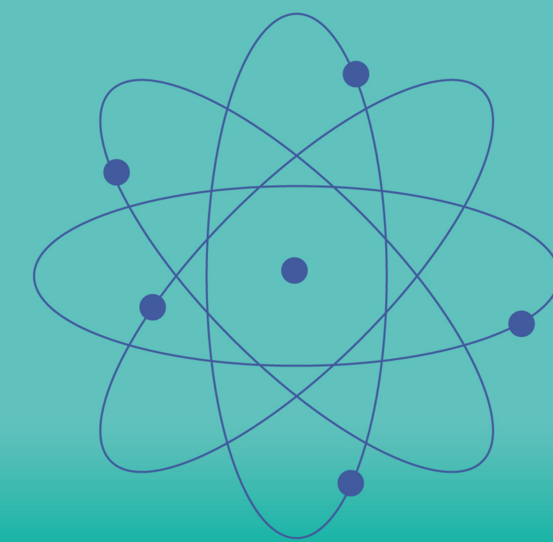


数 学

学习辅导与提升训练

主编 张良朋 李 祎 郑向军 于春红

（基础模块）下册

哈尔滨工程大学出版社
Harbin Engineering University Press

数学学习辅导与提升训练（基础模块）下册

主编 张良朋 李祎 郑向军 于春红

哈尔滨工程大学出版社
Harbin Engineering University Press

X-A

数 学

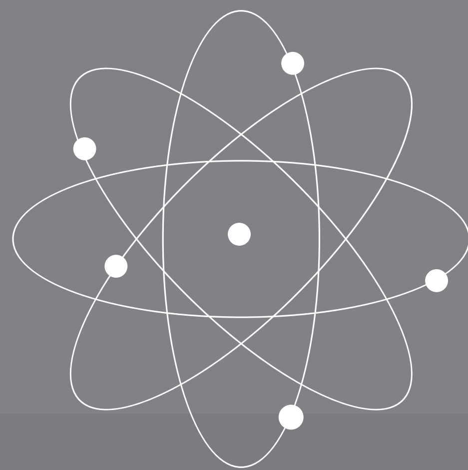
学习辅导与提升训练

（基础模块）下册

选题策划：金颖杰
责任编辑：张 昕
封面设计：刘文东

ISBN 978-7-5661-3341-0

定价：26.00元



数学

学习辅导与提升训练

主　编　张良朋　李　祎　郑向军　于春红
副主编　王小华

（基础模块）下册

哈尔滨工程大学出版社
Harbin Engineering University Press

内 容 简 介

本书是《数学:基础模块.下册》的配套用书,全书共分为3个单元,包括直线与圆的方程、简单几何体、概率与统计初步.每个单元按照“知识梳理”“典例精解”“自我检测”“单元检测”组织内容.

本书可作为中等职业学校各专业数学课程的配套辅导用书和学习资料.

图书在版编目(CIP)数据

数学学习辅导与提升训练:基础模块.下册 / 张良朋等主编. — 哈尔滨:哈尔滨工程大学出版社,2022.4(2025.1重印)

ISBN 978-7-5661-3341-0

Ⅰ.①数… Ⅱ.①张… Ⅲ.①数学课-中等专业学校-教学参考资料 Ⅳ.①G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2022)第042358号

数学学习辅导与提升训练:基础模块.下册

SHUXUE XUEXI FUDAO YU TISHENG XUNLIAN:JICHU MOKUAI. XIACE

选题策划 金颖杰
责任编辑 张 昕
封面设计 刘文东

出版发行 哈尔滨工程大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区南通大街145号
邮政编码 150001
发行电话 0451-82519328
传 真 0451-82519699
经 销 新华书店
印 刷 大厂回族自治县聚鑫印刷有限责任公司
开 本 787 mm×1 092 mm 1/16
印 张 8
字 数 165千字
版 次 2022年4月第1版
印 次 2025年1月第4次印刷
书 号 ISBN 978-7-5661-3341-0
定 价 26.00元

http://www.hrbeupress.com
E-mail:heupress@hrbeu.edu.cn

前言 PREFACE

本书是《数学：基础模块. 下册》的配套用书. 本书的编写目的是使学生通过思考，深化对教学内容的理解；通过知识检测，掌握基础知识和基本技能，提高分析问题和应用数学知识的能力.

本书按照配套教材的章节顺序进行编写，每个单元按照“知识梳理”“典例精解”“自我检测”“单元检测”组织内容.

“知识梳理”对每个知识点进行细致的讲解.

“典例精解”对例题进行讲解，给出详细的解题思路.

“自我检测”针对每小节知识点设置了练习题，以帮助学生巩固所学知识，提高答题能力.

“单元检测”是对整个单元的知识点进行检测，以帮助学生进一步巩固所学知识、查漏补缺.

本书的编选以 2020 年教育部颁布的《中等职业学校数学课程标准》作为依据，努力体现“以服务为宗旨，以就业为导向”的职业教育办学方针，以培养高素质劳动者和技能型人才作为教学目标.

本书由张良朋（淄博师范高等专科学校）、李祎（甘肃省庄浪县职业教育中心）、郑向军（成都机电工程学校）和于春红（河北省故城县职业技术教育中心）任主编，王小华（青龙满族自治县职业技术教育中心）任副主编.

由于编者水平有限，书中难免存在不妥之处，敬请读者批评指正，提出宝贵的意见和建议.

编　者

目录

CONTENTS

第 1 单元

直线与圆的方程

1.1 两点间距离公式及线段的中点坐标公式

知识梳理

1. 两点间距离公式

设 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$ 为坐标平面上任意两点，则 A 与 B 的距离为

$$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

2. 线段的中点坐标公式

设 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$ 是平面直角坐标系内的任意两点，点 $M(x_0, y_0)$ 是线段 AB 的中点，则

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}, y_0=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

典例精解

例 1 求点 $A(-5,0)$，$B(3,-3)$ 之间的距离.

解 根据两点间距离公式可知，$|AB|=\sqrt{(3+5)^2+(-3-0)^2}=\sqrt{73}$.

技巧点拨 掌握两点间距离公式是解题的关键.

