职教高考数学训练营

20天攻克解答题

特约编辑：胡志平
责任编辑：植　苗
责任校对：廖　韧
封面设计：张瑞阳

ISBN 978-7-5504-6355-4

定价：35.00元

职教高考数学训练营 20天攻克解答题

主编　华腾新思职教高考研究中心

西南财经大学出版社

华腾新思

职教高考数学训练营

20天攻克解答题

主编　华腾新思职教高考研究中心

- 立足职教高考，囊括35个主流考点
- 50+典型例题，深度解析解题技巧
- 近200道精选试题，有效巩固训练效果

西南财经大学出版社
Southwestern University of Finance & Economics Press
中国·成都

职教高考数学训练营

20天 攻克解答题

主编 华腾新思职教高考研究中心

西南财经大学出版社
Southwestern University of Finance & Economics Press
中国·成都

图书在版编目(CIP)数据

职教高考数学训练营:20 天攻克解答题/华腾新思
职教高考研究中心主编.--成都:西南财经大学出版社,
2024. 8. --ISBN 978-7-5504-6355-4
Ⅰ. G634. 603
中国国家版本馆 CIP 数据核字第 2024078J58 号

职教高考数学训练营:20 天攻克解答题
ZHIJIAO GAOKAO SHUXUE XUNLIANYING:20 TIAN GONGKE JIEDATI

华腾新思职教高考研究中心　主编

特约编辑:胡志平
责任编辑:植　苗
责任校对:廖　韧
封面设计:张瑞阳
责任印制:朱曼丽

出版发行	西南财经大学出版社(四川省成都市光华村街 55 号)
网　　址	http://cbs. swufe. edu. cn
电子邮件	bookcj@ swufe. edu. cn
邮政编码	610074
电　　话	028-87353785
印　　刷	三河市骏杰印刷有限公司
成品尺寸	210 mm×285 mm
印　　张	8
字　　数	145 千字
版　　次	2024 年 8 月第 1 版
印　　次	2024 年 8 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 978-7-5504-6355-4
定　　价	35. 00 元

前言
Preface

职教高考也叫职业教育高考，主要面向中等职业学校毕业生或具备相应职业技能的人群，是这些考生提升学历、继续深造的重要通道。

“职教高考训练营”系列图书要解决中职生的什么痛点?

近年来，作为我国职业教育改革的重要组成部分，职教高考受到中职师生、学生家长越来越多的重视，职教高考改革越来越深入，制度越来越完善，同时考试的难度也越来越大。

不少中职生因为基础不牢固或长期“偏科”，在学习中存在一定的短板，对部分题型或知识点“认识不清晰，学习少方法，考试无信心”，在成长成才的道路上遇到了较大困难。

为了帮助广大中职生克服学习困难，在较短时间内补齐短板，我们经过广泛调研和精心策划，结合各地职教高考的考试要求及考试特点，编写了“职教高考训练营”系列图书。

“职教高考训练营”系列图书有什么特色?

本系列图书的特点为“三抓”。

一抓重点。语文、数学、英语是职教高考文化课的重要科目，本系列图书重点抓住这些科目考试中分数占比高、答题技巧多、突破较容易的题型或知识点进行专项训练，旨在提升学生复习的“投入产出率”。

二抓方法。部分中职生认为只要多做题就能出成绩，最终陷入“题海”不能自拔。本系列图书紧紧抓住“积累、讲、练”三结合的方法，帮助学生规避盲目“刷题”的误区，真正实现“夯实基础—掌握技巧—提升能力”的跃进。

三抓计划。针对广大中职生备考时间短、学习任务重的特点，我们经过精心计划、周密安排，按照专题组织内容、设计容量。学生只须按照一天一个专题的进度进行学习，即可轻松达到较为理想的复习效果。

岁月如梭催人老，一寸光阴不可轻。勤奋进取的中职学子们，快来加入我们的“职教高考训练营”吧！

华腾新思职教高考研究中心

2024 年 7 月

目 录

Contents

第1天

利用函数的基本概念和性质解题的问题

考点一

求函数的解析式

例1 已知 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=ax^2-2x$，且 $f(4)=8$.

(1)求实数 a 的值；

(2)求该函数的解析式.

审题指导

(1)直接代入数值可求 a 的值；

(2)设 $x<0$，则 $-x>0$，再代入当 $x\geqslant 0$ 时函数的解析式可求得 $x<0$ 时的解析式.

试题详解

(1)由题干可知，因为 $f(4)=8$，所以 $16a-8=8$，即 $a=1$.

(2)设 $x<0$，则 $-x>0$，$f(-x)=x^2+2x$.

因为 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，所以 $-f(x)=f(-x)$，即

$$f(x)=-f(-x)=-x^2-2x.$$

综上，$f(x)=\begin{cases}-x^2-2x, x<0,\\ x^2-2x, x\geqslant 0.\end{cases}$

技巧归纳

已知 $x>0$(或 $x<0$)时的解析式，求 $x<0$(或 $x>0$)时的解析式时，往往设 x 在需求解析

式的区间里，则$-x$在已知解析式的区间里，将$-x$代入已知解析式得到$f(-x)$，最后通过奇偶性解出$f(x)$.

