数学

同步提升与练习

（拓展模块一·下）

选题策划：苏 莉 刘桂君
责任编辑：张佳凯
封面设计：刘文东

ISBN 978-7-5661-4652-6
定价：25.00元

中等职业学校公共基础课程辅导用书
数学同步提升与练习（拓展模块一·下）
主编 刘 敏
哈尔滨工程大学出版社
Harbin Engineering University Press

中等职业学校公共基础课程辅导用书

数学

同步提升与练习

（拓展模块一·下）

主编 刘 敏

哈尔滨工程大学出版社
Harbin Engineering University Press

中等职业学校公共基础课程辅导用书

数学

同步提升与练习

（拓展模块一·下）

主　编　刘　敏
副主编　蒋登兵

哈尔滨工程大学出版社
Harbin Engineering University Press

内 容 简 介

本书按照教材《数学(拓展模块一)下册》的编排顺序进行编写。"知识脉络"模块对本单元知识点进行了总结。"学习目标"模块参照考试大纲,使学生对知识要点的掌握程度有一个初步了解。"知识梳理"模块通过预习,培养学生的阅读能力、理解能力及总结能力。"典型例题"模块对经典例题进行详细讲解,使学生更好地掌握课本知识。"巩固练习"模块分为基础巩固和能力提升两部分,使学生通过自我检测,做到及时查漏补缺,确保当堂内容当堂清。每个单元后的"单元测试题"既能强化学生对相应单元知识点之间关系的认识,又能培养学生解决综合问题的能力,还能培养学生的数学思维。

本书既可作为广大中等职业学校学生的学习用书,也可作为教师教学的参考资料。

图书在版编目(CIP)数据

数学同步提升与练习(拓展模块一·下)

SHUXUE TONGBU TISHENG YU LIANXI (TUOZHAN MOKUAI YI·XIA)

选题策划 苏 莉 刘桂君

责任编辑 张佳凯

封面设计 刘文东

出版发行 哈尔滨工程大学出版社

社　　址 哈尔滨市南岗区南通大街 145 号

邮政编码 150001

发行电话 0451-82519328

传　　真 0451-82519699

经　　销 新华书店

印　　刷 三河市骏杰印刷有限公司

开　　本 880 mm×1 230 mm 1/16

印　　张 8

字　　数 148 千字

版　　次 2024 年 11 月第 1 版

印　　次 2024 年 11 月第 1 次印刷

书　　号 ISBN 978-7-5661-4652-6

定　　价 25.00 元

http://www.hrbeupress.com

E-mail:heupress@hrbeu.edu.cn

前言

PREFACE

职业教育是培养技术技能人才，促进就业创业创新，推动中国制造和服务上水平的重要基础。而中等职业教育的基础地位是国家经济发展和社会稳定的需要，这就要求中等职业学校必须与时俱进，不断进行教育教学改革。本书以深化学校教育教学改革、提高课堂教学实效性为目标，以《中等职业学校数学课程标准》(2020 年版)为基础，充分落实学生的主体地位，从而激发学生的自信，挖掘学生的潜力。

本书是与中等职业教育课程改革国家规划新教材《数学(拓展模块一)下册》相配套的学生指导用书，主要包含以下模块：

知识脉络——对本单元知识点进行了总结。

学习目标——参考考试大纲，使学生对知识要点的掌握程度有一个初步了解。

知识梳理——通过预习，培养学生的阅读能力、理解能力及总结能力。

典型例题——对经典例题进行详细讲解，使学生更好地掌握课本知识。

巩固练习——分为基础巩固和能力提升两部分，使学生通过自我检测，做到及时查缺补漏，确保当堂内容当堂清。

单元测试题——通过开展单元测试，既能强化学生对相应知识之间关系的认识，又能培养学生解决综合问题的能力及数学思想和解题技巧。

由于编者学术水平有限，书中难免存在不足之处，敬请读者提出宝贵的意见和建议。

编　者

目录

CONTENTS

第七单元

复　数

知识脉络

- 复数
  - 复数的概念
    - 复数的有关概念
    - 复数的几何意义
  - 复数的运算
    - 加法和减法
    - 乘法
  - 复数范围内实系数一元二次方程的解法

7.1 复数的概念

7.1.1 复数的有关概念

学习目标

1. 理解虚数单位和复数的概念.
2. 初步掌握两个复数相等的条件.

知识梳理

1. 为了使方程 $x^2+1=0$ 有解，引进一个新数 i，使 i 是方程的根，即 $i^2=-1$，i 叫作__________，并规定 i 具有如下性质：

(1) i 的平方等于 -1，即 $i^2=-1$；

(2) i 与实数进行四则运算时，原有的__________和__________运算律仍然成立.

2. 形如 $a+bi\ (a,b\in\mathbf{R})$ 的数，叫作复数，其中 a 叫作复数的__________，b 叫作复数的__________. 复数一般用小写字母 $z,w,\cdots$ 表示.

当 $b=0$ 时，复数 $a+0i$ 就是实数__________.

当 $b\neq0$ 时，复数 $a+bi$ 叫作__________.

当 $a=0$，$b\neq0$ 时，复数 bi 叫作__________.

