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b^n}{a^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{b}{a}\right)^n=0$，

于是$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n+b^n}{a^{n+1}+b^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n}{a+b\left(\frac{b}{a}\right)^n}=\frac{1}{a}$.

8. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 【解析】（方法一）

原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}-\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}\right)$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n(n+1)}-\sqrt{n(n-1)})$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)-n(n-1)}{\sqrt{n(n+1)}+\sqrt{n(n-1)}}$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}}$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

（方法二）原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}\cdot\left(\sqrt{1+\frac{n}{1+2+\cdots+(n-1)}}-1\right)$

$=\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}}{1+2+\cdots+(n-1)}$

$=\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}}=\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}}$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

9. 0 【解析】因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(bx+\frac{ax^2}{x+1}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(a+b)x^2+bx}{x+1}=2$，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(a+b)x^2+bx}{x+1}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(a+b)x^2+bx}{(x+1)^2}=a+b=2\times0=0$.

三、解答题

1. **解**：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+n+1}{2n^2+5n+2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}}=$

$\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}3+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}2+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}}=\frac{3}{2}$.

2. **解**：$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$.

显然，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0$.

3. **解**：$\lim\limits_{n\to\infty}(1+q+q^2+\cdots+q^n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-q^{n+1}}{1-q}=$

$\frac{1}{1-q}\lim\limits_{n\to\infty}(1-q^{n+1})=\frac{1}{1-q}$.

4. **解**：由于 $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$，

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}\right]=$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=1$.

5. **解**：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x-5}\right)^{3x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x-5}\right)^{3x+1}=$

$e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{2}{2x-5}\cdot(3x+1)\right]}=e^3$.

6. **解**：因为

$\frac{n}{n^2+n-n}\leqslant\frac{1}{n^2+n-1}+\frac{1}{n^2+n-2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n-n}\leqslant\frac{n}{n^2+n-1}$，而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+n-n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+n-1}=0$，

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n-1}+\frac{1}{n^2+n-2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n-n}\right)=0$.

7. **解**：$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x+x^2\sin\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x+x^2\sin\frac{1}{x}}{(1+\cos x)x}=$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{(1+\cos x)x}+\lim\limits_{x\to0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{1+\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{1+\cos x}+$

$\frac{\lim\limits_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}}{\lim\limits_{x\to0}(1+\cos x)}=\frac{1}{2}+\frac{0}{2}=\frac{1}{2}$.

8. **解**：$\lim\limits_{x\to0}(1+3x)^{\cos x}=e^{\lim\limits_{x\to0}\cos x\ln(1+3x)}=e^0=1$.

9. **解**：$\lim\limits_{x\to2}\frac{1-\cos\pi x}{x^2-4x+4}=\lim\limits_{x\to2}\frac{1-\cos[\pi(x-2)+2\pi]}{(x-2)^2}=$

$\lim\limits_{x\to2}\frac{1-\cos[\pi(x-2)]}{(x-2)^2}=\lim\limits_{x\to2}\frac{\frac{1}{2}[\pi(x-2)]^2}{(x-2)^2}=\frac{\pi^2}{2}$.

10. **解**：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2-1}\right)^x=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2-1}\cdot x\right)}=e^0=1$.

11. **解**：$\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim\limits_{x\to1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln(1+x-1)}=$

$\lim\limits_{x\to1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln x}{2(x-1)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{2x}=\frac{1}{2}$.

12. **解**：因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{x}-ax-b\right)=0$，

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{x}-ax\right)=b$，

于是 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{x}-ax\right)\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{x^2}-a\right)=1-a=0$，

从而 $a=1$，$b=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{x}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{x}=1$.

13. **解**：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x+1}\right)^x$，令 $t=-\frac{x+1}{2}$，则当 $x\to\infty$ 时，$t\to\infty$，从而 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x+1}\right)^x=$

$\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-2t-1}=\left[\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^{-2}\cdot$

$\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-1}=e^{-2}\cdot1=e^{-2}$.

14. **解**：$\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{1}{x^2-3x+2}-\frac{1}{x-2}\right)=$

$\lim\limits_{x\to2}\left[\frac{1}{(x-1)(x-2)}-\frac{x-1}{(x-1)(x-2)}\right]$

$=\lim\limits_{x\to2}\frac{2-x}{(x-1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to2}\frac{-1}{x-1}=-1$.

15. **解**：$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2+1})=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2+1})(\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x^2+1}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x^2+1}}=0$.