专题练习 1

1.设$f(x)$是$\mathbf{R}$上的奇函数，且当$x\in[0,+\infty)$时，$f(x)=x(1+x)$，求$f(x)$在$\mathbf{R}$上的解析式.

2.已知幂函数$y=f(x)$的图像经过点$(3,9)$，对于偶函数$y=g(x)(x\in\mathbf{R})$，当$x\geqslant0$时，$g(x)=f(x)-2x$.

(1)求函数$y=f(x)$的解析式；

(2)求当$x<0$时，函数$y=g(x)$的解析式.

3.定义域为$\mathbf{R}$的奇函数满足$f(x)=x^2-2x(x>0)$.

(1)求$f(x)$的解析式；

(2)求不等式$f(x)\geqslant0$的解集.

考点二

函数的性质

例 2 已知函数$f(x)=\begin{cases}x^2+x, x\geqslant0,\\2-x, x<0.\end{cases}$

(1)若 $f(a)=6$,求实数 a 的值;

(2)求函数 $f(x)$ 在区间$[-2,1]$上的最大值.

审题指导

(1)结合所给范围,解相应方程可得答案;

(2)分别求函数在 $x\in[0,1]$及$[-2,0)$时的最大值,两者中的较大者即为答案.

试题详解

(1)若 $a\geqslant 0$,则 $f(a)=6\Rightarrow a^2+a-6=0\Rightarrow a=2$;

若 $a<0$,则 $f(a)=6\Rightarrow 2-a=6\Rightarrow a=-4$.

综上,$a=2$ 或 $a=-4$.

(2)当 $x\in[0,1]$时,$f(x)=x^2+x=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$,

$f(x)$在$[0,1]$上单调递增,则此时 $f(x)_{\max}=f(1)=2$;

当 $x\in[-2,0)$时,$f(x)=2-x$ 在$[-2,0)$上单调递减,则此时 $f(x)_{\max}=f(-2)=4$.

综上,函数 $f(x)$ 在区间$[-2,1]$上的最大值为 4.

技巧归纳

函数的性质是职教高考命题的主线索,无论考查何种函数都与函数的性质相关.解题时要注意函数的单调性是在定义域内的某个区间上的性质,是函数的局部性质,解题时一般先考察函数的定义域.

专题练习 2

1.已知函数 $f(x)=\frac{k}{x}$,且 $f(2)=1$.

(1)求实数 k 的值;

(2)证明函数 $f(x)$ 在$(0,+\infty)$上是减函数.

2. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}+ax$ 为偶函数.

(1)求 a 的值；

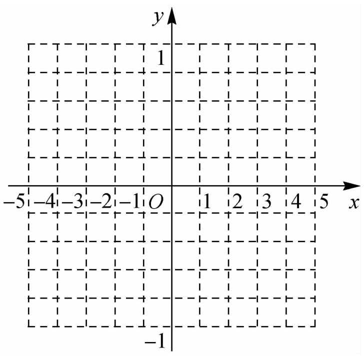
(2)判断 $f(x)$在$[0,+\infty)$上的单调性，并根据定义证明.

3. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)=\dfrac{ax-b}{x^2+1}$的图像过原点，且 $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{2}{5}$.

(1)求实数 a,b 的值；

(2)判断 $f(x)$在$(-1,1)$上的单调性并用定义证明；

(3)画出 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上的图像.



4. 已知定义域为$[0,1]$的函数 $f(x)$同时满足：①对于任意的 $x\in[0,1]$，总有 $f(x)\geqslant 0$；②$f(1)=1$；③若 $x_1\geqslant 0$，$x_2\geqslant 0$，$x_1+x_2\leqslant 1$，则有 $f(x_1+x_2)\geqslant f(x_1)+f(x_2)$.

(1)求 $f(0)$的值；

(2)求 $f(x)$的最大值.

考点三 指对幂函数的性质的应用

例3 已知函数 $f(x)=\log_a(1-x)+\log_a(x+3)(0<a<1)$.

(1)求函数 $f(x)$ 的定义域;

(2)求方程 $f(x)=0$ 的解;

(3)若函数 $f(x)$ 的最小值为 -4,求 a 的值.

审题指导

(1)直接根据对数函数的真数大于0可求得;

(2)根据对数的运算公式可求解,注意所求的结果是否在定义域内;

(3)结合二次函数的性质求解.

试题详解

(1)要使函数有意义,则有 $\begin{cases}1-x>0,\\x+3>0,\end{cases}$

解得 $-3<x<1$.

所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-3,1)$.

(2)函数可化为 $f(x)=\log_a[(1-x)(x+3)]=\log_a(-x^2-2x+3)$,

由 $f(x)=0$,得 $-x^2-2x+3=1$,

即 $x^2+2x-2=0$,$x=-1\pm\sqrt{3}$.