所有复数组成的集合，叫作__________，用__________表示，即 $\mathbf{C}=\{z\mid z=a+bi,a,b\in\mathbf{R}\}$. 显然，实数集 $\mathbf{R}$ 是复数集 $\mathbf{C}$ 的__________. 因此有 $\mathbf{N}\subsetneqq\mathbf{Z}\subsetneqq\mathbf{Q}\subsetneqq\mathbf{R}\subsetneqq\mathbf{C}$.

3. 如果两个复数 $a+bi(a,b\in\mathbf{R})$ 与 $c+di(c,d\in\mathbf{R})$ 的__________和__________分别相等，那么称这两个复数相等，记作 $a+bi=c+di$，即 $a+bi=c+di\Leftrightarrow$__________，且__________.

特别地，$a+bi=0\Leftrightarrow a=0$，且 $b=0$.

4. 如果两个复数的__________相等且__________互为相反数，那么称这两个复数互为__________. 复数 $a+bi\ (a,b\in\mathbf{R})$ 的共轭复数用 $\bar{z}$ 来表示，即 $\bar{z}=$__________.

（答案在本节末尾）

典型例题

例 1 说出下列三个复数的实部、虚部，并指出它们是实数还是虚数，如果是虚数，请指出

是否为纯虚数：

(1)$3+4\mathrm{i}$；　(2) $-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$；　(3)$-7$.

解　(1)$3+4\mathrm{i}$的实部与虚部分别是3与4，它是虚数，但不是纯虚数；

(2)$-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$的实部与虚部分别是0与$-\frac{\sqrt{2}}{2}$，它是虚数，而且是纯虚数；

(3)-7的实部与虚部分别是-7与0，它是实数.

例2　m取何实数时，复数$z=\frac{m^2-m-6}{m+3}+(m^2-2m-15)\mathrm{i}$是：

(1)实数？(2)虚数？(3)纯虚数？

解　(1)由题意，得$\begin{cases}m^2-2m-15=0,\\m+3\neq0,\end{cases}$即$\begin{cases}m=5\text{ 或 }m=-3,\\m\neq-3.\end{cases}$

所以当$m=5$时，z是实数.

(2)由题意，得$\begin{cases}m^2-2m-15\neq0,\\m+3\neq0,\end{cases}$即$\begin{cases}m\neq5\text{ 且 }m\neq-3,\\m\neq-3.\end{cases}$

所以当$m\neq5$且$m\neq-3$时，z是虚数.

(3)由题意，得$\begin{cases}m^2-m-6=0,\\m+3\neq0,\\m^2-2m-15\neq0,\end{cases}$即$\begin{cases}m=3\text{ 或 }m=-2,\\m\neq-3,\\m\neq5\text{ 且 }m\neq-3.\end{cases}$

所以当$m=3$或$m=-2$时，z是纯虚数.

点拨　研究一个复数在什么情况下是实数、虚数或纯虚数时，首先要保证这个复数的实部、虚部是有意义的，这是一个前提条件，学生易忽略这一点.如本题易忽略分母不能为0的条件，丢掉$m+3\neq0$，导致解答出错.

例3　已知$(2x-1)+\mathrm{i}=y-(3-y)\mathrm{i}$，其中$x,y\in\mathbf{R}$，求$x$与$y$.

解　根据复数相等的定义，得方程组$\begin{cases}2x-1=y,\\1=-(3-y).\end{cases}$

所以$x=\frac{5}{2}$，$y=4$.

点拨　利用复数相等的定义，两个复数的实部和虚部分别相等，则称这两个复数相等，列方程组解得此题.

巩固练习

基 础 巩 固

一、选择题

1. 下列四个式子中正确的是　(　　)

A. $23\mathrm{i}>22\mathrm{i}$　　B. $20\mathrm{i}>0$　　C. $\mathrm{i}^2>-\mathrm{i}$　　D. $0>\mathrm{i}^2$

2. 若$(x^2-1)+(x^2+3x+2)\mathrm{i}$是纯虚数,则实数$x$为 ( )

A. 1　　B. -1　　C. ±1　　D. 以上都不对

3. 如果复数$(m^2-3m-1)+(m^2-m+1)\mathrm{i}=3+3\mathrm{i}$,则实数$m$的值为 ( )

A. -1或4　　B. -1或2　　C. -1　　D. 4或2

4. 复数$(2\lambda^2+5\lambda+2)+(\lambda^2+\lambda-2)\mathrm{i}$为虚数,则实数$\lambda$满足 ( )

A. $\lambda=-\frac{1}{2}$　　B. $\lambda=-2$或$-\frac{1}{2}$

C. $\lambda\neq-2$　　D. $\lambda\neq1$且$\lambda\neq-2$

5. 若$2+a\mathrm{i}=b-\mathrm{i}$,其中$a,b\in\mathbf{R}$,i为虚数单位,则$a^2+b^2$等于 ( )

A. 0　　B. 2　　C. $\frac{5}{2}$　　D. 5

二、填空题

6. 实数集与复数集的交集是________.

7. 设复数$-\mathrm{i}=a+b\mathrm{i}$($a,b\in\mathbf{R}$,i是虚数单位),则$a+b$的值是__________.

三、解答题

8. 已知$m\in\mathbf{R}$,复数$z=\frac{m(m+2)}{m-1}+(m^2+2m-1)\mathrm{i}$,当$m$为何值时,

(1)$z\in\mathbf{R}$? (2)z是虚数? (3)z是纯虚数?

