华腾新思

甘肃省职教高考

数学复习攻略

主编　孙建平

立足新考情　考点全覆盖　强化跟踪练

上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

赠册　同步跟踪训练　参考答案及解析

甘肃省职教高考数学复习攻略

主编　孙建平

上海交通大学出版社

巍巍交大　百年书香
www.jiaodapress.com.cn
bookinfo@sjtu.edu.cn

策划编辑　李家隆
责任编辑　胡思佳
封面设计　黄燕美

甘肃省职教高考

数学复习攻略

扫描二维码
关注上海交通大学出版社
官方微信

ISBN 978-7-313-31313-3

定价：78.00元

甘肃省职教高考

数学复习攻略

主　编　孙建平

副主编　刘多兵　张振华

立足新考情　考点全覆盖　强化跟踪练

上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

赠册　同步跟踪训练　参考答案及解析

内容提要

本书共十一章，内容包括集合和简易逻辑、不等式、函数、指数函数与对数函数、三角函数、数列、平面向量、直线与圆的方程、简单几何体、立体几何、概率与统计初步. 每章根据考纲的要求详述相关知识点. "复习指南"总结了本章的考试内容与要求. "命题探究"对命题趋势进行了解读与预测. "知识结构"对本章重要知识点进行了归纳. "知识清单"对每一个知识点进行了细致的讲解. "典例精析"对典型例题进行讲解，给出详细的解题思路，可帮助考生找到解题方法，规避解题误区. "巩固训练"针对书中考点设置了练习题，以帮助考生巩固所学知识，提高答题能力.

本书既可以作为参加甘肃省职教高考的考生的复习指导用书，也可以作为相关学校学生的学习资料.

图书在版编目(CIP)数据

甘肃省职教高考数学复习攻略 /孙建平主编.
上海：上海交通大学出版社，2024.8. -- ISBN 978-7-313-31313-3

Ⅰ. G634.603

中国国家版本馆 CIP 数据核字第 2024AX6675 号

甘肃省职教高考数学复习攻略
GANSU SHENG ZHIJIAO GAOKAO SHUXUE FUXI GONGLÜE

主　　编：孙建平
出版发行：上海交通大学出版社　　地　　址：上海市番禺路 951 号
邮政编码：200030　　电　　话：021-64071208
印　　制：三河市骏杰印刷有限公司　　经　　销：全国新华书店
开　　本：880 mm×1 230 mm　1/16　　印　　张：11.75
字　　数：345 千字
版　　次：2024 年 8 月第 1 版　　印　　次：2024 年 8 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 978-7-313-31313-3
定　　价：78.00 元

前言

PREFACE

经过多年的摸索与实践,甘肃省职教高考越来越规范有序. 从考试内容和考试形式上来看,参加甘肃省职教高考的考生面临着很大的挑战,多数考生为如何能在短期内熟悉考试内容、把握考试重难点、弥补“短板”而苦恼,亟须通过高效的学习来快速提升应试能力,从而在考试中脱颖而出.

为了帮助广大考生系统、全面、准确、高效地复习备考,我们特组织省内具有丰富教研经验的骨干教师及教研员,以课程标准、教学大纲及最新考试说明为依据,深入研究近几年甘肃省职教高考的命题情况,紧密结合考生的学习特点,精心编写了本书.

数学是甘肃省职教高考的必考科目之一,知识点较多、难度较大,也是考生备考的重点和难点所在. 本书在编写时紧扣考试大纲,紧密结合考试真题,内容充实,结构严谨,要点突出,指导性强,是广大考生进行考试复习和储备知识的重要参考资料.

本书具有以下鲜明特色.

1. 编者阵容强大,熟知考情学情

本书编写人员均系甘肃省中职学校的骨干教师或教研员. 他们始终工作在教学第一线,对甘肃省职教高考的命题趋势有深入的研究,熟知考生的复习状况,因此本书具有极强的针对性.

2. 立足考试大纲,全面服务考生

本书是为参加甘肃省职教高考的考生量身定做的复习用书. 知识点的选取、试题难度等设计均参照了历年考试真题和最新考试大纲,体现出考试特色,做到了既能把握考试的命题特点,又能体现其发展趋势.

3. 编排合理,设计科学

本书共十一章,内容包括集合和简易逻辑、不等式、函数、指数函数与对数函数、三角函数、数列、平面向量、直线与圆的方程、简单几何体、立体几何、概率与统计初步. 每章根据考试大纲的要求详述相关知识点.

“复习指南”总结了本章的考试内容与要求.

“命题探究”对命题趋势进行了解读与预测.

“知识结构”对本章重要知识点进行了归纳.

“知识清单”对每一个知识点进行了细致的讲解.

“典例精析”对典型例题进行讲解,给出详细的解题思路,可帮助考生找到解题方法,规避解题误区.

“巩固训练”针对书中考点设置了练习题,以帮助考生巩固所学知识,提高答题能力.

衷心希望本书能为广大考生的复习备考带来实质性的帮助.对书中的不足之处,敬请各位读者不吝指正.

在编写本书过程中,我们广泛征求甘肃省内中职学校及其他高校一线教师的意见,秉承高效、实用的理念打造精品.我们相信,凝聚着众多名师智慧的本书,定能成为通向成功彼岸的金桥,帮助考生到达理想的殿堂!

最后,预祝广大考生在考试中取得好成绩!