因为 $-1\pm\sqrt{3}\in(-3,1)$,

所以方程 $f(x)=0$ 的解为 $x=-1\pm\sqrt{3}$.

(3)函数可化为 $f(x)=\log_a(-x^2-2x+3)=\log_a[-(x+1)^2+4]$,

因为 $-3<x<1$,所以 $0<-(x+1)^2+4\leqslant 4$.

因为 $0<a<1$,所以 $\log_a[-(x+1)^2+4]\geqslant\log_a 4$,

即 $f(x)_{\min}=\log_a 4$.

由 $\log_a 4=-4$,得 $a^{-4}=4$,所以 $a=4^{-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

技巧归纳

(1)求指对幂函数的定义域时,要注意函数存在的条件.

(2)求解对数方程时,要灵活运用对数公式和运算法则.

(3)对数函数中,$0<a<1$,则在定义域内为单调递减函数,若函数有最小值,真数取最大值;反之,真数取最小值.

专题练习 3

1. 已知函数 $f(x)=\log_a(a^x-1)(a>0$,且 $a\neq1)$.

(1)求 $f(x)$的定义域;

(2)讨论函数 $f(x)$的增减性.

2. 已知函数 $f(x)=\log_2(1+x)$,$g(x)=\log_2(1-x)$.

(1)判断函数 $h(x)=f(x)-g(x)$的奇偶性,并说明理由;

(2)求方程 $f(x)=g(x)+1$ 的解.

3. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{2^x+1}-a$ 是奇函数.

(1)求 a 的值;

(2)求 $f(x)$在$[-1,3]$上的值域.

4. 已知函数 $f(x)=a^{x-2}(a>0$ 且 $a\neq1)$的图像恒过定点 A,且点 A 在函数 $g(x)=\log_a x$ $(a>0$ 且 $a\neq1)$的图像上.

(1)求函数 $g(x)$的解析式;

(2)若存在互不相等的实数 m,n,使$|g(m)|=|g(n)|$,求 mn 的值.

第2天

函数与不等式相结合的问题

考点一

根据函数性质解不等式

例 1 已知函数 $f(x)=\log_2^2 x-\log_2 x$.

(1)解不等式 $f(x)\geqslant 2$；

(2)求函数 $f(x)$的单调递增区间.

审题指导

(1)解不等式问题中可将$\log_2 x$ 看作整体，然后解关于$\log_2 x$ 的一元二次不等式，求出$\log_2 x$ 的范围后，再求 x 的取值范围；

(2)复合函数的单调性问题：同增异减，令 $t=\log_2 x$，在$(0,+\infty)$上单调递增，所以求函数 $f(x)$的单调递增区间时，只需求 $y=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$的单调递增区间.

试题详解

(1)由 $f(x)\geqslant 2$ 可得$\log_2^2 x-\log_2 x-2\geqslant 0$，

即$(\log_2 x-2)(\log_2 x+1)\geqslant 0$，

所以$\log_2 x\geqslant 2$ 或$\log_2 x\leqslant -1$，

解得 $x\geqslant 4$ 或 $0<x\leqslant\frac{1}{2}$，

因此，原不等式的解集为$\left(0,\frac{1}{2}\right]\cup[4,+\infty)$.

(2)函数 $f(x)=\log_2^2 x-\log_2 x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,

又 $f(x)=\log_2^2 x-\log_2 x=\left(\log_2 x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$,

令 $t=\log_2 x$,则 $y=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$,

因为 $t=\log_2 x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,若求原函数的单调递增区间,

则须满足 $y=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$ 单调递增,

所以 $t\geqslant\frac{1}{2}$,即 $\log_2 x\geqslant\frac{1}{2}$,得 $x\geqslant\sqrt{2}$,

可得函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[\sqrt{2},+\infty)$.

技巧归纳

与指数、对数函数相关的综合题是近几年常考题型,它可以与解不等式、求函数值、求解析式、证明等式成立等结合,求解复合函数的单调性时可用换元法,再利用结论"同增异减"判断.

例 2 已知函数 $f(x)=\lg(2+x)-\lg(2-x)$.

(1)判定函数 $f(x)$ 的奇偶性,并加以证明;

(2)判定 $f(x)$ 的单调性(不用证明),并求不等式 $f(1-x)+f(3-2x)<0$ 的解集.

审题指导

(1)先求出 $f(x)$ 的定义域并判断定义域是否关于原点对称,然后判断 $f(x)$,$f(-x)$ 之间的关系即可;

(2)将 $f(x)$ 的解析式变形,结合复合函数单调性可知 $f(x)$ 在定义域上单调递增,而由(1)可知 $f(x)$ 的定义域为 $(-2,2)$,且 $f(x)$ 是奇函数,故不等式 $f(1-x)+f(3-2x)<0$ 等价于不等式组 $\begin{cases}-2<1-x<2,\\-2<3-2x<2,\\1-x<2x-3,\end{cases}$ 解不等式组即可.