9. 已知$(x+y)+(x-2y)\mathrm{i}=(2x-5)+(3x+y)\mathrm{i}$,求实数$x$,$y$的值.

10. 求实数 m 为何值时，复数 $z=\frac{m}{m-1}+(2m^2-m-1)\mathrm{i}$ 分别为实数、虚数、纯虚数和零.

能 力 提 升

若 $\log_2(m^2-3m-3)+\log_2(m-2)\mathrm{i}$ 为纯虚数，求实数 m 的值.

知识梳理答案

1. 虚数单位　(2)加法　乘法
2. 实部　虚部　a　虚数　纯虚数　复数集　$\mathbf{C}$　真子集
3. 实部　虚部　$a=c$　$b=d$
4. 实部　虚部　共轭复数　$a-b\mathrm{i}$

7.1.2　复数的几何意义

学习目标

1. 了解复数的代数形式与复数的几何意义.
2. 理解共轭复数的概念.

知识梳理

1. 复数 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$ 可以用平面直角坐标系内的点__________表示. 这种通过建立平面直角坐标系来表示复数的平面叫作__________，x 轴叫作__________，y 轴叫作__________. 实轴上的点表示__________，虚轴上除原点外的点都表示__________.

2. 建立了复平面，就建立了复平面内的点 (a,b) 与复数 $z=a+bi$ 的__________关系.

3. 设 $Z(a,b)$，则向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的模称为复数 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$ 的模，记作__________或__________. 由向量模的定义可知 $|z|=|a+bi|=$ __________.

如果__________，那么 $z=a+bi$ 是一个实数 a，它的模 $|z|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2}=|a|$（$a$ 的绝对值）.

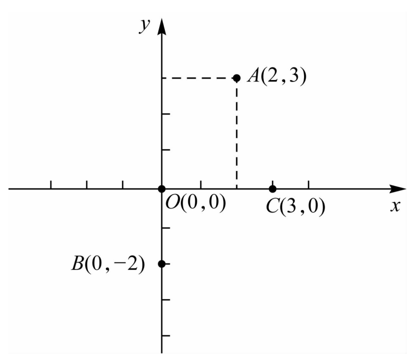
如果__________，那么 $z=a+bi$ 是一个纯虚数 bi，它的模 $|z|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{b^2}=|b|$（$b$ 的绝对值）.

（答案在本节末尾）

典型例题

例 1 用复平面内的点表示复数：$2+3i$，$-2i$，3，0.

解 如图所示，复数 $2+3i$ 用点 $A(2,3)$ 表示；$-2i$ 用点 $B(0,-2)$ 表示；3 用点 $C(3,0)$ 表示；0 用原点 $O(0,0)$ 表示.



例 2 在直角坐标系中，O 是原点，向量 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 对应的复数分别为 $2-3i$，$-3+2i$，求向量 $\overrightarrow{BA}$ 对应的复数.

解 由已知得 $\overrightarrow{OA}=(2,-3)$，$\overrightarrow{OB}=(-3,2)$，

则 $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=(5,-5)$，

所以 $\overrightarrow{BA}$ 对应的复数为 $5-5i$.

点拨 根据复数与复平面内的点一一对应，得到向量 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 的坐标，计算出向量 $\overrightarrow{BA}$ 的坐标，再确定对应的复数.

例 3 求下列各复数的模.

(1) $z_1=1+\sqrt{3}i$；　(2) $z_2=1-i$；　(3) $z_3=5i$.

解 (1) 因为 $a=1$，$b=\sqrt{3}$，

所以 $|z_1|=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$.

(2) 因为 $a=1$，$b=-1$，

所以$|z_2|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$.

(3)因为$a=0,b=5>0$,所以$|z_3|=\sqrt{0^2+5^2}=5$.

点拨　利用模的概念求解即可.

巩固练习

基础巩固

一、选择题

1. 若$z=2-\mathrm{i}$,则复数$\bar{z}=$　　(　　)

A. $-2-\mathrm{i}$　　B. $-2+\mathrm{i}$　　C. $2-\mathrm{i}$　　D. $2+\mathrm{i}$

2. 如果复数$a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$在复平面内的对应点在第二象限,则　　(　　)

A. $a>0,b<0$　　B. $a>0,b>0$　　C. $a<0,b<0$　　D. $a<0,b>0$

3. 在复平面内,复数$6+5\mathrm{i}$,$-2+3\mathrm{i}$对应的点分别为A,B.若D为线段AB的中点,则点D对应的复数是　　(　　)

A. $4+8\mathrm{i}$　　B. $8+2\mathrm{i}$　　C. $4+\mathrm{i}$　　D. $2+4\mathrm{i}$

4. 复数$z=-2(\sin 100°-\mathrm{i}\cos 100°)$在复平面内所对应的$Z$点位于　　(　　)

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

二、填空题

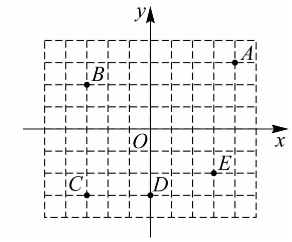
5. 1的共轭复数是________.

6. 复数$1-\mathrm{i}$的模是________.

7. 设复数z的模为17,虚部为-8,则复数$z=$__________.