编　者

目录
CONTENTS

第一章　集合和简易逻辑　1

第一节　集合的概念与集合之间的关系 …… 2
第二节　集合的运算 …… 7
第三节　充要条件 …… 12

第二章　不等式　16

第一节　不等式的基本性质与区间 …… 17
第二节　一元一次不等式(组) …… 22
第三节　一元二次不等式 …… 25
第四节　含绝对值的不等式 …… 29

第三章　函数　33

第一节　函数的概念及其表示方法 …… 34
第二节　函数的性质 …… 40
第三节　常用初等函数 …… 46
第四节　函数的实际应用 …… 51

第四章　指数函数与对数函数　56

第一节　实数指数幂 …… 57
第二节　指数函数 …… 61
第三节　对数 …… 65
第四节　对数函数 …… 68

第五章　三角函数　73

第一节　角的概念推广 …… 74
第二节　弧度制与任意角的三角函数 …… 77
第三节　同角三角函数的基本关系式 …… 81
第四节　诱导公式 …… 84

第五节　三角函数的图像和性质 …… 86
第六节　已知三角函数值求角 …… 91

第六章　数列 94

第一节　数列的概念 …… 95
第二节　等差数列 …… 99
第三节　等比数列 …… 103

第七章　平面向量 108

第一节　平面向量的概念及线性运算 …… 109
第二节　平面向量的坐标表示 …… 113
第三节　平面向量的内积 …… 116

第八章　直线与圆的方程 120

第一节　两点间的距离公式及线段中点的坐标公式 …… 121
第二节　直线的方程 …… 123
第三节　两条直线的位置关系 …… 127
第四节　圆 …… 132

第九章　简单几何体 137

第一节　多面体 …… 138
第二节　旋转体 …… 142

第十章　立体几何 147

第一节　平面的基本性质 …… 148
第二节　空间中的平行关系 …… 150
第三节　空间中的垂直关系和角 …… 154

第十一章　概率与统计初步 160

第一节　排列与组合 …… 161
第二节　概率 …… 166
第三节　统计 …… 175

第一章 集合和简易逻辑

复习指南

(1)理解集合的概念、元素与集合的关系、空集.能够熟练地应用“$\in$”和“$\notin$”,熟练区分“$\varnothing$”和“$\{0\}$”的不同.

(2)掌握集合的表示法(列举法和描述法)、常用数集的概念及其相对应的符号.能够灵活地用列举法或描述法表示具体集合;能够准确地区分“五个数集”(自然数集、正整数集、整数集、有理数集、实数集)及其符号.

(3)掌握集合间的关系(子集、真子集、相等).能够分清子集与真子集的联系与区别,分清集合间的三种关系和对应的符号,能准确地用符号表示元素与集合、集合与集合之间的关系.

(4)理解集合的运算(交集、并集、补集).能够很熟练地进行集合的交、并、补运算,对用不等式形式表示的集合运算,会用数轴帮助解决.

(5)了解充要条件.能够正确区分一些简单的充分不必要条件、必要不充分条件和充要条件实例.

命题探究

本章是甘肃省职教高考的必考内容,也是比较容易得分的知识点.集合和简易逻辑在近几年考试中主要从三个方面考查:一是考查集合的概念、集合的基本关系及常用数集的符号表示;二是考查集合的基本运算,命题常以两个集合的交集、并集和补集运算为主,多与绝对值、不等式等相结合;三是考查充分条件、必要条件和充要条件的判定,多与绝对值、不等式、函数等相结合.

知识结构

- 集合和简易逻辑
  - 集合的概念与集合之间的关系
    - 集合的概念与表示法
    - 集合间的关系
      - 子集
      - 真子集
      - 集合相等
  - 集合的运算
    - 集合的交集
    - 集合的并集
    - 集合的补集
  - 充要条件
    - 命题的定义
    - 充要条件的相关知识

第一节　集合的概念与集合之间的关系

知识清单

知识点一　集合的概念与表示法

1. 集合

把具有某种属性的一些确定的对象看成一个整体，便形成了一个集合，常用大写英文字母 A,B,C 等表示.

2. 元素

集合中的每一个确定的对象叫作这个集合的元素，常用小写英文字母 a,b,c 等表示.

3. 元素与集合的关系及性质

如果 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于 A，记作 $a\in A$；如果 a 不是集合 A 的元素，就说 a 不属于 A，记作 $a\notin A$. 集合中的元素具有确定性、互异性、无序性的特征.

4. 常用的集合

(1)空集. 不含任何元素的集合叫作空集，记作 $\varnothing$.

(2)正整数集. 所有正整数组成的集合叫作正整数集，记作 $\mathbf{N}_+$ 或 $\mathbf{N}^*$.

(3)自然数集. 所有自然数组成的集合叫作自然数集，记作 $\mathbf{N}$.

(4)整数集. 所有整数组成的集合叫作整数集，记作 $\mathbf{Z}$.

(5)有理数集. 所有有理数组成的集合叫作有理数集，记作 $\mathbf{Q}$.

(6)实数集. 所有实数组成的集合叫作实数集，记作 $\mathbf{R}$.

5. 集合的两种表示法

(1)列举法. 把集合的元素一一列举出来，写在大括号内，这种表示集合的方法叫作列举法.

注意

用列举法表示集合时，要注意以下几点：

①元素之间用“,”隔开.

②元素不能重复(满足集合中元素的互异性).

③元素不能遗漏.

④当集合中的元素较少时，用列举法比较简单；若集合中的元素较多或无限，但存在一定的规律，在不发生误解的情况下，也可以用列举法表示.

(2)描述法. 用集合所含元素的共同特性表示集合的方法叫作描述法.