试题详解

(1) $f(x)$ 是奇函数,理由如下:

由题意 $\begin{cases}2+x>0,\\2-x>0,\end{cases}$ 解得 $-2<x<2$,即 $f(x)=\lg(2+x)-\lg(2-x)=\lg\frac{2+x}{2-x}$ 的定义域关

于原点对称，且 $f(x)+f(-x)=\lg\frac{2+x}{2-x}+\lg\frac{2-x}{2+x}=\lg\left(\frac{2+x}{2-x}\cdot\frac{2-x}{2+x}\right)=\lg 1=0$，即 $f(x)=-f(-x)$，所以 $f(x)$ 是奇函数.

(2)由于 $f(x)=\lg\frac{2+x}{2-x}=\lg\left(\frac{4}{2-x}-1\right)$，所以由复合函数单调性可知 $f(x)$ 在定义域上单调递增. 由(1)可知 $f(x)$ 的定义域为 $(-2,2)$，且 $f(x)$ 是奇函数，

所以 $f(1-x)+f(3-2x)<0\Leftrightarrow f(1-x)<-f(3-2x)=f(2x-3)$.

因为 $f(x)$ 在定义域上单调递增，

所以有 $\begin{cases}-2<1-x<2,\\-2<3-2x<2,\\1-x<2x-3,\end{cases}$ 解不等式组得 $\begin{cases}-1<x<3,\\\frac{1}{2}<x<\frac{5}{2},\\x>\frac{4}{3},\end{cases}$ 即 $\frac{4}{3}<x<\frac{5}{2}$，

所以不等式 $f(1-x)+f(3-2x)<0$ 的解集为 $\left(\frac{4}{3},\frac{5}{2}\right)$.

技巧归纳

(1)一定要确立定义域优先的原则，定义域关于原点对称是函数是(奇)偶函数的必要不充分条件；

(2)解抽象不等式，首先将原不等式化为 $f(m)>f(n)$ 或 $f(m)<f(n)$（其中 m,n 各代表不同的代数式）的形式，其次根据函数的单调性，将不等式转化为关于 x 的不等式(组)进行求解，注意考虑定义域.

专题练习 1

1. 已知函数 $f(x)=\log_a x$ $(a>0$，且 $a\neq1)$ 的图像过点 $(9,2)$.

(1)求函数 $f(x)$ 的解析式；

(2)解不等式 $f(3x-1)>f(-x+5)$.

2. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-5, x\geqslant 0,\\ x+6, x<0.\end{cases}$

(1)若 $f(m)=4$，求 m 的值；

(2)$f(-a^2-1)>1$，求 a 的取值集合.

3. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $\left[\dfrac{1}{2}, a\right]$ 上的最大值与最小值的和是 $\dfrac{9}{4}$.

(1)求实数 a 的值；

(2)解关于 x 的不等式 $a^{x^2-2x}<a^{12-6x}$.

4. 若 $f(x)$ 是定义在 $(0,+\infty)$ 上的增函数，且对一切 $x, y>0$，满足 $f\left(\dfrac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$.

(1)求 $f(1)$ 的值；

(2)若 $f(6)=1$，解不等式 $f(x+3)-f\left(\dfrac{1}{3}\right)<2$.

5. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $[-3,3]$ 上的奇函数，当 $0<x\leqslant 3$ 时，$f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+x$.

(1)求函数 $f(x)$ 的解析式；

(2)若 $f(a+1)+f(2a-1)>0$，求实数 a 的取值范围.

考点二
恒成立问题

例 3　已知函数 $f(x)=\frac{4^x}{4^x+2}+a$，且 $f(\lg 2)+f(\lg 5)=3$.

(1)求 a 的值；

(2)当 $x\in[-1,1]$时，$f(x)\geqslant 4^x+m$ 恒成立，求 m 的取值范围.

审题指导

(1)根据 $f(x)+f(1-x)=1+2a$，即可由对数运算代入求解；

(2)根据一元二次不等式与二次函数的性质即可求解.

试题详解

(1)因为 $f(x)=\frac{4^x}{4^x+2}+a$，

所以 $f(x)+f(1-x)=\frac{4^x}{4^x+2}+a+\frac{4^{1-x}}{4^{1-x}+2}+a=\frac{4^x}{4^x+2}+\frac{4}{4+2\times 4^x}+2a=1+2a$.

因为 $\lg 2+\lg 5=1$，所以 $f(\lg 2)+f(\lg 5)=1+2a=3$，

则 $a=1$.

(2)由(1)可知，$f(x)\geqslant 4^x+m$ 等价于 $(4^x)^2+m\cdot 4^x+2m-2\leqslant 0$.

令 $t=4^x$，则 $t\in\left[\frac{1}{4},4\right]$，

原不等式等价于 $t^2+mt+2m-2\leqslant 0$ 在$\left[\frac{1}{4},4\right]$上恒成立，

则$\begin{cases}\frac{1}{16}+\frac{1}{4}m+2m-2\leqslant 0,\\ 16+4m+2m-2\leqslant 0,\end{cases}$解得 $m\leqslant -\frac{7}{3}$，

故 m 的取值范围为$\left(-\infty,-\frac{7}{3}\right]$.