三、解答题

8. 如图,设每个小方格的边长是1,指出点A,B,C,D,E所表示的复数.



9.已知复数 $z_1=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$，$z_2=2i$.

(1)求复数 $\overline{z_1}$，$\overline{z_2}$；

(2)用复平面内的点表示 z_1，$\overline{z_1}$，z_2，$\overline{z_2}$.

10.设复数 $z=a^2+a-6+(a^2-7a+10)i$，其中 $a\in\mathbf{R}$.

(1)若 z 是纯虚数，求 a 的值；

(2)若 z 所对应的点在复平面的第四象限内，求 a 的取值范围.

能力提升

实数 m 取何值时，复平面内表示复数 $z=2m+(4-m^2)i$ 的点：

(1)位于虚轴上？

(2)位于第一、三象限？

(3)位于以原点为圆心，以 4 为半径的圆上？

知识梳理答案

1. $Z(a,b)$ 复平面 实轴 虚轴 实数 纯虚数

2. 一一对应 3. $|z|$ $|a+bi|$ $\sqrt{a^2+b^2}$ $b=0$ $a=0$

7.2 复数的运算

7.2.1 复数的加法和减法

学习目标

1. 理解复数代数形式的加法、减法运算.
2. 了解复数加法和减法运算的几何意义.

知识梳理

1. 两个复数 $z_1=a+bi\ (a,b\in\mathbf{R})$，$z_2=c+di\ (c,d\in\mathbf{R})$ 的和仍是一个复数，和的实部是这两个复数__________的和，和的虚部是这两个复数__________的和，即

$(a+bi)+(c+di)=a+c+(b+d)i$.

2. 对于复数的减法，规定减法是加法的__________运算.

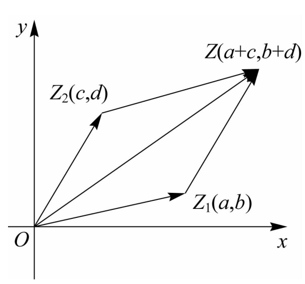
$(a+bi)-(c+di)=a-c+(b-d)i$.

3. 复数的加法满足交换律和结合律，即对任意复数 z_1，z_2，z_3，有

(1)交换律：$z_1+z_2=$ __________.

(2)结合律：$(z_1+z_2)+z_3=$ ______________.

4. 设复数 $z_1=a+bi\ (a,b\in\mathbf{R})$ 和复数 $z_2=c+di\ (c,d\in\mathbf{R})$ 在复平面内对应的向量分别为 $\overrightarrow{OZ_1}=(a,b)$ 和 $\overrightarrow{OZ_2}=(c,d)$，如图，



根据平面向量的坐标运算,得$\overrightarrow{OZ_1}+\overrightarrow{OZ_2}=(a,b)+(c,d)=$______________.

这说明两个向量$\overrightarrow{OZ_1}$,$\overrightarrow{OZ_2}$的和就是与复数________________对应的向量.因此,复数的加法可以按向量的加法来进行,这就是复数加法的几何意义.

又由向量的知识易知,$\overrightarrow{OZ_1}-\overrightarrow{OZ_2}=$____________$=(a-c,b-d)$,则____________就是复数$z_1-z_2=(a-c)+(b-d)\mathrm{i}$对应的向量,这就是复数减法的几何意义.

(答案在本节末尾)

典型例题

例1 已知$z_1=2+3\mathrm{i}$,$z_2=8-2\mathrm{i}$,计算z_1+z_2和z_1-z_2.

解 $z_1+z_2=(2+3\mathrm{i})+(8-2\mathrm{i})$

$=(2+8)+(3-2)\mathrm{i}$

$=10+\mathrm{i}$.

$z_1-z_2=(2+3\mathrm{i})-(8-2\mathrm{i})$

$=(2-8)+[3-(-2)]\mathrm{i}$

$=-6+5\mathrm{i}$.

点拨 本题主要考查复数的运算,考查运算求解能力,属于基础题.

例2 计算:$(-1+6\mathrm{i})+(2-5\mathrm{i})-(-3+4\mathrm{i})$.

解 $(-1+6\mathrm{i})+(2-5\mathrm{i})-(-3+4\mathrm{i})$

$=(-1+2+3)+(6-5-4)\mathrm{i}$

$=4-3\mathrm{i}$.

巩固练习

基础巩固

一、选择题

1.设复数$z_1=2-2\mathrm{i}$,$z_2=4-6\mathrm{i}$,则$z_1+z_2=$ ( )

A. $-4+2\mathrm{i}$　　B. $6+8\mathrm{i}$　　C. $2+4\mathrm{i}$　　D. $6-8\mathrm{i}$

2.$(2-\mathrm{i})-(1+2\mathrm{i})=$ ( )

A. $3+\mathrm{i}$　　B. $4+3\mathrm{i}$　　C. $4\mathrm{i}$　　D. $1-3\mathrm{i}$

3.计算$(3+2\mathrm{i})-(1-\mathrm{i})$的结果是 ( )

A. $2+\mathrm{i}$　　B. $4+3\mathrm{i}$　　C. $2+3\mathrm{i}$　　D. $3+2\mathrm{i}$

4.若复数 z 满足 $z+(3-4\mathrm{i})=1$,则 z 的虚部是　(　　)

A. -2　B. 4　C. 3　D. -4

5.设 $z_1=2+b\mathrm{i}$,$z_2=a+\mathrm{i}$,当 $z_1+z_2=0$ 时,复数 $a+b\mathrm{i}$ 为　(　　)

A. $1+\mathrm{i}$　B. $2+\mathrm{i}$　C. 3　D. $-2-\mathrm{i}$

6.已知 $z=11-20\mathrm{i}$,则 $1-2\mathrm{i}-z=$　(　　)

A. $18+10\mathrm{i}$　B. $18-10\mathrm{i}$　C. $-10+18\mathrm{i}$　D. $10-18\mathrm{i}$

二、填空题

7.$(2+3\mathrm{i})+7\mathrm{i}=$__________.