【变式训练 1】 已知点 $A(1,0)$，$B(m,-2)$ 之间的距离为 $2\sqrt{10}$，求 m 的值.

例 2 已知点 $A(4,m)$，$B(n,-4)$，线段 AB 的中点坐标为 $(2,1)$，求 m 和 n.

解 根据题意可知 $\frac{4+n}{2}=2$，$\frac{m-4}{2}=1$，解得 $m=6$，$n=0$.

技巧点拨 中点坐标公式与起点 A 和终点 B 的顺序无关，只与起点和终点的位置有关.

【变式训练 2】 求点 $A(-1,2)$ 关于点 $B(1,0)$ 对称的点的坐标.

自我检测

1. 求下列两点之间的距离.

(1) $A(0,-2)$，$B(3,0)$；　　(2) $A(-3,1)$，$B(2,4)$；

(3) $A(4,-2)$，$B(1,2)$；　　(4) $A(5,-2)$，$B(-1,6)$；

(5) $A(1,-2)$，$B(3,5)$；　　(6) $A(4,-3)$，$B(12,3)$.

2. 求线段 AB 的中点坐标.

(1) $A(2,-1)$, $B(3,4)$;　　(2) $A(0,-3)$, $B(5,0)$;

(3) $A\left(3,-\frac{5}{3}\right)$, $B\left(4,-\frac{2}{3}\right)$;　　(4) $A(6,1)$, $B(3,3)$;

(5) $A(4,-2)$, $B(6,4)$;　　(6) $A(1,-1)$, $B(3,7)$.

3. 有一线段 AB，它的中点坐标是 $(4,2)$，端点 A 的坐标是 $(-2,3)$，求另一端点 B 的坐标.

4. 已知点 $A(2,-1)$，$B(a,4)$，并且 $|AB|=\sqrt{41}$，求 a 的值.

5. 已知△ABC 三个顶点的坐标分别为 $A(-a,0)$，$B(a,0)$，$C(0,\sqrt{3}a)$.

(1)求证：△ABC 是等边三角形；

(2)求这个三角形的中线长.

1.2 直线及其方程

1.2.1 直线的倾斜角与斜率

知识梳理

1. 倾斜角

直线 l 在直角坐标系中与两个坐标轴有不同的夹角，其中直线 l 向上的方向与 x 轴的正

方向所成的最小正角,叫作直线 l 的**倾斜角**.

2. 斜率

直线 l 的倾斜角为 $\alpha(\alpha\neq 90^\circ)$,则 α 的正切值叫作这条直线的**斜率**.

3. 斜率的计算公式

设点 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$为直线 l 上的任意两点,则直线 l 的斜率为

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x_1\neq x_2).$$

典例精解

例1　下列说法中,正确的是(　　).

A. 平行于 x 轴的直线的倾斜角是 0°或 180°

B. 两条直线的倾斜角相等,它们的斜率也相等

C. 任意一条直线都有倾斜角和斜率

D. 直线斜率的范围是$(-\infty,+\infty)$

解　平行于 x 轴的直线的倾斜角为 0°,选项 A 错误;若两条直线的倾斜角都是 90°,则它们的斜率不存在,选项 B,C 错误;故选项 D 正确.

技巧点拨　本题主要考查直线的倾斜角与斜率的概念.

【变式训练 1】　下列说法中,正确的是(　　).

A. 若一条直线的倾斜角为 α,则这条直线的斜率为 $\tan\alpha$

B. 若一条直线的斜率为 $\tan\alpha$,则这条直线的倾斜角为 α

C. 任意一条直线都有倾斜角

D. 直线的倾斜角越大,它的斜率就越大

例2　求满足下列倾斜角的直线的斜率.

(1)$\alpha=\frac{\pi}{4}$；　(2) $\alpha=\frac{2\pi}{3}$.

解　(1)$k=\tan\frac{\pi}{4}=1$.

(2)$k=\tan\frac{2\pi}{3}=\tan\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\tan\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$.

技巧点拨　若直线的倾斜角为 α,则斜率 $k=\tan\alpha$.

【变式训练 2】　已知某直线倾斜角的正弦值为 $\frac{3}{5}$,求该直线的斜率.

例 3 已知直线 l 过点 $A(3,-2)$，$B(-5,6)$，求直线 l 的斜率和倾斜角.

解 设直线 l 的斜率为 k，倾斜角为 α. $k=\dfrac{6-(-2)}{-5-3}=-1$，即 $\tan\alpha=-1$. 因为 $\alpha\in[0°,180°)$，所以 $\alpha=\dfrac{3\pi}{4}$. 因此，直线 l 的斜率为 -1，倾斜角为 $\dfrac{3\pi}{4}$.

技巧点拨 若直线过点 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，则直线的斜率为 $k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x_1\neq x_2)$.

【变式训练 3】 已知直线过点 $A(-2,0)$，$B(-5,3)$，求该直线的斜率.

自我检测

1. 选择题.

(1)直线 $x=3$ 的倾斜角是(　　).

A. 0　　B. $\dfrac{\pi}{2}$　　C. π　　D. 不存在

(2)已知直线 l 的倾斜角为 $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$，则直线 l 的斜率为(　　).

A. 1　　B. -1　　C. 不存在　　D. 不能确定

(3)如图 1-1 所示，直线 l_1，l_2，l_3 的斜率分别为 k_1，k_2，k_3，则(　　).

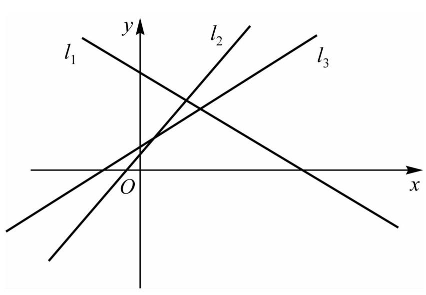


图 1-1

A. $k_1<k_2<k_3$　　B. $k_3<k_1<k_2$

C. $k_3<k_2<k_1$　　D. $k_1<k_3<k_2$

2. 填空题.

(1)直线倾斜角 α 的取值范围是________.

(2)平行于 x 轴的直线的倾斜角为________;平行于 y 轴的直线的倾斜角为________.

(3)已知直线的倾斜角为 $135°$,则此直线的斜率是________.