技巧归纳

恒成立问题一般和二次函数密切相关，要注意数形结合，应用二次函数的图像和性质.

专题练习 2

1.(1)若函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-2x+a)$的定义域为 $\mathbf{R}$,求实数 a 的取值范围;

(2)若函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}[(a+3)x^2+ax+1]$的值域为 $\mathbf{R}$,求实数 a 的取值范围.

2.已知指数函数 $f(x)=a^x$.

(1)若 $f(x)$在$[-1,3]$上的最大值为 8,求 a 的值;

(2)当 $a>1$ 时,若 $f(x)\leqslant 30-x$ 对 $x\in[-1,3]$恒成立,求 a 的取值范围.

3.已知函数 $f(x)=2x+b$,$g(x)=x^2+bx+c$,若 $f(x)\leqslant g(x)$恒成立.

(1)求证:$c\geqslant b$;

(2)若 $b>0$,且 $g(b)-g(c)\geqslant M(b^2-c^2)$恒成立,求 M 的取值范围.

4.若二次函数 $f(x)=x^2+bx+c$ 满足 $f(-2)=7$,且 $f(1-x)+x$ 是偶函数.

(1)求 $f(x)$的解析式;

(2)若在区间$[-1,1]$上,函数 $y=f(x)$的图像恒在直线 $y=2x+m$ 的上方,求 m 的取值范围.

职教高考数学训练营:20 天攻克解答题

参考答案及解析

目　　录

第 1 天　利用函数的基本概念和性质解题的问题

专题练习 1

1. **解**：因为 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，所以 $f(-0)=-f(0)$，所以 $f(0)=0$. 设 $x<0$，则 $-x>0$，所以 $f(-x)=-x(1-x)$.

又因为 $f(x)$ 是奇函数，

所以 $f(-x)=-f(x)=-x(1-x)$.

所以 $f(x)=x(1-x)$.

所以 $f(x)=\begin{cases}x(1-x), x<0,\\ x(1+x), x\geqslant 0.\end{cases}$

2. **解**：(1)设 $y=f(x)=x^{\alpha}$，

代入点$(3,9)$，得$9=3^{\alpha}$，解得 $\alpha=2$，

所以 $f(x)=x^2$.

(2)因为 $f(x)=x^2$，

所以当 $x\geqslant 0$ 时，$g(x)=x^2-2x$.

设 $x<0$，则 $-x>0$，

又因为 $y=g(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，

所以 $g(x)=g(-x)=(-x)^2-2(-x)=x^2+2x$，

即当 $x<0$ 时，$g(x)=x^2+2x$.

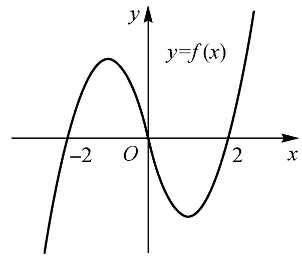
3. **解**：(1)当 $x<0$ 时，$-x>0$，故 $f(-x)=(-x)^2-2(-x)=x^2+2x$，

由于 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(x)=-f(-x)=-x^2-2x$，

又 $f(0)=0$，

故 $f(x)=\begin{cases}x^2-2x, x>0,\\ -x^2-2x, x\leqslant 0.\end{cases}$

(2)作出 $f(x)$ 的图像如图：



由图像可知，当 $x\geqslant 2$ 或 $-2\leqslant x\leqslant 0$ 时，$f(x)\geqslant 0$，

故 $f(x)\geqslant 0$ 的解集为$\{x\mid x\geqslant 2$ 或 $-2\leqslant x\leqslant 0\}$.

专题练习 2

1. (1)**解**：$f(2)=\dfrac{k}{2}=1$，故 $k=2$.

(2)**证明**：任取 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ 且 $x_1<x_2$，

则 $f(x_1)-f(x_2)=\dfrac{2}{x_1}-\dfrac{2}{x_2}=\dfrac{2(x_2-x_1)}{x_1x_2}$，

因为 $x_1x_2>0$，$x_2-x_1>0$，故 $f(x_1)-f(x_2)>0$，故函数 $f(x)$ 在$(0,+\infty)$上是减函数.

2. **解**：(1)由题意可得 $f(x)=f(-x)$，

则$\dfrac{1}{x^2+1}+ax=\dfrac{1}{x^2+1}-ax$，

解得 $a=0$.

(2)$f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$在$[0,+\infty)$上单调递减.

证明：任取 $x_1,x_2\in[0,+\infty)$ 且 $x_1<x_2$，则 $x_2^2-x_1^2>0$，

$f(x_1)-f(x_2)=\dfrac{1}{x_1^2+1}-\dfrac{1}{x_2^2+1}=\dfrac{x_2^2-x_1^2}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}>0$，

即 $f(x_1)>f(x_2)$，

故 $f(x)$在$[0,+\infty)$上单调递减.