8.$1+(-1-5\mathrm{i})-4\mathrm{i}=$__________.

9.$(-5+3\mathrm{i})-(2-4\mathrm{i})=$__________.

10.已知复数 $z_1=1+2\mathrm{i}$,$z_2=2-\mathrm{i}$,则 $|z_1-z_2|=$__________.

三、解答题

11.复数 $z=m^2-1+(m^2-m-2)\mathrm{i}$ 为纯虚数,求 $|z-1|$.

12.已知复数 $z_1=(a^2-2)+(a-4)\mathrm{i}$,$z_2=a-(a^2-2)\mathrm{i}(a\in\mathbf{R})$,且 z_1-z_2 为纯虚数,求实数 a.

能力提升

1. 设复数 $z_1=5-\sqrt{3}\mathrm{i}$，$z_2=1+3\sqrt{3}\mathrm{i}$，求复数$\overline{z_1-z_2}$的模.

2. 在复平面内，O 是原点，$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{AB}$对应的复数分别为$-2+\mathrm{i}$，$3+2\mathrm{i}$，$1+5\mathrm{i}$，求$\overrightarrow{BC}$对应的复数.

知识梳理答案

1. 实部　　虚部　　2. 逆

3. z_2+z_1　　$z_1+(z_2+z_3)$

4. $(a+c,b+d)$　　$(a+c)+(b+d)\mathrm{i}$　　$\overrightarrow{Z_2Z_1}$　　$\overrightarrow{Z_2Z_1}$

7.2.2　复数的乘法

学习目标

理解复数代数形式的乘法运算.

知识梳理

1. 复数的乘法法则：

$(a+b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i})=$ ________________.

2. 复数的乘法运算满足交换律、结合律和分配律，即对任意复数 z_1，z_2，z_3，有

(1)交换律：$z_1z_2=$ __________.

(2)结合律：$(z_1z_2)z_3=$ __________.

(3)分配律：$z_1(z_2+z_3)=$ __________.

(答案在本节末尾)

典型例题

例 1　计算：(1)$(3-4\mathrm{i})(-1+2\mathrm{i})$；　(2)$(3-4\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})$.

解　(1)$(3-4\mathrm{i})(-1+2\mathrm{i})=(-3+8)+(4+6)\mathrm{i}=5+10\mathrm{i}$.

(2)$(3-4\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})=(9+16)+(-12+12)\mathrm{i}=25$.

点拨　两个共轭复数 z，$\bar{z}$的乘积是一个实数，这个实数等于每一个复数的模的平方，即 $z\cdot\bar{z}=|z|^2=|\bar{z}|^2$.

例 2　若 a 为实数，且$(2+a\mathrm{i})(a-2\mathrm{i})=-4\mathrm{i}$，则 $a=$　(　　)

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

解析　因为$(2+a\mathrm{i})(a-2\mathrm{i})=-4\mathrm{i}$，所以 $4a+(a^2-4)\mathrm{i}=-4\mathrm{i}$，

所以$\begin{cases}4a=0,\\a^2-4=-4,\end{cases}$解得 $a=0$. 故选 B.

点拨　利用复数的乘法法则计算出$(2+a\mathrm{i})(a-2\mathrm{i})=4a+(a^2-4)\mathrm{i}$，然后再根据复数相等的条件可得解.

例 3　已知复数 $z=(5+2\mathrm{i})^2$(i 为虚数单位)，则 z 的实部为__________.

解析　复数 $z=(5+2\mathrm{i})^2=21+20\mathrm{i}$，其实部是 21.

点拨　完全平方公式在复数集中仍然成立，即$(a+b\mathrm{i})^2=a^2+2ab\mathrm{i}+(b\mathrm{i})^2$.

巩固练习

基础巩固

一、选择题

1. 复数 $\mathrm{i}(3-2\mathrm{i})=$　(　　)

A. $2-3\mathrm{i}$　　B. $3+2\mathrm{i}$　　C. $2+3\mathrm{i}$　　D. $3-2\mathrm{i}$

2. 若 $a,b\in\mathbf{R}$，i 为虚数单位，且$(a+\mathrm{i})\mathrm{i}=b+\mathrm{i}$，则　(　　)

A. $a=1,b=1$　　B. $a=-1,b=1$

C. $a=-1,b=-1$　　D. $a=1,b=-1$

3. i 为虚数单位，则复数$(1-i)^2(1+i)$的值为 （　　）

A. $-2+2i$　　B. $-2-2i$

C. $2+2i$　　D. $2-2i$

4. 若$(1+2ai)i=1-bi$，其中 $a,b\in\mathbf{R}$，i 是虚数单位，则$|a+bi|=$ （　　）

A. $\frac{1}{2}+i$　　B. $\sqrt{5}$　　C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　D. $\frac{5}{4}$

二、填空题

5. i 是虚数单位，若复数$(1-2i)(a+i)$是纯虚数，则实数 a 的值为__________.