描述法表示集合的一般形式是 $\{x\mid p(x)\}$，其中“x”是集合中元素的代表形式，“$p(x)$”是集合中元素的共同特征，二者之间的竖线不可省略.

注意

用描述法表示集合时，要注意以下几点：

①写清楚集合中元素的代表形式(一般用小写字母表示).

②写明集合中元素的特征或性质.

③用于描述元素特征的语句要力求简明、准确,不产生歧义;多层描述时,应当准确使用"且""或"等关联词.

④所有描述的内容都要写在大括号内.

⑤在不造成混淆的情况下,用描述法表示集合时,有时也可以省去竖线和竖线左边的部分.例如,正整数的集合可简记为{正整数},但是,集合$\{x|x>1\}$就不能省略竖线及其左边的x.

6.常见的集合表示

(1)方程的解集:$\{x|x^2-3x+2=0\}$或$\{1,2\}$,一般用列举法表示.

(2)方程组的解集:$\{(3,1)\}$或$\left\{(x,y)\middle|\begin{cases}x-2y=1,\\x+3y=6\end{cases}\right\}=\left\{(x,y)\middle|\begin{cases}x=3,\\y=1\end{cases}\right\}$,一般用后者表示.

(3)点集:$\{(x,y)|y=2x+1\}$.

(4)具有某种性质的点集:$\{M||PM|=a\}$(P为定点).

知识点二 集合间的关系

1.子集

一般地,对于两个集合A,B,如果集合A中任何一个元素都是集合B的元素,那么,集合A就叫作集合B的子集,记作$A\subseteq B$或$B\supseteq A$,读作"A包含于B"或"B包含A".

性质:任何一个集合是它本身的子集,即$A\subseteq A$;空集是任何集合的子集,即$\varnothing\subseteq A$;对于集合A,B,C,若$A\subseteq B$,$B\subseteq C$,则$A\subseteq C$.

注意

不能把子集说成是由原来集合中的部分元素组成的集合,因为集合A的子集包括它本身,而这个子集由集合A的全体元素组成;空集也是集合A的子集,但这个子集中不包括集合A中的任何元素.

2.真子集

如果集合A是集合B的子集,并且集合B中至少有一个元素不属于集合A,则集合A是集合B的真子集(A包含于B但不等于B),记作$A\subsetneqq B$或$B\supsetneqq A$,读作"A真包含于B"或"B真包含A".

性质:空集是任何非空集合的真子集;对于集合A,B,C,若$A\subsetneqq B$,$B\subsetneqq C$,则$A\subsetneqq C$.

注意

元素与集合之间是属于关系,集合与集合之间是包含关系.

3.集合相等

一般地,对于两个集合A与B,如果集合A中的任何一个元素也都是集合B的元素,同时集合B中的任何一个元素也都是集合A的元素,我们就说集合A等于集合B,记作$A=B$(A,B的所有元素均相等).

注意

(1)若两个集合相等,则两个集合所包含的元素完全相同,反之亦然.

(2)要判断两个集合是否相等,对于元素较少的有限集合,主要看它们的元素是否完全相同;若是无限集合,则从"互为子集"入手进行判断.若$A\subseteq B$且$B\subseteq A$,则$A=B$.

典例精析

例 1 下列各组对象中，能构成集合的是 ( )

(1)我国著名的数学家；

(2)超过 20 的所有自然数；

(3)某校 2020 年招收的矮个子学生；

(4)方程 $x^2-4=0$ 的实数解；

(5)在直角坐标平面内，第三象限的所有点.

A. (1)(2)(3) B. (2)(3)(4) C. (2)(4)(5) D. (3)(4)(5)

【解析】(1)中的“我国著名的数学家”不是一个明确的标准，不能构成一个集合；(3)中的“矮个子学生”这一标准不确定，无法判定某人是高还是矮，不能构成集合；(4)中的对象是确定的；(2)(5)中的对象虽然有无限个，但也是确定的. 故选 C.

【技巧点拨】判断某组对象能否构成集合，关键看对象是否为整体的和确定的. 标准一定要是明确的，不能模糊，否则无法判断.

例 2 下列选项中正确的是 ( )

A. $0\in\varnothing$ B. $1\in\{-1,0,2\}$ C. $0\notin\mathbf{N}$ D. $1\in\mathbf{Z}$

【解析】选项 A 错误，因为空集是不含任何元素的集合，所以 $0\notin\varnothing$. 选项 B 错误，因为集合$\{-1,0,2\}$中不含元素 1，所以 $1\notin\{-1,0,2\}$. 选项 C 错误，因为 0 是自然数，所以 $0\in\mathbf{N}$. 故选 D.

【技巧点拨】本题主要考查元素与集合的关系，以及用符号“$\in$”和“$\notin$”表示元素与集合之间的关系.

例 3 用列举法表示下列集合.

(1)$A=\{x\mid -2<x<5,x\in\mathbf{Z}\}$；

(2)$B=\{(x,y)\mid 2x+y=5,x\in\mathbf{N},y\in\mathbf{N}\}$.

【解析】(1)$A=\{-1,0,1,2,3,4\}$；(2)$B=\{(0,5),(1,3),(2,1)\}$.

【技巧点拨】掌握集合的两种表示方法：列举法、描述法.

例 4 设集合 $A=\{0\}$，下列结论正确的是 ( )

A. $A=0$ B. $A=\varnothing$ C. $0\in A$ D. $\varnothing\in A$

【解析】本题考查元素与集合、集合与集合之间的关系. 答案选 C.