3. **解**：(1)定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)=\dfrac{ax-b}{x^2+1}$，

则 $f(0)=0$，即 $-b=0$，解得 $b=0$，又 $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{2}{5}$，即 $\dfrac{-\frac{1}{2}a}{\frac{1}{4}+1}=-\frac{2}{5}$，解得 $a=1$，$\therefore f(x)=\frac{x}{x^2+1}$，经检验符合题意.

(2)函数 $f(x)$在$(-1,1)$上单调递增.

证明如下：任取 $x_1,x_2\in(-1,1)$且 $x_1<x_2$，

则 $f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1}{x_1^2+1}-\frac{x_2}{x_2^2+1}$

$=\frac{x_1x_2^2+x_1-x_1^2x_2-x_2}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}$

$=\frac{x_1x_2(x_2-x_1)+(x_1-x_2)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}$

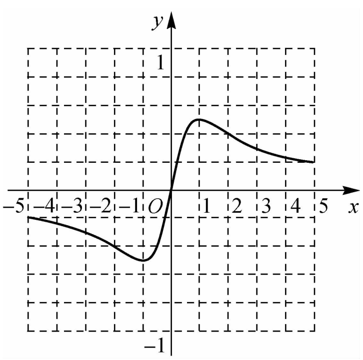
$=\frac{(x_1-x_2)(1-x_1x_2)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}$.

因为$-1<x_1<x_2<1$，则 $x_1-x_2<0$，$-1<x_1x_2<1$，

故 $f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$，

因此函数 $f(x)$在$(-1,1)$上单调递增.

(3)



4. **解**：(1)对于条件③，令 $x_1=x_2=0$，得$f(0)\leqslant 0$，又由条件①知 $f(0)\geqslant 0$，故 $f(0)=0$.

(2)任取 $x_1,x_2\in[0,1]$且 $x_1<x_2$，则 $x_2-x_1\in(0,1]$，

所以 $f(x_2)-f(x_1)=f[(x_2-x_1)+x_1]-f(x_1)\geqslant f(x_2-x_1)+f(x_1)-f(x_1)=f(x_2-x_1)\geqslant 0$，即 $f(x_2)\geqslant f(x_1)$，

故 $f(x)$在$[0,1]$上递增，从而 $f(x)$的最大值是 $f(1)=1$.

专题练习 3

1. **解**：(1)令 $a^x-1>0$，即 $a^x>1$.

当 $a>1$ 时，$a^x>1$ 的解集是$(0,+\infty)$；

当 $0<a<1$ 时，$a^x>1$ 的解集是$(-\infty,0)$.

所以当 $a>1$ 时，$f(x)$的定义域是$(0,+\infty)$；

当 $0<a<1$ 时，$f(x)$的定义域是$(-\infty,0)$.

(2)当 $a>1$ 时，$y=\log_a u$ 是增函数，$u=a^x-1$ 是增函数，从而函数 $f(x)=\log_a(a^x-1)$在$(0,+\infty)$上是增函数；

同理可得：当 $0<a<1$ 时，函数 $f(x)$在$(-\infty,0)$上也是增函数.

2. **解**：(1)$h(x)=f(x)-g(x)=\log_2(1+x)-\log_2(1-x)=\log_2\frac{1+x}{1-x}$，

$h(-x)=f(-x)-g(-x)=\log_2(1-x)-\log_2(1+x)=\log_2\frac{1-x}{1+x}=-\log_2\frac{1+x}{1-x}=-h(x)$，

故函数 $h(x)=f(x)-g(x)$为奇函数.

(2)因为 $f(x)=g(x)+1$，

所以$\log_2(1+x)=\log_2(1-x)+1$，

即 $1+x=2(1-x)$，解得 $x=\frac{1}{3}$.

当 $x=\frac{1}{3}$ 时，函数有意义，故方程的解为 $x=\frac{1}{3}$.

3. **解**：(1)因为 $f(x)=\frac{1}{2^x+1}-a$，

所以 $f(-x)=\frac{1}{2^{-x}+1}-a=\frac{2^x}{2^x+1}-a$.

因为 $f(x)$是奇函数，

所以 $f(-x)=-f(x)$，

即$\frac{2^x}{2^x+1}-a=-\left(\frac{1}{2^x+1}-a\right)$，

即 $2a=\frac{1}{2^x+1}+\frac{2^x}{2^x+1}=1$，

解得 $a=\frac{1}{2}$.

(2)由(1)可知 $f(x)=\frac{1}{2^x+1}-\frac{1}{2}$，

易知 $t=2^x+1$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增且 $t=2^x+1>1$，$y=\frac{1}{t}-\frac{1}{2}$在$(1,+\infty)$上单调递减，

所以 $f(x)$是 $\mathbf{R}$ 上的减函数.

因为 $f(-1)=\frac{1}{6}$，$f(3)=-\frac{7}{18}$，

所以 $f(x)$ 在 $[-1,3]$ 上的值域为 $\left[-\frac{7}{18},\frac{1}{6}\right]$.

4. **解**：(1)令 $x-2=0$，得 $x=2$，

所以函数 $f(x)$的图像恒过定点 $A(2,1)$，

所以 $g(2)=\log_a 2=1$，解得 $a=2$，

所以 $g(x)=\log_2 x$.