(4)经过点 $P(-5,1)$,$Q(1,7)$的直线的斜率为________,倾斜角为________.

3. 判断满足下列条件的直线的斜率是否存在. 若存在,求出结果.

(1)直线的倾斜角为 $45°$;

(2)直线过点 $A(-1,5)$,$B(4,5)$;

(3)点 $A(-2,3)$,$B(-2,7)$在直线上;

(4)直线过点 $A(2,-1)$，$B(-3,5)$.

4.若直线 l 过点 $P(-3,1)$，$Q(-5,3)$，求直线 l 的倾斜角.

5.求满足下列条件的直线的斜率.

(1)直线的倾斜角为 $30°$；

(2)直线的倾斜角为 $120°$；

(3)直线过点 $A(2,-1)$,$B(1,-2)$;

(4)直线平行于 y 轴.

6.求过点 $P(1,0)$,$Q(4,\sqrt{3})$的直线的倾斜角.

7.已知过点 $A(2,x)$,$B(1,-2)$的直线的斜率是 3,求 x 的值.

8.若点 $A(3,1)$，$B(-2,y)$，$C(8,11)$在同一条直线上，求 y 的值.

1.2.2 直线的点斜式和斜截式方程

知识梳理

(1)**点斜式方程**：斜率为 k，并且经过点 $P_0(x_0,y_0)$的直线的点斜式方程为 $y-y_0=k(x-x_0)$.

(2)**截距**：直线 l 与 x 轴交于点 $A(a,0)$，与 y 轴交于点 $B(0,b)$，则 a 叫作直线 l 在 x 轴上的**截距**(或**横截距**)；b 叫作直线在 y 轴上的**截距**(或**纵截距**).

(3)**斜截式方程**：斜率为 k，在 y 轴上的截距为 b 的直线的斜截式方程为 $y=kx+b$.

典例精解

例 1 已知直线 l 经过点 $A(-1,4)$，倾斜角为 $135°$，求直线 l 的点斜式方程.

解 根据题意可知，直线 l 的斜率为 $k=\tan 135°=-1$. 故直线 l 的点斜式方程为

$$y-4=-(x+1).$$

技巧点拨 在求点斜式方程时，一般需要先求斜率. 求斜率的方法一般有两种，即已知两点求斜率和已知倾斜角求斜率.

【变式训练 1】 求过点 $A(-1,2)$且斜率为 2 的直线的点斜式方程.

例 2 已知直线 l 的倾斜角的余弦值为$\frac{4}{5}$，横截距为-4，求直线 l 的斜截式方程.

解 设直线 l 的方程为 $y=kx+b$，倾斜角为 α. 根据题意可知，$\cos\alpha=\frac{4}{5}$，$\alpha\in[0°,180°)$，

所以 $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{3}{5}$，$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{3}{4}$，即 $k=\frac{3}{4}$. 又因为横截距为 -4，所以直线 l 过点 $(-4,0)$，将该点代入 $y=\frac{3}{4}x+b$，解得 $b=3$. 故直线 l 的斜截式方程为 $y=\frac{3}{4}x+3$.

技巧点拨　掌握斜截式方程的基本形式和同角三角函数的基本关系是解题的关键.

【变式训练2】　已知直线 l 过点 $A(1,0)$，$B(2,3)$，求直线 l 的斜截式方程.

自我检测

1. 填空题.

(1)过点 $(-1,2)$ 且平行于 x 轴的直线方程为________.

(2)已知直线 l 的倾斜角为 $60°$，并且经过点 $P(2,3)$，则直线 l 的方程为________. 直线 l 在 y 轴上的截距是________.

(3)已知直线 l 的点斜式方程是 $y-3=\frac{1}{5}(x-2)$，则直线 l 的斜率是________，它所经过的点是________.

(4)经过点 $(2,1)$，$(6,-3)$ 的直线方程为________.

2. 求经过点 $A(3,1)$，倾斜角为 $60°$ 的直线的点斜式方程.

3. 求斜率为3，且与 y 轴的交点为 $\left(0,-\frac{2}{3}\right)$ 的直线的斜截式方程.

4. 直线方程为 $y=kx+b$，且过点 $P_1(4,5)$，$P_2(3,-1)$，求 k,b 的值.

1.2.3 直线的一般式方程

知识梳理

方程 $Ax+By+C=0$（其中 A,B 不全为 0）叫作直线的一般式方程.

典例精解

例 已知直线 l 过点 $A(-5,4)$，$B(2,1)$，求直线 l 的一般式方程.

解 设直线 l 的一般式方程为 $Ax+By+C=0$. 根据题意列方程组，$\begin{cases}-5A+4B+C=0\\2A+B+C=0\end{cases}$，解得 $A=\frac{3}{7}B$，$C=-\frac{13}{7}B$.

故直线 l 的一般式方程为

$$3x+7y-13=0.$$

技巧点拨 掌握直线的一般式方程的形式及方程组的解法是解题的关键.

【变式训练】 求直线 $x-y+3=0$ 的斜率及其在 y 轴上的截距.

自我检测

1. 选择题.

(1)直线 $x+6y+2=0$ 在 x 轴和 y 轴上的截距分别是(　　).

A. $2,\frac{1}{3}$　　B. $-2,-\frac{1}{3}$

C. $-\frac{1}{2},-3$　　D. $-2,-3$

(2)直线过点$(-3,-2)$且在两坐标轴上的截距相等,则该直线的方程为(　　).

A. $2x-3y=0$　　B. $x+y+5=0$

C. $2x-3y=0$ 或 $x+y+5=0$　　D. $x+y+5=0$ 或 $x-y+5=0$

(3)斜率是-1,且与 y 轴的交点是$(0,-3)$的直线 l 的一般式方程是(　　).

A. $y-x+3=0$　　B. $x+y+3=0$

C. $x-y+3=0$　　D. $x+3y=0$

(4)下列说法正确的是(　　).

A. 经过定点 $P_0(x_0,y_0)$的直线都可以用方程 $y-y_0=k(x-x_0)$表示

B. 经过定点 $A(0,b)$的直线都可以用方程 $y=kx+b$ 表示

C. 不经过原点的直线都可以用方程$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 表示

D. 经过任意两个不同的点 $P_1(x_1,y_1)$,$P_2(x_2,y_2)$的直线都可以用方程$(y-y_1)(x_2-x_1)=(x-x_1)(y_2-y_1)$表示

2. 填空题.