6. 设复数 $a+bi(a,b\in\mathbf{R})$的模为$\sqrt{3}$，则$(a+bi)(a-bi)=$__________.

7. 若复数 $z=1-2i$（i 为虚数单位），则 $z\cdot\overline{z}+z=$__________.

三、解答题

8. 若复数 $z=1+i$，i 为虚数单位，求$(1+z)\cdot z$.

9. 已知$(x+i)(1-i)=y$，求实数 x,y.

10. 已知复数 z 满足 $(z-2)\mathrm{i}=1+\mathrm{i}$，求复数 z 的模.

11. 已知复数 $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，$\bar{z}$ 为 z 的共轭复数.

证明：(1) $z^2=\bar{z}$；

(2) $z^3=1$.

能力提升

1. 已知复数 $z=1+\mathrm{i}$，$\bar{z}$ 为 z 的共轭复数，求 $z\bar{z}-z-1$.

2. 已知 $z_1=(3x+y)+(y-4x)\mathrm{i}$，$z_2=(4y-2x)-(5x+3y)\mathrm{i}(x,y\in\mathbf{R})$，设 $z=z_1-z_2$，且 $z=13-2\mathrm{i}$，求 z_1z_2.

知识梳理答案

1. $(ac-bd)+(ad+bc)\mathrm{i}$　　2. (1) z_2z_1　　(2) $z_1(z_2z_3)$　　(3) $z_1z_2+z_1z_3$

7.3　复数范围内实系数一元二次方程的解法

学习目标

了解在复数范围内，实系数一元二次方程的解法.

知识梳理

实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq0)$ 在复数范围内的两个解为 $x_{1,2}=$ ____________ $(b^2-4ac<0)$. 显然，这两个解是一对________. 也就是说，实系数一元二次方程的复数解是一对________，且满足 $x_1+x_2=$ ________，$x_1x_2=$ ________.

（答案在本节末尾）

典型例题

例 1　在复数集内解方程：$3x^2+2x+2=0$.

解　因为 $\Delta=b^2-4ac=4-24=-20<0$，所以原方程的解为 $x=-\frac{1}{3}\pm\frac{\sqrt{5}\mathrm{i}}{3}$.

例 2　把下列式子因式分解成一次因式的积.

(1) x^2+a^2；　(2) $x^2+2x+10$.

解　(1) 令 $x^2+a^2=0$，解得 $x=\pm a\mathrm{i}$，

所以 $x^2+a^2=(x+a\mathrm{i})(x-a\mathrm{i})$.

(2) 令 $x^2+2x+10=0$，解得 $x=-1\pm3\mathrm{i}$，

所以 $x^2+2x+10=(x+1-3\mathrm{i})(x+1+3\mathrm{i})$.

巩固练习

基 础 巩 固

一、选择题

1. 已知 z_1，z_2 是方程 $x^2-2x+2=0$ 的两个复根，则 $|z_1^2-z_2^2|=$　　（　　）

A. 2　　B. 4　　C. 2i　　D. 4i

（BSD）

数学同步提升与练习
（拓展模块一·下）

参考答案及解析

目　　录

第七单元　复　　数

7.1　复数的概念

7.1.1　复数的有关概念

巩固练习

【基础巩固】

一、选择题

1.D

2.A

3.C

4.D　**解析**:因为复数$(2\lambda^2+5\lambda+2)+(\lambda^2+\lambda-2)\mathrm{i}$为虚数,所以$\lambda^2+\lambda-2\neq0$,则$\lambda\neq-2$且$\lambda\neq1$.故选D.

5.D　**解析**:本题考查复数相等.因为$2+a\mathrm{i}=b-\mathrm{i}$,所以$b=2,a=-1$,故$a^2+b^2=5$.

二、填空题

6.实数集

7.-1　**解析**:因为复数$-\mathrm{i}=a+b\mathrm{i}$,所以$a=0,b=-1$,则$a+b$的值是$-1$.

三、解答题

8.**解**:(1)当m满足$\begin{cases}m^2+2m-1=0,\\m-1\neq0\end{cases}$时,计算得出$m=-1\pm\sqrt{2}$,所以当$m=-1\pm\sqrt{2}$时,$z\in\mathbf{R}$.

(2)由$\begin{cases}m^2+2m-1\neq0,\\m-1\neq0\end{cases}$计算得出$m\neq1$,且$m\neq-1\pm\sqrt{2}$,所以当$m\neq1$,且$m\neq-1\pm\sqrt{2}$时,$z$为虚数.

(3)由$\begin{cases}\dfrac{m(m+2)}{m-1}=0,\\m-1\neq0,\\m^2+2m-1\neq0\end{cases}$计算得出$m=0$或$-2$,所以当$m=0$或$-2$时,$z$是纯虚数.

9.**解**:根据两个复数相等的充要条件,可得$\begin{cases}x+y=2x-5,\\x-2y=3x+y,\end{cases}$

整理得$\begin{cases}-x+y=-5,\\-2x-3y=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=3,\\y=-2.\end{cases}$

10.**解**:当$m=-\dfrac{1}{2}$时是实数;当$m\neq-\dfrac{1}{2}$且$m\neq1$时是虚数;当$m=0$时是纯虚数;不存在使$z=0$的m.