16. **解**：$\lim\limits_{x\to2}\frac{x-2}{\sqrt{2x-3}-1}=\lim\limits_{x\to2}\frac{(x-2)(\sqrt{2x-3}+1)}{(\sqrt{2x-3}-1)(\sqrt{2x-3}+1)}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(\sqrt{2x-3}+1)}{2x-4}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x-3}+1}{2}=1.$

17. **解:** 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3}{x-1}-ax+b\right)=0$,

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-ax^2+ax+bx-b+3}{x-1}=0$,

于是 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-ax^2+ax+bx-b+3}{x-1}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x-1}=$

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-ax^2+ax+bx-b+3}{x^2-2x+1}=1-a=0,a=1$,

从而 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-ax^2+ax+bx-b+3}{x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+bx-b+3}{x-1}$

$=b+1=0,b=-1.$

第三节　连　　续

筑 基 强 化

一、单项选择题

1. C 【解析】因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,所以 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$,又 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin x}{x}+a\right)=1+a$,$f(0)=3\times e^0=3$,所以 $1+a=3$,解得 $a=2$.

2. C 【解析】因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$,又 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=e^2$,所以 $k=e^2$.

3. D 【解析】因为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$,所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{f(x)}{x}\cdot x\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}x=0$,又 $f(0)=0$,所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$,从而 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

4. A 【解析】根据题意,$f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\geqslant 0$.

5. A 【解析】因为 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续,所以 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=f(1)$,又 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(2ax-1)=2a-1$,$f(1)=a+\ln 1=a$,所以 $2a-1=a$,解得 $a=1$.

6. C 【解析】因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$,又 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=e^{-1}$,$f(0)=k$,所以 $k=e^{-1}$.

7. D 【解析】因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,所以 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=f(0)$,又 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x}\sin x+a\right)=1+a$,$f(0)=0$,所以 $1+a=0$,解得 $a=-1$.

8. A 【解析】若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续,则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$,即 $f(x)$ 在点 x_0 处的极限存在,且极限值等于 $f(x_0)$.

9. D 【解析】因为 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$,所以 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\lim\limits_{x\to 0}f\left(\frac{1}{x}\right)=a$,从而当 $a=g(0)=0$ 时,$g(x)$ 在点 $x=0$ 处连续.

10. B 【解析】因为 $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2-6x+8}=\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-4)}$,所以 $f(x)$ 的间断点为 $x=2$ 和 $x=4$,又 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x+2}{x-4}=-2$,$\lim\limits_{x\to 4}f(x)=\lim\limits_{x\to 4}\frac{x+2}{x-4}=\infty$,所以 $f(x)$ 的第二类间断点为 $x=4$.

11. B 【解析】因为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-4}{x(x-2)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+2}{x}=\infty$,所以 $x=0$ 是第二类间断点;因为 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x+2}{x}=2$,所以 $x=2$ 是第一类间断点.

12. B 【解析】因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,所以 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$,又 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(1+bx)^{\frac{1}{x}}=b$,$f(0)=a$,所以 $a=b$.

13. B 【解析】因为 $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-2x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{(x+3)(x-3)}{(x+1)(x-3)}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x+3}{x+1}=\frac{3}{2}$,所以 $x=3$ 是第一类间断点;因为 $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-9}{x^2-2x-3}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{(x+3)(x-3)}{(x+1)(x-3)}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{x+3}{x+1}=\infty$,所以 $x=-1$ 是第二类间断点.

14. A 【解析】因为 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续,所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,从而 $f(x)$ 在 $x=0$ 处右连续,即有 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$. 又 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin bx}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{bx}{x}=b$,$f(0)=a$,所以 $a=b$. 故本题选 A.

15. C 【解析】若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,则对 (a,b) 内任意一点 x_0,$f(x)$ 在 x_0 处连续,此外,$f(x)$ 在 $x=a$ 处右连续,在 $x=b$ 处左连续,A,B 两项正确. $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,则由最值定理知,$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最大值和最小值,C 项错误,D 项正确. 故本题选 C.

16. C 【解析】因为 $f(x)=2^x+x-2$ 是连续函数,且 $f(-1)=-\frac{5}{2}<0$,$f(0)=-1<0$,$f(1)=1>0$,$f(2)=4>0$,所以由零点存在定理知,$f(x)$ 在 $(0,1)$ 上至少有一个零点,又 $f(x)=2^x+x-2$ 是单调增加的,所以 $f(x)$ 只有一个零点在区间 $(0,1)$ 上. 故本题选 C.

17. B 【解析】由连续性的定义可知,$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$.