(1)直线 l:$\frac{x}{-2}+\frac{y}{-3}=1$ 在 x 轴上的截距是____________.

(2)把直线 l 的一般式方程 $2x-y+6=0$ 化成斜截式方程是____________.

3. 把直线 l 的一般式方程 $x-2y+6=0$ 化成斜截式方程,求出直线 l 的斜率及在 x 轴和 y 轴上的截距,并画图.

4.根据下列各条件写出直线的方程,并且化成一般式方程.

(1)经过点 $A(6,-4)$,斜率为$-\frac{4}{3}$;

(2)经过点 $B(4,2)$,平行于 x 轴;

(3)在 x 轴和 y 轴上的截距分别为$\frac{3}{2}$,-3;

(4)经过点 $P_1(3,-2)$,$P_2(5,4)$.

5. 已知$\triangle ABC$的三个顶点为$A(3,-4)$，$B(0,3)$，$C(-6,0)$，求它的三条边所在直线的方程.

1.3　两条直线的位置关系

1.3.1　两条相交直线的交点

知识梳理

在同一平面内，若两条直线l_1和l_2相交，且它们的斜率k_1和k_2都存在，则$k_1 \neq k_2$；若两条直线l_1和l_2的斜率k_1与k_2都存在，且$k_1 \neq k_2$，则l_1和l_2相交.

在同一平面内，若直线l_1的斜率不存在，直线l_2的斜率存在，则l_1和l_2相交.

求两条直线的交点坐标就是求这两条直线方程所构成的方程组的解.

典例精解

例　判断直线$2x+y-1=0$和直线$x+3y-6=0$是否相交. 若相交，请求出交点的坐标.

解　直线$2x+y-1=0$可化为斜截式方程$y=-2x+1$，斜率为-2.

直线$x+3y-6=0$可化为斜截式方程$y=-\frac{1}{3}x+2$，斜率为$-\frac{1}{3}$.

因为两条直线的斜率存在且不相等，故两条直线相交.

列方程组$\begin{cases}2x+y-1=0\\x+3y-6=0\end{cases}$，解得$x=-\frac{3}{5}$，$y=\frac{11}{5}$. 故两条直线的交点为$\left(-\frac{3}{5},\frac{11}{5}\right)$.

技巧点拨 本题考查判定两条直线是否相交的方法及求两条相交直线的交点坐标的方法.

【变式训练】 求直线 $x-y+2=0$ 与直线 $2x+y-1=0$ 的交点.

自我检测

1.已知直线 $2x+3y-k=0$ 与直线 $x-ky+12=0$ 的交点在 y 轴上,求 k 的值.

2.求过直线 $x-y=0$ 与 $x+2y=3$ 的交点,且斜率为 2 的直线的方程.

3.求过直线 $x+y+4=0$ 和 $2x-4y+2=0$ 的交点,且过点(1,1)的直线的方程.

4. 已知直线 $2x-y-10=0$，$4x+3y-10=0$ 与直线 $ax+2y+8=0$ 相交于一点，求 a 的值.

1.3.2 两条直线平行的条件

知识梳理

已知两直线分别为 $l_1: y=k_1x+b_1$，$l_2: y=k_2x+b_2$，那么

(1)如果 $k_1=k_2$，当 $b_1=b_2$ 时，则两条直线 l_1，l_2 重合；

(2)如果 $k_1=k_2$，当 $b_1\neq b_2$ 时，则两条直线 l_1，l_2 平行；反之，如果两条直线 l_1，l_2 平行，则 $k_1=k_2$，且 $b_1\neq b_2$，即 $l_1 /\!/ l_2 \Leftrightarrow k_1=k_2$ 且 $b_1\neq b_2$.

典例精解

例　已知直线 $y=3x+1$ 与直线 $x+my-2=0$ 平行，求 m 的值.

解　直线 $x+my-2=0$ 可化为斜截式方程，即 $y=-\dfrac{1}{m}x+\dfrac{2}{m}$.

根据题意可知，$\begin{cases}-\dfrac{1}{m}=3\\ \dfrac{2}{m}\neq 1\end{cases}$，解得 $m=-\dfrac{1}{3}$.

技巧点拨　掌握两条直线平行的条件是解题的关键.

【变式训练】　若直线 $l_1: x+ay=2a+2$ 与直线 $l_2: ax+y=a+1$ 平行，求 a 的值.

自我检测

1. 求平行于直线 $x-2y+3=0$ 且过点$(-1,3)$的直线的方程.

2. 已知直线 $4x+3y+8=0$ 与直线 $y=ax+2=0$ 平行，求 a 的值.

3. 已知直线 l 与直线 $2x+3y+5=0$ 平行，且在两坐标轴上的截距之和为 $\frac{5}{6}$，求直线 l 的方程.

4. 已知直线 l 经过直线 $x+y-4=0$ 和 $x-y+2=0$ 的交点，且与直线 $2x-y-1=0$ 平行，求直线 l 的方程.

5. 求过点(2,3)且平行于直线 $3x-2y+5=0$ 的直线的方程.

6. 已知梯形 $ABCD$ 的顶点坐标为 $A(0,0)$，$B(m,0)$，$C(4,4)$，$D(2,5)$，且 $AD/\!/BC$，求：

(1) m 的值；

(2) 梯形中位线所在直线的方程.

1.3.3 两条直线垂直的条件

知识梳理

判断两条直线 $l_1: y=k_1x+b_1$，$l_2: y=k_2x+b_2$ 是否垂直，首先要看这两条直线的斜率是否都存在.

(1)当两条直线的斜率都存在且不为0时，若 $l_1 \perp l_2$，则 $k_1 \cdot k_2=-1$；反之亦然.

(2)如果一条直线的斜率为0，另一条直线的斜率不存在，则两条直线垂直.

典例精解

例 已知直线 $l_1: mx+8y+n=0$ 与直线 $l_2: 2x+my-1=0$ 互相垂直，且直线 l_1 在 y 轴上的截距为 -1，求 m，n 的值.