(2)由 $|g(m)|=|g(n)|$，得 $|\log_2 m|=|\log_2 n|$，

所以$\log_2 m=\log_2 n$ 或$\log_2 m=-\log_2 n$.

当$\log_2 m=\log_2 n$ 时，由 $y=\log_2 x$ 的单调性知，$m=n$，不符合题意；

当 $\log_2 m=-\log_2 n$ 时，$\log_2 m+\log_2 n=\log_2(mn)=0$，

所以 $mn=1$.

第 2 天　函数与不等式相结合的问题

专题练习 1

1. **解**：(1)因为 $\log_a 9=2$，所以 $a=3$，即 $f(x)=\log_3 x$.

(2)因为 $f(x)$ 单调递增，所以原不等式$\Leftrightarrow$
$\begin{cases}3x-1>0,\\-x+5>0,\\3x-1>-x+5,\end{cases}$ 解得$\frac{3}{2}<x<5$，

即不等式的解集是$\left(\frac{3}{2},5\right)$.

2. **解**：(1)当 $m\geqslant 0$ 时，$f(m)=m^2-5=4$，

解得 $m=3$ 或 $m=-3$(舍去)；

当 $m<0$ 时，$f(m)=m+6=4$，解得$m=-2$，

所以 m 的值为 3 或-2.

(2)对任意实数 $a\in\mathbf{R}$，$-a^2-1<0$，

所以 $f(-a^2-1)=-a^2-1+6>1$，

解得$-2<a<2$，

所以 a 的取值集合为$\{a|-2<a<2\}$.

3. **解**：(1)因为函数 $f(x)=\frac{1}{x}$在区间$\left[\frac{1}{2},a\right]$上单调递减，所以 $f\left(\frac{1}{2}\right)+f(a)=\frac{9}{4}$，即 $2+\frac{1}{a}=\frac{9}{4}$，解得 $a=4$.

(2)因为 $a=4$，所以 $a^{x^2-2x}<a^{12-6x}$，即 $x^2-2x<12-6x$，解得$-6<x<2$.

4. **解**：(1)在 $f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$ 中，令 $x=y=1$，则有 $f(1)=f(1)-f(1)$，

故 $f(1)=0$.

(2)因为 $f(6)=1$，所以 $f(x+3)-f\left(\frac{1}{3}\right)<2=f(6)+f(6)$. 所以 $f(3x+9)-f(6)<f(6)$，即 $f\left(\frac{x+3}{2}\right)<f(6)$.

因为 $f(x)$是$(0,+\infty)$上的增函数，

所以$\begin{cases}\frac{x+3}{2}>0,\\\frac{x+3}{2}<6,\end{cases}$ 解得$-3<x<9$，

即不等式的解集为$(-3,9)$.

5.**解**:(1)因为 $f(x)$ 为奇函数,所以 $f(0)=0$.

设 $-3\leqslant x<0$,则 $0<-x\leqslant 3$,$f(-x)=\frac{1}{2}(-x)^2+(-x)=\frac{1}{2}x^2-x$.

由 $f(x)$ 为奇函数有 $f(x)=-f(-x)=x-\frac{x^2}{2}$,

又当 $x=0$ 时,$f(x)=\frac{x^2}{2}+x$ 满足 $f(0)=0$,

故 $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{2}+x, & 0\leqslant x\leqslant 3,\\ x-\frac{x^2}{2}, & -3\leqslant x<0.\end{cases}$

(2)当 $0\leqslant x\leqslant 3$ 时,$f(x)=\frac{x^2}{2}+x=\frac{(x+1)^2}{2}-\frac{1}{2}$单调递增,

由奇函数的性质可知 $f(x)$ 是定义在$[-3,3]$上的增函数.

又因为 $f(a+1)+f(2a-1)>0$,

所以 $f(a+1)>-f(2a-1)=f(1-2a)$,

故有$\begin{cases}-3\leqslant a+1\leqslant 3,\\ -3\leqslant 1-2a\leqslant 3,\\ a+1>1-2a,\end{cases}$

即$\begin{cases}-4\leqslant a\leqslant 2,\\ -1\leqslant a\leqslant 2,\\ a>0,\end{cases}$

故 $0<a\leqslant 2$.

专题练习 2

1.**解**:(1)依题意,对一切实数 x,都有 $x^2-2x+a>0$ 恒成立,

则 $\Delta=4-4a<0$,解得 $a>1$.

故实数 a 的取值范围为$\{a|a>1\}$.

(2)依题意,$(a+3)x^2+ax+1$ 能取到所有正实数.

当 $a=-3$ 时,真数为$-3x+1$,能取到所有正实数,故成立;

当 $a\neq-3$ 时,$\begin{cases}a+3>0,\\ \Delta=a^2-4(a+3)\geqslant 0,\end{cases}$

解得 $a\geqslant 6$ 或$-3<a\leqslant-2$,

综上知,实数 a 的取值范围为$\{a|a\geqslant 6$ 或$-3\leqslant a\leqslant-2\}$.