【技巧点拨】正确理解符号$\in$，$\notin$，$\subseteq$，$\subsetneqq$的意义是正确处理此类问题的关键.

例 5 写出集合$\{a,b,c\}$的所有子集和真子集.

【解析】集合$\{a,b,c\}$的子集有$\varnothing$，$\{a\}$，$\{b\}$，$\{c\}$，$\{a,b\}$，$\{a,c\}$，$\{b,c\}$，$\{a,b,c\}$；集合$\{a,b,c\}$的真子集有$\varnothing$，$\{a\}$，$\{b\}$，$\{c\}$，$\{a,b\}$，$\{a,c\}$，$\{b,c\}$.

【技巧点拨】本题主要考查子集和真子集的定义，注意不要遗忘空集. 一般地，如果集合 A 中有 n 个元素，那么它共有 2^n 个子集，2^n-1 个真子集.

例 6　已知集合 $A=\{x\mid x^2-x-2=0\}$，$B=\{x\mid x^2-4x+p=0\}$，若 $B\subseteq A$，求实数 p 的取值范围.

【解析】由题意得 $A=\{-1,2\}$，因为 $B\subseteq A$，所以 $B=\varnothing$ 或 $B=\{-1\}$ 或 $B=\{2\}$ 或 $B=\{-1,2\}$.

又因为 $B=\{x\mid x^2-4x+p=0\}$，所以 $B=\{-1,2\}$ 不成立.

当 $B=\varnothing$ 时，$\Delta=(-4)^2-4p=16-4p<0$，解得 $p>4$；

当 $B=\{-1\}$ 时，$\begin{cases}\Delta=16-4p=0,\\(-1)^2-4\times(-1)+p=0,\end{cases}$ 无解；

当 $B=\{2\}$ 时，$\begin{cases}\Delta=16-4p=0,\\2^2-4\times2+p=0,\end{cases}$ 解得 $p=4$.

综上所述，实数 p 的取值范围是 $\{p\mid p\geqslant4\}$.

【技巧点拨】本题考查了两个集合包含或相等关系的问题.

巩固训练

基础实战

一、选择题

1\. 下列关系不正确的是　　(　　)

A. $0\in\mathbf{N}$　　B. $-4\in\mathbf{R}$　　C. $2.1\in\mathbf{Q}$　　D. $1.5\in\mathbf{Z}$

2\. 下列关系正确的是　　(　　)

A. $0\notin\varnothing$　　B. $0\in\varnothing$　　C. $\{0\}\in\varnothing$　　D. $1\in\varnothing$

3\. 下列对象构成的集合为无限集的是　　(　　)

A. 高一年级身高超过 175 cm 的学生　　B. 方程 $x^2=1$ 的解

C. 所有大于 0 小于 5 的偶数　　D. 所有大于 3 的实数

4\. 若集合 $A=\{-1,-2,1,2\}$，则集合 A 的元素个数是　　(　　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

5\. 若集合 $A=\{(-1,-2),(1,2)\}$，则集合 A 的元素个数是　　(　　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

6\. 下列集合中用列举法表示的是　　(　　)

A. {绝对值小于 2 的实数}　　B. $\{a,b\}$

C. $\{x\mid x^2<0\}$　　D. $\{x\in\mathbf{N}\mid x<1\}$

7\. 下列对象中能组成集合的是　　(　　)

A. 好人　　B. 非常小的数　　C. 有趣的书　　D. 小于 5 的数

8\. 给出下面四个关系：①$0\in\mathbf{Q}$；②$\sqrt{3}\notin\mathbf{Q}$；③$\mathbf{Z}\subseteq\mathbf{Q}$；④$\varnothing\subseteq\{0\}$，其中正确的个数为　　(　　)

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

9\. 下列选项中，表述正确的是　　(　　)

A. 由 1，3，5，7，5，3 组成的集合中有 6 个元素　　B. 周长为 16 cm 的三角形组成的集合是有限集合

C. 集合 $\{0\}$ 是空集　　D. 阳光小学一(3)班的所有同学可以组成集合

10\. 用列举法表示“大于 2 且小于 9 的偶数的全体”构成的集合是　　(　　)

A. $\varnothing$　　B. $\{4,6,8\}$　　C. $\{3,5,7\}$　　D. $\{3,4,5,6,7,8\}$

11\. 用列举法表示集合 $\{x\mid x^2-3x+2=0\}$ 的结果是　　(　　)

A. $(1,2)$　　B. $1,2$　　C. $\{1,2\}$　　D. 以上都不是

12\. 集合 $\{1,2,3,4\}$ 所有子集的个数是　　(　　)

A. 8　　B. 14　　C. 15　　D. 16

13. 若集合 $M=\{m,2-m\}$，则实数 m 需满足　　(　　)

A. $m\neq 2$　　B. $m\neq 1$　　C. $m\neq -1$　　D. $m\neq -2$

14. 已知集合 $M=\{-1,0,m^2\}$，$N=\{-1,0,2m-1\}$，若 $M=N$，则实数 $m=$　　(　　)

A. -1　　B. 1　　C. 0　　D. ± 1

15. 设集合 $M=\{x|x\leqslant\sqrt{5}\}$，$a=2$，则下列关系正确的是　　(　　)

A. $a\subseteq M$　　B. $a\nsubseteq M$　　C. $a\in M$　　D. $a\notin M$

16. 下列集合 M 与 N 表示同一个集合的是　　(　　)

A. $M=\{(2,3)\}$，$N=\{2,3\}$　　B. $M=\{3.14\}$，$N=\{\pi\}$

C. $M=\{0\}$，$N=\varnothing$　　D. $M=\{0,1,2,3\}$，$N=\{x\in\mathbf{N}|x\leqslant 3\}$

17. 方程组 $\begin{cases}2x+y=0,\\ x-y+3=0\end{cases}$ 的解集为　　(　　)

A. $\{-1,2\}$　　B. $(-2,2)$

C. $\{(-1,2)\}$　　D. $\{(x,y)|x=-1$ 或 $y=2\}$

二、填空题

1. 用适当的符号($\in,\notin,\subseteq,\supseteq,=$)填空.