【能力提升】

解:因为$\log_2(m^2-3m-3)+\log_2(m-2)\mathrm{i}$为纯虚数,

所以$\begin{cases}\log_2(m^2-3m-3)=0,\\\log_2(m-2)\neq0,\end{cases}$解得$m=4$.

故当$m=4$时,$\log_2(m^2-3m-3)+\log_2(m-2)\mathrm{i}$为纯虚数.

7.1.2　复数的几何意义

巩固练习

【基础巩固】

一、选择题

1.D　**解析**:因为$z=2-\mathrm{i}$,所以$\bar{z}=2+\mathrm{i}$.

2.D　**解析**:根据题意,由于复数$a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$在复平面内的对应点在第二象限,则实部小于零,虚部大于零,则可知$a<0,b>0$.

3.D　**解析**:根据复数的几何意义,得$A(6,5),B(-2,3)$,线段AB的中点$D\left(\dfrac{6-2}{2},\dfrac{5+3}{2}\right)=(2,4)$,所以点$D$对应的复数为$2+4\mathrm{i}$.

4.C　**解析**:因为复数$z=-2(\sin100^\circ-\mathrm{i}\cos100^\circ)=-2\sin100^\circ+2\mathrm{i}\cos100^\circ$,

$\sin100^\circ>0,\cos100^\circ<0$,

所以复数在复平面中对应的点的横坐标小于0,纵坐标小于0,

所以对应的点Z在第三象限.

二、填空题

5.1

6.$\sqrt{2}$

7.$\pm15-8\mathrm{i}$　**解析**:设$z=a-8\mathrm{i}(a\in\mathbf{R})$,则$\sqrt{a^2+(-8)^2}=17$,解得$a=\pm15$.所以$z=\pm15-8\mathrm{i}$.

三、解答题

8.**解**:由题意可知$A(4,3),B(-3,2),C(-3,-3),D(0,-3),E(3,-2)$,所以点$A,B,C,D,E$所表示的复数分别为$4+3\mathrm{i},-3+2\mathrm{i},-3-3\mathrm{i},-3\mathrm{i},3-2\mathrm{i}$.

9. **解**:(1)$\overline{z_1}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$,$\overline{z_2}=-2i$. (2)图略,它们都分别关于实轴对称.

10. **解**:(1) z 是纯虚数,只需 $\begin{cases}a^2+a-6=0,\\a^2-7a+10\neq0,\end{cases}$ 解得 $a=-3$.

(2)由题意知 $\begin{cases}a^2+a-6>0,\\a^2-7a+10<0,\end{cases}$ 解得 $2<a<5$,故当 $a\in(2,5)$ 时,z 所对应的点在复平面的第四象限内.

【能力提升】

解:(1)由复平面内表示复数 $z=2m+(4-m^2)i$ 的点位于虚轴上可得 $2m=0$,解得 $m=0$.

(2)由复平面内表示复数 $z=2m+(4-m^2)i$ 的点位于第一、三象限可得 $2m(4-m^2)>0$,解得 $m<-2$ 或 $0<m<2$. 故 m 的取值范围是 $(-\infty,-2)\cup(0,2)$.

(3)$z=2m+(4-m^2)i$ 对应点 $(2m,4-m^2)$. 因为复平面内表示复数 $z=2m+(4-m^2)i$ 的点位于以原点为圆心,以 4 为半径的圆上,所以 $(2m)^2+(4-m^2)^2=16$,所以 $m=0$ 或 $m=\pm2$.

7.2 复数的运算

7.2.1 复数的加法和减法

巩固练习

【基础巩固】

一、选择题

1. D
2. D **解析**:$(2-i)-(1+2i)=2-i-1-2i=1-3i$. 故选 D.
3. C **解析**:$(3+2i)-(1-i)=3+2i-1+i=2+3i$.
4. B **解析**:$z=1-(3-4i)=-2+4i$,所以 z 的虚部是 4.
5. D **解析**:因为 $z_1+z_2=(2+bi)+(a+i)=(2+a)+(b+1)i=0$,

所以 $\begin{cases}2+a=0,\\b+1=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-2,\\b=-1,\end{cases}$

所以 $a+bi=-2-i$.

6. C **解析**:因为 $z=11-20i$,所以 $1-2i-z=1-2i-11+20i=-10+18i$.

二、填空题

7. $2+10i$
8. $-9i$
9. $-7+7i$
10. $\sqrt{10}$ **解析**:因为 $z_1=1+2i$,$z_2=2-i$,所以 $z_1-z_2=1+2i-(2-i)=-1+3i$,所以 $|z_1-z_2|=\sqrt{(-1)^2+3^2}=\sqrt{10}$.

三、解答题

11. **解**:因为 $z=m^2-1+(m^2-m-2)i$ 为纯虚数,

所以 $\begin{cases}m^2-1=0,\\m^2-m-2\neq0,\end{cases}$ 解得 $m=1$,

所以 $z=-2i$,

所以 $|z-1|=|-2i-1|=\sqrt{(-2)^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$.