解 因为 $l_1 \perp l_2$，所以 $2m+8m=0$，解得 $m=0$. 又因为 l_1 在 y 轴上的截距为 -1，即 $8\times(-1)+n=0$，解得 $n=8$.

技巧点拨 若直线 $l_1: A_1x+B_1y+C_1=0$ 与直线 $l_2: A_2x+B_2y+C_2=0$ 的系数不为0，且 $l_1 \perp l_2$，则 $A_1A_2+B_1B_2=0$.

【变式训练】 求过点(2，1)且与直线 $x+y=1$ 垂直的直线的方程.

自我检测

1. 选择题.

(1)直线 $3x+y+1=0$ 和直线 $6x+2y+1=0$ 的位置关系是(　　).

A. 重合　　　　B. 平行

C. 垂直　　　　D. 相交但不垂直

(2)如果直线 $ax+2y+1=0$ 与直线 $x+y-2=0$ 互相垂直，那么 a 的值等于(　　).

A. 1　　　　B. $-\frac{1}{3}$

C. $-\frac{2}{3}$　　　　D. -2

(3)若直线 $A_1x+B_1y+C_1=0$ 与直线 $A_2x+B_2y+C_2=0$ 互相垂直,下列选项中正确的是(　　).

A. $A_1A_2+B_1B_2=0$　　B. $A_1A_2=B_1B_2$

C. $\frac{A_1A_2}{B_1B_2}=-1$　　D. $\frac{A_1A_2}{B_1B_2}=1$

2. 已知直线 $(a+2)x+(1-a)y-3=0$ 与 $(a-1)x+(2a+3)y+2=0$ 互相垂直,求 a 的值.

3. 判断下列直线的位置关系,如果垂直或相交,求出交点的坐标.

(1) $l_1: 2x+y-3=0, l_2: x+3y+1=0$;

(2) $l_1: 5x-2y+2=0, l_2: 10x-4y+3=0$;

(3) $l_1: x+3=0, l_2: 3y-1=0$;

(4) $l_1: 4x-2y+1=0$，$l_2: 3x+6y-5=0$.

4. 已知直线 $l_1: x+2y-3=0$，$l_2: x+my+n=0$，当 m,n 为何值时：

(1) $l_1 \parallel l_2$；(2) $l_1 \perp l_2$.

5. 已知菱形 $ABCD$ 的两条对角线相交于点 $(1,1)$，若其中一条对角线所在直线的方程为 $3x-4y+1=0$，求另一条对角线所在直线的方程.

6. 求过点$(-2,3)$，且垂直于直线$3x+2y+1=0$的直线的方程.

1.4　点到直线的距离公式

知识梳理

(1)**点到直线的距离**：在直角坐标系中，连接直线外一点和直线上的点所组成的线段中，垂线段最短，称为点到直线的距离.

(2)**点到直线的距离公式**：设点$P_0(x_0,y_0)$为直线l：$Ax+By+C=0$外一点，则点P_0到直线l的距离为

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

典例精解

例　若点$(4,a)$到直线$4x-3y-1=0$的距离为3，求a的值.

解　根据题意可知，$3=\frac{|4\times4+(-3)a+(-1)|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}$，解得$a=0$或$a=10$.

技巧点拨　灵活运用点到直线的距离公式，掌握绝对值方程的求解方法.

【变式训练】　已知直线l经过点$(5,10)$，原点到直线l的距离为5，求直线l的方程.

自我检测

1. 求点$(2,1)$到直线$3x-4y+2=0$的距离.

2. 求原点到直线$x+2y-5=0$的距离.

3. 求过点$(-1,2)$且与原点距离为$\frac{\sqrt{2}}{2}$的直线的方程.

4. 求点(1,2)到下面直线的距离.

(1) $4x+3y-2=0$；　　　(2) $3x+4y-2=0$.

5. 已知点 P 是 y 轴上一点，且点 P 到直线 $3x-4y+6=0$ 的距离为 6，求点 P 的值.

6. 已知点 $A(1,3)$，$B(3,1)$，$C(-1,0)$，求△ABC 的面积.

1.5　圆的方程

知识梳理

(1)**圆心、半径**：平面内到一个定点的距离等于定长的点的轨迹为一个圆，其中定点叫作

圆心,定长叫作**半径**.

(2)**圆的标准方程**:圆心为(a,b),半径为r的圆的方程为$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$,我们把它称为圆的标准方程.

(3)**圆的一般方程**:当$D^2+E^2-4F>0$时,方程$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$叫作圆的一般方程.其中,圆心坐标为$\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$,半径为$r=\frac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2}$.

典例精解

例 1 已知点$A(3,-2)$,$B(-5,4)$,求以线段AB为直径的圆的方程.

解 根据题意可知,所求圆的圆心坐标为线段AB的中点坐标$(-1,1)$,半径为$\frac{1}{2}\sqrt{(-5-3)^2+(4+2)^2}=5$.

所以所求圆的方程为$(x+1)^2+(y-1)^2=25$.

技巧点拨 当已知条件与圆心和半径有关时,常采用圆的标准方程求解.

【变式训练 1】 求以点$(-2,3)$为圆心、1为半径的圆的方程.

例 2 若圆经过点$(2,0)$,$(4,0)$,$(0,2)$,求该圆的方程.

解 设所求圆的方程为$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$.

根据题意可知,$\begin{cases}4+2D+F=0\\16+4D+F=0\\4+2E+F=0\end{cases}$,解得$D=-6$,$E=-6$,$F=8$.

故所求圆的方程为$x^2+y^2-6x-6y+8=0$.

技巧点拨 若已知条件与圆心和半径关系不大,一般采用圆的一般方程求解.

【变式训练 2】 已知圆经过点$(4,1)$,$(-2,3)$,$(0,-1)$,求该圆的方程.

自我检测

1. 选择题.

(1)圆的标准方程是$(x+3)^2+(y-4)^2=16$,则圆心坐标和半径分别是(　　).

A. $(3,4)$,4　　B. $(3,-4)$,16　　C. $(-3,4)$,4　　D. $(-3,-4)$,16

(2)圆心为$O(3,-1)$,半径为$\sqrt{11}$的圆的方程为(　　).