(1)3 ________ $\{2,3\}$；　(2)π ________ $\mathbf{Q}$；　(3)$\{1,2,3\}$ ________ $\mathbf{Z}$；

(4)$\mathbf{N}^*$ ________ $\mathbf{Z}$；　(5)$\{-3,3\}$ ________ $\{x|x^2=9\}$.

2. 已知集合 $P=\{x|2<x<a,x\in\mathbf{N}\}$，且集合 P 中恰有 3 个元素，则整数 $a=$________.

3. 绝对值等于 1 的所有整数组成的集合是________.

4. 下列六个关系式：①$\{a,b\}\subseteq\{b,a\}$；②$\{a,b\}=\{b,a\}$；③$0=\varnothing$；④$0\in\{0\}$；⑤$\varnothing\in\{0\}$；⑥$\varnothing\subseteq\{0\}$. 其中正确的个数为________.

三、解答题

1. 写出集合$\{-3,-1,1,3\}$的所有子集，并指出哪些是真子集.

2. 已知集合 $A=\{0,1,2\}$，集合 $B=\{x|x=ab,a\in A,b\in A\}$.

(1)用列举法写出集合 B；

(2)判断集合 B 和集合 A 的关系.

3. 已知集合$\{1,a,b\}$与$\{-1,-b,1\}$是同一个集合，求实数 a,b 的值.

提升进阶

1. 满足$\{a,b\}\subsetneqq A\subseteq\{a,b,c,d,e\}$的集合 A 的个数是　　（　　）

A. 9　　B. 8　　C. 7　　D. 6

2. 已知集合 $A=\{x\mid ax^2+2x+1=0,x\in\mathbf{R}\}$.

(1)若 A 中只有一个元素，求 a 的值；

(2)若 A 中恰有两个元素，求 a 的取值范围；

(3)若 A 中最多只有一个元素，求 a 的取值范围.

第二节　集合的运算

知识清单

知识点一　集合的交集

1. 交集的定义

一般地，对于两个给定的集合 A,B，由既属于集合 A 又属于集合 B 的所有元素组成的集合，称为集合 A 与集合 B 的交集，记作 $A\cap B$，即 $A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$.

2. 交集的性质

(1)$A\cap B=B\cap A$.

(2)$A\cap A=A$.

(3)$A\cap\varnothing=\varnothing$.

(4)$A\cap B\subseteq A$，$A\cap B\subseteq B$.

(5)若 $A\subseteq B$，则 $A\cap B=A$.

知识点二　集合的并集

1. 并集的定义

一般地，对于两个给定的集合 A,B，由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素组成的集合，称为集合 A 与集合 B 的并集，记作 $A\cup B$，即 $A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$.

2. 并集的性质

(1)$A\cup B=B\cup A$.

(2)$A\cup A=A$.

(3)$A\cup\varnothing=A$.

(4)$A\subseteq A\cup B$，$B\subseteq A\cup B$.

(5)若 $A\subseteq B$，则 $A\cup B=B$.

3. 图示两个集合的交集、并集

(1)用 Venn 图表示两个集合的交集、并集，如图 1-1 所示.

(2)借助数轴表示数集的交集、并集,如图 1-2 所示.

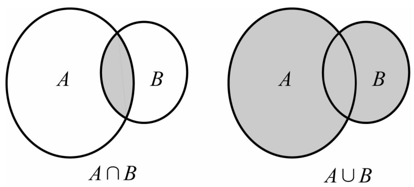

图 1-1

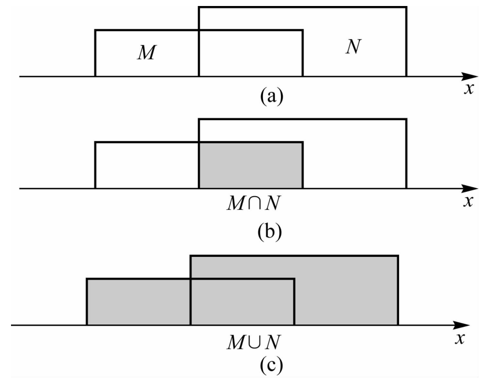

图 1-2

知识点三 集合的补集

1. 全集的定义

如果一个集合含有我们所研究问题中涉及的所有元素,则称这个集合为全集,通常用 U 表示.

注意

全集是一个相对的概念,在不同的情况下全集的概念不同.

2. 补集的定义

对于一个集合 A,由全集 U 中不属于集合 A 的所有元素组成的集合称为集合 A 相对于全集 U 的补集,简称为集合 A 的补集,记作 $\complement_U A$,读作"A 在 U 中的补集",即 $\complement_U A=\{x \mid x\in U$ 且 $x\notin A\}$.

3. 补集的性质

(1) $\complement_U(\complement_U A)=A$.

(2) $\complement_U\varnothing=U$,$\complement_U U=\varnothing$.

(3) $A\cup(\complement_U A)=U$.

(4) $A\cap(\complement_U A)=\varnothing$.