2.**解**:(1)当 $a>1$ 时,$f(x)=a^x$ 在$[-1,3]$上单调递增,可得 $f(x)_{\max}=f(3)=a^3=8$,解得 $a=2$;

当 $0<a<1$ 时,$f(x)=a^x$ 在$[-1,3]$上单调递减,可得 $f(x)_{\max}=f(-1)=a^{-1}=8$,

解得 $a=\frac{1}{8}$.

综上可得,实数 a 的值为$\frac{1}{8}$或 2.

(2)方法一:函数 $g(x)=30-x$ 在$[-1,3]$上单调递减,

当 $a>1$ 时,$f(x)=a^x$ 在$[-1,3]$上单调递增,且 $g(-1)>f(-1)$,

所以 $f(3)\leqslant g(3)$,即 $a^3\leqslant 27$,

又因为 $a>1$,所以 $1<a\leqslant 3$,

所以实数 a 的取值范围是$(1,3]$.

方法二:由题意得,不等式 $f(x)\leqslant 30-x$ 对 $x\in[-1,3]$恒成立,

即 $a^x+x\leqslant 30$ 对 $x\in[-1,3]$恒成立.

令 $g(x)=a^x+x$,$x\in[-1,3]$,

因为 $a>1$,所以 $g(x)$ 为增函数,所以 $g(x)_{\max}=g(3)=a^3+3$,所以 $a^3+3\leqslant 30$,

又因为 $a>1$,解得 $1<a\leqslant 3$,

所以实数 a 的取值范围是$(1,3]$.

3.(1)**证明**:因为 $f(x)\leqslant g(x)$ 恒成立,即 x^2+

$(b-2)x+c-b\geqslant 0$ 恒成立,

所以 $\Delta=(b-2)^2-4(c-b)\leqslant 0$,即 $b^2+4-4c\leqslant 0$,所以 $c\geqslant\frac{b^2+4}{4}$,

则 $c-b\geqslant\frac{b^2+4}{4}-b=\frac{(b-2)^2}{4}\geqslant 0$,所以$c\geqslant b$.

(2)**解**:$g(b)-g(c)=2b^2-c^2-bc$,又 $0<b\leqslant c$,

当 $b=c$ 时,不等式恒成立;

当 $0<b<c$ 时,$b^2-c^2<0$,

所以 $M\geqslant\frac{2b^2-c^2-bc}{b^2-c^2}=\frac{(2b+c)(b-c)}{(b+c)(b-c)}=\frac{2b+c}{b+c}=1+\frac{b}{b+c}=1+\frac{1}{1+\frac{c}{b}}$ 恒成立,

令 $t=\frac{c}{b}$,则 $t>1$,则 $M\geqslant 1+\frac{1}{t+1}$ 在 $t\in(1,+\infty)$ 上恒成立,

又 $1<1+\frac{1}{t+1}<\frac{3}{2}$,所以 $M\geqslant\frac{3}{2}$.

综上,M 的取值范围为$\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$.

4.**解**:(1)因为 $f(1-x)+x=(1-x)^2+b(1-x)+c+x=x^2-(1+b)x+1+b+c$ 为偶函数,

所以 $1+b=0,b=-1$.

$f(-2)=(-2)^2-(-2)+c=7$,所以 $c=1$.

所以 $f(x)$的解析式为 $f(x)=x^2-x+1$.

(2)在区间$[-1,1]$上,函数 $y=f(x)$的图像恒在直线 $y=2x+m$ 的上方,

即 $f(x)-(2x+m)=x^2-3x+1-m=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}-m>0$ 在区间$[-1,1]$上恒成立,

又 $y=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}-m$ 在区间$[-1,1]$上单调递减,

所以只要 $\left(1-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}-m>0$,解得 $m<-1$.

故 m 的取值范围为$(-\infty,-1)$.

第 3 天 函数的实际应用问题

专题练习 1

1.**解**:(1)设 $y=ax+b$,

由题知$\begin{cases}100=12a+b,\\80=14a+b,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a=-10,\\b=220,\end{cases}$

所以 $y=-10x+220$.

(2)设商家每天的利润为 z 元,

则 $z=y(x-10)$

$=(-10x+220)(x-10)$

$=10(-x^2+32x-220)$,

当 $x=-\frac{32}{2\times(-1)}=16$ 时,$z_{\max}=360$,

所以当售价为 16 元/件时,商家每天的利润最大,为 360 元.

2.**解**:(1)设 y 与 x 的函数关系式为 $y=kx+b$,

将(70,100),(80,80)代入上式得$\begin{cases}70k+b=100,\\80k+b=80,\end{cases}$

解得$\begin{cases}k=-2,\\b=240,\end{cases}$

所以 y 与 x 的函数关系式为 $y=-2x+240$.

(2) $W=(x-50)y=(x-50)(-2x+240)$

$=-2x^2+340x-12\ 000$

$=-2(x-85)^2+2\ 450$,