A. $(x+3)^2+(y-1)^2=\sqrt{11}$

B. $(x+3)^2+(y-1)^2=11$

C. $(x-3)^2+(y+1)^2=\sqrt{11}$

D. $(x-3)^2+(y+1)^2=11$

(3)方程$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$表示一个圆的充要条件是(　　).

A. $A=C,B=0$　　B. $A=C\neq0,B=0,D^2+E^2-4F>0$

C. $A=C\neq0,B=0$　　D. $A=C\neq0,B=0,D^2+E^2-4AF>0$

(4)到点$(3,-1)$的距离等于 10 的轨迹方程为(　　).

A. $(x-3)^2+(y+1)^2=10$　　B. $(x-3)^2+(y+1)^2=100$

C. $(x+3)^2+(y-1)^2=10$　　D. $(x+3)^2+(y-1)^2=100$

2. 填空题.

(1)圆$x^2+(y+2)^2=3$的圆心坐标为________,半径为________.

(2)以点$O(-4,0)$为圆心,以 2 为半径的圆的标准方程为________.

(3)圆$(x-5)^2+(y+1)^2=4$的一般方程为________.

(4)若圆$(x-2)^2+(y+k)^2=9$经过点$A(2,-1)$,则$k=$________.

(5)圆$x^2+y^2+x-4y=0$的面积是________.

3. 写出下列各圆的标准方程.

(1)圆心在原点,半径是 3;

(2)圆心在点(3,4),半径是 5；

(3)圆心在点(8,-3),经过点(5,1).

4.写出下列圆的圆心、半径.

(1)$(x-2)^2+(y+3)^2=25$；

(2)$(x+2)^2+(y-1)^2=36$；

(3)$x^2+y^2-4x+6y+9=0$；　　(4)$x^2+y^2-4x+2y-1=0$.

5.判断下列方程是否表示圆，如果是，求出圆心坐标和半径.

(1)$x^2+y^2-4x-16=0$；　　(2)$x^2+y^2-2x-8y-16=0$；

(3)$x^2+y^2-4x-8y+20=0$；　　(4)$x^2+y^2-4x+4=0$；

(5) $x^2+y^2+x-3y+1=0$；

(6) $x^2+y^2+4x+4=0$；

(7) $x^2+y^2+x+2=0$.

6．已知圆过点 $A(1,4)$，$B(3,-2)$，且圆心到直线 AB 的距离为 $\sqrt{10}$，求这个圆的方程.

7.求圆心在直线 $2x-y-3=0$ 上，且过点(5,2)和(3,−2)的圆的方程.

8.求以 $O(1,0)$ 为圆心，且过圆 $x^2+y^2-6x+2y-1=0$ 的圆心的圆的方程.

9.求与圆 $x^2+y^2+2x-6y-2=0$ 的圆心相同，且半径为3的圆的方程.

10.求过点 $O(0,0)$，$A(1,1)$，$B(1,-5)$的圆的方程.

11.已知方程 $x^2+y^2-2(t+3)x+2(1-4t^2)y+16t^4+9=0(t\in\mathbf{R})$的图像是圆.

(1)求 t 的取值范围；

(2)求其中面积最大的圆的方程.

1.6　直线与圆的位置关系

1.6.1　直线与圆的位置关系及判定方法

知识梳理

1. 直线与圆的位置关系

(1)直线与圆无交点时,称直线与圆**相离**;

(2)直线与圆仅有一个交点时,称直线与圆**相切**;

(3)直线与圆有两个交点时,称直线与圆**相交**.

2. 直线与圆位置关系的判定方法

方法一　设圆心到直线 l 的距离为 d,半径为 r.

(1)直线 l 与圆相离,当且仅当 $d>r$;

(2)直线 l 与圆相切,当且仅当 $d=r$;

(3)直线 l 与圆相交,当且仅当 $d<r$.

方法二　设直线 l 的方程为 $Ax+By+C=0$,圆的方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ $(D^2+E^2-4F>0)$,两个方程联立,经消元法得到一元二次方程,其判别式为 Δ,则

(1)直线 l 与圆相离,当且仅当 $\Delta<0$;

(2)直线 l 与圆相切,当且仅当 $\Delta=0$;

(3)直线 l 与圆相交,当且仅当 $\Delta>0$.

典例精解

例　已知直线 l:$y=kx+5$,圆 C:$(x-1)^2+y^2=1$,当 k 为何值时,直线 l 与圆 C 相离、相切、相交?

解　根据题意可知,圆 C 的圆心为$(1,0)$,半径为1,圆心到直线的距离为 $d=\dfrac{|k+5|}{\sqrt{k^2+1}}$.

(1)当 $d>r$,即$\dfrac{|k+5|}{\sqrt{k^2+1}}>1$时,直线 l 与圆 C 相离,解得 $k>-\dfrac{12}{5}$.

(2)当 $d=r$,即$\dfrac{|k+5|}{\sqrt{k^2+1}}=1$时,直线 l 与圆 C 相切,解得 $k=-\dfrac{12}{5}$.

(3)当 $d<r$,即$\dfrac{|k+5|}{\sqrt{k^2+1}}<1$时,直线 l 与圆 C 相交,解得 $k<-\dfrac{12}{5}$.

技巧点拨 讨论直线与圆的位置关系一般有以下两种方法：

(1)代数法，即将直线的方程与圆的方程联立，消元得到一个一元二次方程，然后用判别式去判断直线与圆的位置关系.

(2)几何法，即通过圆心到直线的距离与半径的比较来判定直线与圆的位置关系.在判定时要注意直线斜率不存在的情况.

【变式训练】 判定直线 l：$x+y-16=0$ 与圆 C：$(x-2)^2+(y-2)^2=9$ 的位置关系.

自我检测

1.选择题.

(1)直线 $3x-4y-9=0$ 与圆 $x^2+y^2=4$ 的位置关系是(　　).

A.相交且过圆心　　B.相切

C.相离　　D.相交但不过圆心

(2)已知圆的方程为$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2(r>0)$，下列结论错误的是(　　).