典例精析

例 1 已知集合 $A=\{2,3,4,7\}$,$B=\{2,5,6,7,8,10\}$,则 $A\cap B=$ ( )

A. $\{2,3,4,5,6,7,8,10\}$　　B. $\{2,7\}$

C. $\{2\}$　　D. $\varnothing$

【解析】因为 $2,7\in A$,$2,7\in B$,所以 $A\cap B=\{2,7\}$. 故选 B.

【技巧点拨】本题考查的是正确理解交集的定义.

例 2 如图 1-3 所示,则 $A\cup B=$ ( )

A. $\{0,1,3,5,6\}$　　B. $\{0,1,2,3,5,6\}$

C. $\{0,1,3,4,5,6\}$　　D. $\{0,1,2,3,4,5,6\}$

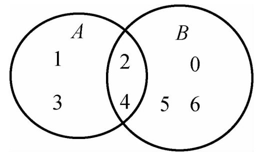

图 1-3

【解析】通过集合的图形语言与符号语言的转化，如图可知，$A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{0,2,4,5,6\}$，则 $A\cup B=\{0,1,2,3,4,5,6\}$. 故选 D.
【技巧点拨】本题考查的是正确理解并集的定义.

例 3 设全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\mid 0\leqslant x<2\}$，集合 $B=\{x\mid x^2-2x-3<0\}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$，$(\complement_U A)\cap B$.

【解析】$B=\{x\mid (x+1)(x-3)<0\}=\{x\mid -1<x<3\}$，$\complement_U A=\{x\mid x<0$ 或 $x\geqslant 2\}$，所以 $A\cap B=\{x\mid 0\leqslant x<2\}$，$A\cup B=\{x\mid -1<x<3\}$，$(\complement_U A)\cap B=\{x\mid -1<x<0$ 或 $2\leqslant x<3\}$.
【技巧点拨】本题考查对集合运算的理解及性质的运用，并且要注意端点的取值.

例 4 已知集合 $M=\{x|a\leqslant x\leqslant a+3\}$，$N=\{x|x<-1$ 或 $x>5\}$，若 $M\cap N=\varnothing$，求实数 a 的取值范围.

【解析】如图 1-4 所示，要使 $M\cap N=\varnothing$，必须满足 $\begin{cases}a+3\leqslant 5,\\ a\geqslant -1,\end{cases}$ 解得 $-1\leqslant a\leqslant 2$，所以实数 a 的取值范围为 $\{a|-1\leqslant a\leqslant 2\}$.

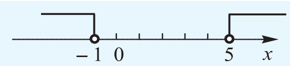

图 1-4

【技巧点拨】解题时利用数轴表示集合，便于寻求满足条件的实数 a. 特别需要注意的是"端点值"的问题，要明确是能取"="还是不能取"=".

例 5 已知 U 为全集，集合 $M\subsetneqq U$，$N\subsetneqq U$，且 $N\subseteq M$，则 ( )

A. $(\complement_U M)\supseteq(\complement_U N)$　　B. $(\complement_U M)\supseteq N$

C. $(\complement_U M)\subseteq(\complement_U N)$　　D. $M\supseteq(\complement_U N)$

【解析】根据各集合之间的关系作图（见图 1-5），这样就很容易做出判断. 故选 C.
【技巧点拨】(1) 考虑集合之间的关系，用图形解答比较方便.
(2) 在数学中利用"数形结合"的思想，往往能使问题简单化.

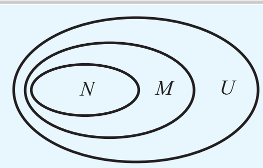

图 1-5

巩固训练

基础实战

一、选择题

1. 若集合 $A=\{0,2\}$，$B=\{0,1,2\}$，则 $A\cap B=$ ( )

A. 0，2　　B. 0，1，2　　C. $\{0,2\}$　　D. $\{0,1,2\}$

2. 若集合 $A=\{x\in\mathbf{N}\mid x<3\}$，$B=\{x\in\mathbf{N}\mid x\geqslant 0\}$，则 $A\cap B=$ (　　)

A. $\{1,2\}$　　B. $\{0,1,2\}$

C. $\{x\mid 0\leqslant x<3\}$　　D. $\mathbf{N}$

3. 若集合 $A=\{x\mid -2<x<3\}$，$B=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 4\}$，则 $A\cap B=$ (　　)

A. $\{x\mid -2<x<4\}$　　B. $\{x\mid 0<x\leqslant 3\}$

C. $\{x\mid 0\leqslant x<3\}$　　D. $\{x\mid 0\leqslant x<4\}$

4. 若集合 $A=\{0,3\}$，$B=\{0,1,3\}$，则 $A\cup B=$ (　　)

A. $0,3$　　B. $0,1,3$　　C. $\{0,3\}$　　D. $\{0,1,3\}$

5. 若集合 $A=\{x\mid -1<x<3\}$，$B=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 5\}$，则 $A\cup B=$ (　　)

A. $\{x\mid -1<x\leqslant 5\}$　　B. $\{x\mid 1\leqslant x<3\}$

C. $\{x\mid 0\leqslant x<3\}$　　D. $\{x\mid 0\leqslant x<5\}$

6. 设集合 $A=\{x\mid |x|\leqslant 4\}$，$B=\{x\mid x^2-10x+16<0\}$，则 $A\cap B=$ (　　)

A. $\{x\mid -4\leqslant x\leqslant 8\}$　　B. $\{x\mid 2<x\leqslant 4\}$　　C. $\{x\mid -4<x<8\}$　　D. $\{x\mid 2\leqslant x<4\}$