12. **解**:因为 $z_1-z_2=(a^2-a-2)+(a-4+a^2-2)i=(a^2-a-2)+(a^2+a-6)i(a\in\mathbf{R})$ 为纯虚数,

所以 $\begin{cases}a^2-a-2=0,\\a^2+a-6\neq0,\end{cases}$ 解得 $a=-1$.

【能力提升】

1. **解**:$z_1-z_2=4-4\sqrt{3}i$,则 $|\overline{z_1-z_2}|=\sqrt{4^2+(-4\sqrt{3})^2}=8$.
2. **解**:$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}-(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB})=3+2i-(-2+i+1+5i)=(3+2-1)+(2-1-5)i=4-4i$.

7.2.2 复数的乘法

巩固练习

【基础巩固】

一、选择题

1. C **解析**:$i(3-2i)=3i-2i^2=2+3i$,故选 C.
2. D **解析**:由 $(a+i)i=b+i$,得 $-1+ai=b+i$,根据两复数相等的充要条件得 $a=1,b=-1$.
3. D
4. C

二、填空题

5. -2 **解析**:由 $(1-2i)(a+i)=(a+2)+(1-2a)i$ 是

纯虚数可得 $a+2=0$，$1-2a\neq0$，解得 $a=-2$.

6. 3　**解析**：因为 $|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{3}$，所以 $(a+bi)\cdot(a-bi)=a^2+b^2=3$.

7. $6-2i$　**解析**：因为 $z=1-2i$，所以 $\bar{z}=1+2i$，所以 $z\cdot\bar{z}+z=(1-2i)(1+2i)+1-2i=5+1-2i=6-2i$.

三、解答题

8. **解**：$(1+z)\cdot z=z+z^2=1+i+(1+i)^2=1+i+2i=1+3i$.

9. **解**：因为 $(x+i)(1-i)=x-xi+i+1=(x+1)+(1-x)i=y$，

所以 $\begin{cases}x+1=y,\\1-x=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=1,\\y=2.\end{cases}$

10. **解**：由 $(z-2)i=1+i$，得 $(z-2)i^2=i(1+i)$，即 $-z+2=i-1$，得 $z=3-i$，所以 $|z|=\sqrt{3^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$.

11. **证明**：(1) $z^2=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2=\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}i+\frac{3}{4}i^2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=\bar{z}$.

(2) $z^3=z^2\cdot z=\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\frac{1}{4}-\frac{3}{4}i^2=1$.

【能力提升】

1. **解**：依题意得 $z\bar{z}-z-1=(1+i)(1-i)-(1+i)-1=-i$.

2. **解**：$z=z_1-z_2=(3x+y)+(y-4x)i-[(4y-2x)-(5x+3y)i]=[(3x+y)-(4y-2x)]+[(y-4x)+(5x+3y)]i=(5x-3y)+(x+4y)i$，

又因为 $z=13-2i$，且 $x,y\in\mathbf{R}$，

所以 $\begin{cases}5x-3y=13,\\x+4y=-2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=2,\\y=-1.\end{cases}$

所以 $z_1=(3\times2-1)+(-1-4\times2)i=5-9i$，

$z_2=4\times(-1)-2\times2-[5\times2+3\times(-1)]i=-8-7i$.

所以 $z_1z_2=(5-9i)(-8-7i)=-103+37i$.

7.3　复数范围内实系数一元二次方程的解法

巩固练习

【基础巩固】

一、选择题

1. B　**解析**：已知 z_1，z_2 是方程 $x^2-2x+2=0$ 的两个复根，所以 $z=\frac{2\pm\sqrt{-4}}{2}=\frac{2\pm2i}{2}=1\pm i$，则设 $z_1=1+i$，$z_2=1-i$，所以 $|z_1^2-z_2^2|=|(z_1+z_2)(z_1-z_2)|=|2\times2i|=|4i|=4$，故选 B.

2. A　**解析**：对于方程 $x^2+2x+4=0$，因为 $\Delta=2^2-4\times4=-12$，所以 $x^2+2x+4=0$ 有两个虚根，即 $x_1=\frac{-2+\sqrt{12}i}{2}=-1+\sqrt{3}i$，$x_2=\frac{-2-\sqrt{12}i}{2}=-1-\sqrt{3}i$，所以 $x^2+2x+4=(x+1+\sqrt{3}i)(x+1-\sqrt{3}i)$. 故选 A.

3. A　**解析**：方程 $x^2+x+1=0$ 化为 $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{3}{4}$，依题意，$z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 或 $z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$，显然 $z+\bar{z}=-1$，又 $z^2+z+1=0$，即 $z^2=-z-1$，所以 $z^2-\bar{z}=-z-1-\bar{z}=-(z+\bar{z})-1=0$. 故选 A.

二、解答题

4. (1) $(x+5i)(x-5i)$. (2) $(x+1+\sqrt{2}i)(x+1-\sqrt{2}i)$.
(3) $(x+2i)(x-2i)$. (4) $(a+b+ci)(a+b-ci)$.

5. (1) 两个虚数根.
(2) 两个相等实数根.
(3) 两个不相等实数根.
(4) 两个虚数根.

6. (1) $x=\pm\frac{3}{2}i$.

(2) $x=\frac{5}{4}\pm\frac{\sqrt{39}}{4}i$.

(3) $x=\frac{1}{24}\pm\frac{\sqrt{143}}{24}i$.