A.当 $a^2+b^2=r^2$ 时，圆必过原点　　B.当 $a=r$ 时，圆与 y 轴相切

C.当 $b=r$ 时，圆与 x 轴相切　　D.当 $b<r$ 时，圆与 x 轴相交

(3)直线 $\sqrt{3}x-y+m=0$ 与圆 $x^2+y^2-2x-2=0$ 相切，则实数 m 等于(　　).

A.$-3\sqrt{3}$ 或 $\sqrt{3}$　　B.$-3\sqrt{3}$ 或 $3\sqrt{3}$

C.$\sqrt{3}$ 或 $-\sqrt{3}$　　D.$-\sqrt{3}$ 或 $3\sqrt{3}$

(4)下列直线中一定是圆的切线的是(　　).

A.与圆有公共点的直线　　B.到圆心的距离等于半径的直线

C.垂直于圆的半径的直线　　D.过圆的直径端点的直线

2.填空题.

(1)直线 $y=2x+b$ 与圆 $x^2+y^2=9$ 相切，则 $b=$____________.

(2)过圆上一点可以作圆的____________条切线；过圆外一点可以作圆的____________条切线；过圆内一点的圆的切线____________(填“存在”或“不存在”).

3.判定下列各直线与圆的位置关系.

(1)直线 $3x-4y-1=0$ 与圆$(x-1)^2+(y+2)^2=9$；

(2)直线 $3x+4y-25=0$ 与圆 $x^2+y^2=25$；

(3)直线 $4x+3y+13=0$ 与圆 $x^2+y^2+6x-6y+14=0$；

(4)直线 $3x-4y+4=0$ 与圆$(x-1)^2+(y+2)^2=25$；

(5)直线 $y=x+1$ 与圆 $x^2+y^2-2x-1=0$；

(6)直线 $x-y+2=0$ 与圆 $x^2+y^2-4x+6y-3=0$；

(7)直线 $y=-\sqrt{3}x$ 与圆 $(x-4)^2+y^2=4$.

4. 讨论圆 $x^2+y^2=25$ 与直线 $x-y-1=0$ 的位置关系.若有交点,求交点的坐标.

5. 当 m 为何值时,直线 $x-my+3=0$ 与圆 $(x-3)^2+y^2=4$

(1)相交;(2)相切;(3)相离.

1.6.2 直线与圆相交时弦长的求法

知识梳理

若直线 $y=kx+m$ 与圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 相交于 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$ 两点,则直线被圆截得的弦长为

$$|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|.$$

典例精解

例　直线 $x+y-4=0$ 与圆 $(x-3)^2+(y-3)^2=4$ 相交于 A,B 两点,求弦长 AB 的长度.

解　根据题意可知,圆的圆心坐标为(3,3),半径为 $r=2$.故圆心到直线 $x+y-4=0$ 的距离为 $d=\dfrac{|3+3-4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}$.

因此,弦长 $|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{2}$.

技巧点拨 先计算圆心到直线的距离，然后再用几何的方法求圆被直线所截得的弦长.

【变式训练】 已知直线 $y=-\frac{2}{3}x+2$ 与圆 $(x-1)^2+(x-2)^2=1$ 交于 A,B 两点，求线段 AB 的长度.

自我检测

1. 求圆$(x-3)^2+(y+1)^2=25$ 被 x 轴截得的弦长.

2. 求圆 $x^2+y^2+6x-4y-3=0$ 被直线 $y=1-x$ 截得的弦长.

3. 若直线 l 与圆 $x^2+y^2-6y=0$ 交于 A,B 两点，已知点$(1,1)$为弦长 AB 的中点，求直线 l 的方程.

1.6.3 圆的切线方程的求法

知识梳理

求切线方程的关键是求出切线的斜率 k,可以利用圆心到切线的距离等于圆的半径来确定斜率 k.

以圆 $x^2+y^2=r^2$ 上一点 $P(x_0,y_0)$为切点的切线方程为

$$x_0x+y_0y=r^2.$$

典例精解

例 过点 $P(2,3)$向圆$(x-1)^2+(y-1)^2=1$引切线,求切线的方程.

解 根据题意可知,圆的圆心坐标为(1,1),半径为 $r=1$.

将点 P 代入圆的方程可知,$(2-1)^2+(3-1)^2=5>1$,即点 P 在圆外,故由点 P 向圆引出的切线有两条.

当斜率 k 存在时,设切线方程为 $y-3=k(x-2)$,即 $kx-y+3-2k=0$.圆心到切线的距离为 $d=\dfrac{|2-k|}{\sqrt{k^2+1}}=r=1$,解得 $k=\dfrac{3}{4}$.故切线方程为 $y-3=\dfrac{3}{4}(x-2)$,化为一般式为 $3x-4y+6=0$.

当斜率不存在时,切线方程为 $x=2$.

技巧点拨 先要判断点与圆的位置关系,明确所求的切线有几条,然后设切线的方程,利用圆心到切线的距离等于半径来求切线的斜率.一定要注意切线斜率不存在的情况,防止漏解.

【变式训练】 求以点$(2,-1)$为圆心,且与直线 $2x+5y=0$ 相切的圆的方程.

自我检测

1. 求圆 $x^2+y^2=4$ 在点 $(1,\sqrt{3})$ 处的切线方程.

2. 求过原点且与圆 $(x-2)^2+y^2=1$ 相切的直线的方程.

3. 求以点 $(1,2)$ 为圆心，且与直线 $3x+4y-1=0$ 相切的圆的方程.

4. 求圆心在 y 轴，且与直线 l_1：$4x-3y+2=0$，l_2：$3x-4y-2=0$ 都相切的圆的方程.

1.7　直线与圆的方程的应用

知识梳理

本节主要介绍直线与圆的方程在科技、生产及生活中的应用. 解决直线与圆的问题可分为以下三步：

(1)建立适当的平面直角坐标系，用坐标和方程表示问题中的几何元素.

(2)通过代数运算解决代数问题.

(3)把代数运算结果“翻译”成几何结论.

典例精解

例　小河同侧有 A，B 两个村，两村计划在河边共建一座水电站发电供两村使用. 已知 A，B 两村到河边的垂直距离分别为 30 m 和 70 m，且两村相距 50 m. 问水电站建于何处，送电到两村电线用料最省.