7. 已知全集 $U=\{x\mid x\leqslant 4, x\in\mathbf{N}\}$，集合 $A=\{x\mid x>2, x\in U\}$，则 $\complement_U A=$ (　　)

A. $\{1\}$　　B. $\{0\}$　　C. $\{0,1\}$　　D. $\{0,1,2\}$

8. 已知集合 $\{1,2\}\cup A=\{1,2,3\}$，则符合条件的集合 A 的个数是 (　　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

9. 设全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\mid x>2\}$，$B=\{x\mid x<5\}$，则 $A\cup B=$ (　　)

A. $\{x\mid x>2\}$　　B. $\{x\mid x<5\}$

C. $\{x\mid 2<x<5\}$　　D. $\mathbf{R}$

10. 如图 1-6 所示，阴影部分所表示的集合是 (　　)

A. $(\complement_S A)\cap B$　　B. $(\complement_S A)\cup B$

C. $(A\cup B)\cap\complement_S(A\cap B)$　　D. $(A\cup B)\cup(\complement_S A)\cap B$

11. 设全集 $U=\mathbf{N}^*$，集合 $A=\{2,3,6,8,9\}$，集合 $B=\{x\mid x>3, x\in\mathbf{N}^*\}$，则图 1-7 中阴影部分所表示的集合是 (　　)

A. $\{2\}$　　B. $\{2,3\}$　　C. $\{1,2,3\}$　　D. $\{6,8,9\}$

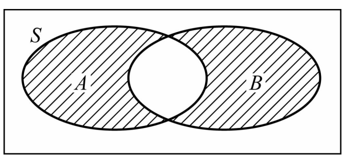

图 1-6

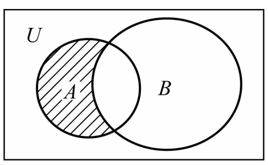

图 1-7

12. 设集合 $M=\{0,1,2\}$，$N=\{1,2\}$，$P=\{0,2,3\}$，则 $M\cap N\cap P=$ (　　)

A. $\{0,2\}$　　B. $\{0,2,3\}$　　C. $\{2\}$　　D. $\{0,1,2,3\}$

13. 已知集合 $A=\{1,3,t\}$，$B=\{t^2-t+1\}$，若 $A\cup B=A$，则实数 t 的取值是 (　　)

A. $t=1$　　B. $t=2, t=-1, t=0$

C. $t=2, t=\pm 1$　　D. 不存在

二、填空题

1. 若集合 $A=\{x\in\mathbf{N}\mid x<6\}$，$B=\{x\in\mathbf{N}\mid x\geqslant 4\}$，则 $A\cap B=$________.

2. 若集合 $A=\{x\mid x<6\}$，$B=\{x\mid x\geqslant 4\}$，则 $A\cap B=$________.

3. 若集合 $A=\{0,3,5\}$，$B=\{-1,3,6\}$，$C=\{0,1,3\}$，则 $(A\cap B)\cup C=$ ________.

4. 若集合 $A=\{x\in\mathbf{N}\mid x<7\}$，$B=\{x\in\mathbf{N}\mid x\geqslant 5\}$，则 $A\cup B=$________.

5. 若集合 $A=\{x\mid -4<x<6\}$，$B=\{x\mid x\geqslant 3\}$，则 $A\cup B=$________.

三、解答题

1. 已知全集 $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，集合 $A=\{1,2,4,5\}$，集合 $B=\{4,6,7,8\}$，集合 $C=\{3,5,6,7\}$，求 $A\cup B$，$B\cap C$，$\complement_U A$.

2. 已知全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\mid 2\leqslant x\leqslant 4\}$，集合 $B=\{x\mid x>3\}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$，$\complement_U A$，$\complement_U B$.

提升进阶

1. 设全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\mid x^2-x-2=0\}$，$B=\{x\mid |x|=y+1, y\in A\}$，求 $\complement_U B$.

2. 设集合 $A=\{x\mid a\leqslant x\leqslant a+2\}$，集合 $B=\{x\mid x<-2$ 或 $x>6\}$.
(1) $A\cap B\neq\varnothing$，求实数 a 的取值范围；
(2) $A\cap B=A$，求实数 a 的取值范围.

第三节　充 要 条 件

知识清单

知识点一　命题的定义

在数学中，我们把用语言、符号或式子表达的，可以判断真假的陈述句叫作命题. 正确的命题叫作真命题，记作 T；错误的命题叫作假命题，记作 F. T 和 F 称为命题的真值(有的书上用 0 和 1 作为命题的真值). p 与 q 为等值的命题记作 $p=q$.

知识点二　充要条件的相关知识

1. 充要条件的定义

(1)对于两个命题 p，q，如果有 $p\Rightarrow q$，则称 p 是 q 的充分条件，q 是 p 的必要条件.

注意

p 是 q 的充分条件，是指只要具备了条件 p，那么 q 就一定成立，即命题中的条件是充分的；q 是 p 的必要条件，是指如果不具备条件 q，则 p 就不能成立，即 q 是 p 成立的必不可少的条件.

(2)如果 $p\Rightarrow q$ 且 $q\Rightarrow p$，即 $p\Leftrightarrow q$，则 p 是 q 的充分且必要条件，简称充要条件.

注意

①当 $p\Leftrightarrow q$ 时，也称 p 与 q 是等价的.

②与充要条件等价的词语有“当且仅当”“等价于”“有且只有”“反过来也成立”等.