解　以河流所在直线为 x 轴，A 村到河流的垂线为 y 轴建立平面直角坐标系，则点 $A(0,30)$，$B(x,y)$.

根据题意可知，$y=70$，则 $x=\sqrt{AB^2-y^2}=30$，则点 $B(30,70)$.

设点 A 关于 x 轴的对称点为 A'，则点 $A'=(0,-30)$，则直线 $A'B$ 的斜率为 $\frac{10}{3}$，故直线 $A'B$ 的方程为 $y=\frac{10}{3}x-30$.

令 $y=0$，则 $x=9$，即直线 $A'B$ 与 x 轴的交点为$(9,0)$.

故水电站应建在 A、B 两村间、距 A 村到小河垂点的 9 m 处用料最省.

【变式训练】 某海监船上的雷达的监测范围是半径为 26 km 的圆形区域，一艘轮船从位于海监船正东 40 km 处出发驶向位于海监船正北 30 km 处(假设该轮船直线行驶)，船速为 10 km/h，求这艘轮船被海监船监测的时长.

自我检测

1. 一艘轮船沿直线返回港口的途中接到气象台的台风预报，台风中心位于轮船正西 70 km 处，受影响的范围是半径为 30 km 的圆形区域. 已知港口位于台风中心正北 40 km 处，如果这艘轮船不改变航线，那么它是否会受到台风的影响?

提示：以台风中心为坐标原点建立直角坐标系.

2. 某操场 400 m 跑道的直道长为 87 m，弯道是两个半圆弧，半径为 36 m，求弯道所在的圆的方程.

提示：以操场中心为坐标原点建立直角坐标系.

3. 已知某隧道的截面是半径为 4 m 的半圆，车辆只能在道路中心线一侧行驶，一辆宽为 2.7 m，高为 3 m 的货车能不能驶入这个隧道？

第 1 单元检测

1. 选择题.

(1)已知直线 l 经过原点和点$(-1,-1)$，则它的倾斜角是(　　).

A. $\frac{\pi}{4}$　　B. $\frac{5\pi}{4}$

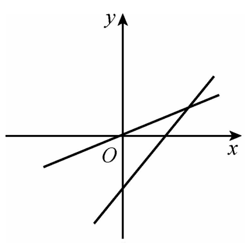
C. $\frac{\pi}{4}$或$\frac{5\pi}{4}$　　D. $-\frac{\pi}{4}$

(2)已知直线经过点 $A(0,4)$和点 $B(1,2)$，则直线 AB 的斜率为(　　).

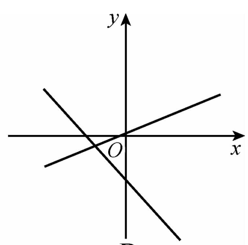
A. 3　　B. -2

C. 2　　D. 不存在

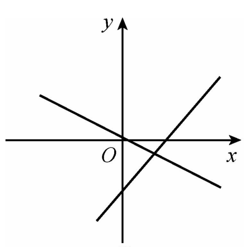
(3)在同一直角坐标系中，表示直线 $y=ax$ 与 $y=x+a$ 的正确选项是(　　).



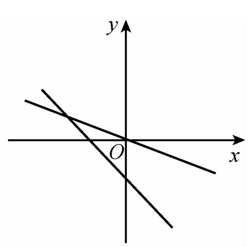
A.



B.



C.



D.

(4)如果直线 $ax+2y+2=0$ 与直线 $3x-y-2=0$ 平行,则 a 的值等于(　　).

A. -3　　B. -6

C. $-\frac{3}{2}$　　D. $\frac{2}{3}$

(5)直线 $x+3y+2=0$ 与直线 $3x+9y-4=0$ 的位置关系是(　　).

A. 两条重合的直线　　B. 两条互相平行的直线

C. 两条斜交的直线　　D. 两条互相垂直的直线

(6)点 $P(-1,2)$ 到直线 $8x-6y+15=0$ 的距离为(　　).

A. 2　　B. $\frac{1}{2}$

C. 1　　D. $\frac{7}{2}$

(7)过圆 $x^2+y^2=25$ 上的点(3,4),并且与之相切的直线方程为(　　).

A. $3x-4y=0$　　B. $3x-4y-25=0$

C. $3x+4y=0$　　D. $3x+4y-25=0$

2. 填空题.

(1)直线 AB 的中点为(1,2),端点 A 的坐标为(3,1),则端点 B 的坐标为____________.

(2)若直线过点$(1,\sqrt{3})$和$(4,2\sqrt{3})$,则此直线的倾斜角是____________.

(3)经过点(3,12)和点(9,4)的直线在两坐标轴上的截距的和是____________.

(4)若直线 $x+ay+2=0$ 和 $2x+3y+1=0$ 互相垂直,则 $a=$____________.

(5)已知直线 $5x+12y+a=0$ 与圆 $x^2-2x+y^2=0$ 相切,则 a 的值为____________.

(6)已知圆的方程为 $(x-1)^2+(y-2)^2=4$,则过点 $P(-1,5)$ 且与圆相切的直线方程为____________.

3. 已知△ABC 的顶点坐标为 $A(-1,5)$,$B(-2,-1)$,$C(4,3)$,M 是 BC 边上的中点.

(1)求 AB 边所在的直线方程;

(2)求中线 AM 的长；

(3)求 AB 边的高所在的直线方程.

4.已知直线 l 满足下列两个条件：
(1)过直线 $y=-x+1$ 和 $y=2x+4$ 的交点；
(2)与直线 $x-3y+2=0$ 垂直.
求直线 l 的方程.

5.求垂直于直线 $x+3y-5=0$,且与点 $P(-1,0)$的距离是$\frac{3\sqrt{10}}{5}$的直线的方程.

6.求经过点 $A(2,-1)$,并与直线 $x+y=1$ 相切,且圆心在直线 $y=-2x$ 上的圆的方程.

7.一圆和直线 $x+2y-3=0$ 相切于点 $P(1,1)$,且半径为 5,求这个圆的方程.

8. 已知两条直线 $l_1: x+m^2y+6=0$，$l_2: (m-2)x+3my+2m=0$，当实数 m 为何值时，直线 l_1 与 l_2

(1)相交；(2)平行；(3)重合.