2. 充要条件的判断方法

(1)从逻辑推理关系上判断(定义法).

①若 $p\Rightarrow q$ 但 $q\nRightarrow p$，则 p 是 q 的充分不必要条件.

②若 $p\nRightarrow q$ 但 $q\Rightarrow p$，则 p 是 q 的必要不充分条件.

③若 $p\Rightarrow q$ 且 $q\Rightarrow p$，则 p 是 q 的充要条件.

④若 $p\nRightarrow q$ 且 $q\nRightarrow p$，则 p 是 q 的既不充分也不必要条件.

(2)从命题所对应的集合与集合之间的关系上判断(集合法).

设命题 p 对应的集合为 A，命题 q 对应的集合为 B.

①若 $A\subseteq B$，则 p 是 q 的充分条件.

②若 $A\supseteq B$，则 p 是 q 的必要条件.

③若 $A\subseteq B$ 且 $A\supseteq B$，即 $A=B$，则 p 是 q 的充要条件.

④若 $A\nsubseteq B$ 且 $A\nsupseteq B$，则 p 是 q 的既不充分也不必要条件.

典例精析

例 1 用“充分不必要条件”“必要不充分条件”“充要条件”填空.

(1)“x 是实数”是“x 是有理数”的________;

(2)“x 是正方形”是“x 是矩形”的________;

(3)“同位角相等”是“两直线平行”的________.

【解析】(1)因为实数包括无理数和有理数,所以“x 是实数”是“x 是有理数”的必要不充分条件;(2)因为正方形是特殊的矩形,所以“x 是正方形”是“x 是矩形”的充分不必要条件;(3)如果两条直线被第三条直线所截形成的同位角相等,那么这两条直线平行;如果两条直线平行,那么这两条直线被第三条直线所截形成的同位角相等,所以“同位角相等”是“两直线平行”的充要条件.

【技巧点拨】本题主要考查充分条件、必要条件和充要条件的定义,能准确区分三个条件的不同.判断不充分或不必要的条件时,常用举反例的方法.

例 2 已知 p:$|3x-5|<4$,q:$(x-1)(x-2)<0$,则 p 是 q 的 ( )

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

【解析】p:$|3x-5|<4 \Leftrightarrow p$:$\frac{1}{3}<x<3$,$q$:$(x-1)(x-2)<0 \Leftrightarrow q$:$1<x<2$. 所以 $p \nRightarrow q$ 但 $q \Rightarrow p$,所以 p 是 q 的必要不充分条件. 故选 B.

【技巧点拨】判断充分、必要条件时,要先分清条件和结论,进而找到条件与结论之间的逻辑推理关系. 常用的判断法:定义法和集合法.

例 3 已知集合 $A=\left\{y \,\middle|\, y=x^2-\frac{3}{2}x+1, x\in\left[\frac{3}{4},2\right]\right\}$,$B=\{x \mid x+m^2\geq 1\}$,$p$: $x\in A$,q:$x\in B$,并且 p 是 q 的充分条件,求实数 m 的取值范围.

【解析】由题意得集合 $A=\left[\frac{7}{16},2\right]$,$B=[1-m^2,+\infty)$,由于 p 是 q 的充分条件,所以 $A\subseteq B$,所以 $1-m^2\leq\frac{7}{16}$,解得 $m\geq\frac{3}{4}$ 或 $m\leq-\frac{3}{4}$,即实数 m 的取值范围是 $\left(-\infty,-\frac{3}{4}\right]\cup\left[\frac{3}{4},+\infty\right)$.

【技巧点拨】本题主要考查集合的关系及充要条件的判断,运用集合之间的关系建立不等式是解题的关键.

巩固训练

基础实战

一、选择题

1. “$A\cap B=A$”是“$A\subseteq B$”的 ( )

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

2. “$x<-2$”是“不等式 $x^2-4>0$ 成立”的　　(　　)

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

3. “$|x|\geqslant 1$”是“$x\geqslant 1$”的　　(　　)

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. “$x>0$”是“$x>1$”的　　(　　)

A. 必要不充分条件　　B. 充分不必要条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

5. 已知 p：α 是第二象限角，q：α 是钝角. 那么 p 是 q 的　　(　　)

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

6. 设甲是乙的充分不必要条件，乙是丙的充要条件，丁是丙的必要不充分条件，则甲是丁的　　(　　)

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

二、填空题

1. “$x=y$”是“$x^2=y^2$”的________条件.（填“充分不必要”“必要不充分”或“充要”）

2. “$b^2-4ac\geqslant 0$”是“关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$a,b,c\in\mathbf{R}$ 且 $a\neq 0$）有实数根”的________条件.（填“充分不必要”“必要不充分”或“充要”）

3. “$a\in\mathbf{Z}$”是“$a\in\mathbf{Q}$”的________条件.（填“充分不必要”“必要不充分”或“充要”）

三、解答题

1. 判断下列问题中，p 是 q 的什么条件.

(1) p：$x^2\geqslant y^2$，q：$x\geqslant y$；

(2) p：$x\in A\cup B$，q：$x\in A\cap B$；

(3) p：$x>3$，q：$x>2$；

(4) p：a 是有理数，q：$a+2$ 是有理数.

2. 求一个"对于一切实数 x 都有 $ax^2-ax+1>0(a\in\mathbf{R})$ 成立"的充要条件.

提升进阶

已知 p:$-2\leqslant x\leqslant 10$,$q$:$x^2-2x+1-m^2\leqslant 0(m>0)$,若 p 是 q 的充分不必要条件,求实数 m 的取值范围.