中等职业学校公共基础课程辅导用书

数学

同步提升与练习

（基础模块·下）

主编　李林英　刘　琰

哈尔滨工程大学出版社
Harbin Engineering University Press

中等职业学校公共基础课程辅导用书
数学同步提升与练习（基础模块·下）
主编　李林英　刘　琰
哈尔滨工程大学出版社
Harbin Engineering University Press

数学
同步提升与练习
（基础模块·下）

选题策划：苏　莉　李家隆
责任编辑：张佳凯
封面设计：刘文东

ISBN 978-7-5661-4446-1

定价：29.90元

中等职业学校公共基础课程辅导用书

数学

同步提升与练习

（基础模块·下）

主编　李林英　刘　琰

哈尔滨工程大学出版社
Harbin Engineering University Press

前言

PREFACE

职业教育是培养技术技能人才，促进就业创业创新，推动中国制造和服务上水平的重要基础。而中等职业教育的基础地位是国家经济发展的需要，是社会稳定的需要。这就要求中等职业学校必须与时俱进，不断进行教育教学改革。本书以深化学校教育教学改革、提高课堂教学实效性为目标，以《中等职业学校数学课程标准》为基础，充分落实学生的主体地位，从而激发学生的自信，挖掘学生的潜力。

本书是与中等职业学校公共基础课程教材《数学（基础模块）下册》相配套的学生指导用书，主要包含以下模块：

知识脉络——对本单元知识点进行总结。

学习目标——参考考试大纲，使学生对需要学习的知识要点有一个初步了解。

知识梳理——通过预习，培养学生的阅读能力、理解能力及总结能力。

典型例题——对经典例题进行详细讲解，使学生能更好地掌握课本知识。

巩固练习——分为基础巩固和能力提升两部分，通过自我检测，使学生做到及时查漏补缺，确保当堂内容当堂清。

单元测试题——通过开展单元测试，既能强化学生对相应知识之间关系的认识，又能培养学生解决综合问题的能力及数学思想和解题技巧。

由于编者水平有限，书中难免存在不足之处，敬请读者提出宝贵的意见和建议。

编　者

目录

CONTENTS

第六单元

直线与圆的方程

知识脉络

- 直线与圆的方程
  - 点的有关公式
    - 两点间距离公式
    - 中点坐标公式
  - 直线
    - 直线的倾斜角和斜率
    - 直线的方程
      - 点斜式方程
      - 斜截式方程
      - 一般式方程
    - 两条直线的位置关系
      - 两条直线平行
      - 两条直线相交
        - 垂直
    - 点到直线的距离
  - 圆
    - 圆的方程
      - 圆的标准方程
      - 圆的一般方程
    - 直线与圆的位置关系
      - 相离
      - 相切
        - 切线方程
      - 相交
        - 弦长
    - 直线与圆的方程的简单应用

6.1 两点间的距离公式及中点坐标公式

学习目标

掌握两点间距离公式和线段的中点坐标公式.

知识梳理

1. 两点间距离公式：在平面直角坐标系中，设点 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，则 P_1 与 P_2 间的距离为 $|P_1P_2|=$____________________.

2. 线段的中点坐标公式：设线段的两个端点分别为 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$M(x_0,y_0)$是线段 AB 的中点，则 $x_0=$________，$y_0=$________.

（答案在本节末尾）

典型例题

例 1 求两点 $P_1(-1,3)$，$P_2(2,5)$之间的距离.

解 $|P_1P_2|=\sqrt{(-1-2)^2+(3-5)^2}=\sqrt{13}$.

点拨 熟记两点间的距离公式，若两点坐标分别为 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，则 P_1，P_2 两点间的距离 $|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

例 2 已知点 $M(1,-5)$，$N(4,-6)$，求点 M 关于点 N 对称的点的坐标.

解 设所求点 P 的坐标为(x_2,y_2)，由 $N(4,-6)$是线段 MP 的中点，可得$\frac{1+x_2}{2}=4$，$\frac{-5+y_2}{2}=-6$，解得 $x_2=7$，$y_2=-7$. 故点 M 关于点 N 对称的点的坐标为$(7,-7)$.

点拨 如果点 M 与点 P 关于点 N 对称，那么点 N 是线段 MP 的中点，利用中点坐标公式可求出点 P 的坐标.

例 3 已知$\triangle ABC$ 的三个顶点为 $A(0,0)$，$B(7,2)$，$C(-1,4)$，D 是边 BC 上的中点. 求 BC 边上中线 AD 的长.

解 由题意，设 BC 边的中点 D 的坐标为(x,y)，则 $x=\frac{-1+7}{2}=3$，$y=\frac{4+2}{2}=3$，即 $D(3,3)$.

再由两点间的距离公式得中线 AD 的长度 $|AD|=\sqrt{(3-0)^2+(3-0)^2}=3\sqrt{2}$.

点拨　在三角形中，连接一个顶点和它的对边中点的线段称为三角形的中线，一个三角形有三条中线.

巩固练习

基础巩固

一、选择题

1. 已知 $A(2,3)$，$B(4,-1)$，则线段 AB 的中点 M 的坐标为　（　　）

A. $(2,-4)$　　B. $(-2,4)$　　C. $(3,1)$　　D. $(6,2)$

2. 两点 $P_1(1,4)$，$P_2(-2,6)$之间的距离为　（　　）

A. 6　　B. $\sqrt{13}$　　C. 13　　D. 8

3. 已知两点 $P_1(0,6)$，$P_2(a,-2)$之间的距离是 10，则 a 的值是　（　　）

A. 6　　B. -6　　C. 8　　D. ± 6

4. 点 $A(5,8)$关于原点的对称点为　（　　）

A. $(5,8)$　　B. $(-5,-8)$　　C. $(-5,8)$　　D. $(5,-8)$

5. 已知 $A(-1,3)$，$B(1,-1)$，则点 A 关于点 B 的对称点为　（　　）

A. $(1,3)$　　B. $(-1,3)$　　C. $(3,-5)$　　D. $(2,-4)$

6. 已知 $M(-2,3)$，N 在 x 轴上，若 $|MN|=5$，则点 N 的坐标为　（　　）

A. $(2,0)$　　B. $(2,0)$或$(-6,0)$

C. $(0,2)$　　D. $(0,2)$或$(0,-6)$

二、填空题

7. 若点 $A(2,3)$，$B(5,7)$，则 $|AB|=$__________，线段 AB 的中点坐标是________.

8. 已知 $A(a,3)$，$B(3,3a+3)$两点间的距离是 5，则 a 的值为________.

9. 已知 $M(2,-2)$，$N(-3,m)$，若 $|MN|=13$，则 m 的值为________.

10. 已知 $M(3,n)$是以 $P(m,-1)$和 $Q(2,6)$为端点的线段的中点，则 m 的值为________，n 的值为________.

三、解答题

11. 已知三角形 ABC 顶点的坐标分别为 $A(-2,-3)$，$B(6,-3)$，$C(6,0)$且 D 是 AB 的中点.

(1)求点 D 的坐标；

(2)求 AB 边上中线 CD 的长.

12. 已知 $A(2,y)$,$B(4,10)$,$C(x,6)$,且点 A,B 关于点 C 对称,求 x 与 y 的值.

能力提升

1. 已知 $A(1,5)$,$B(5,-2)$,在 x 轴上的点 M 与 A,B 的距离相等,则点 M 的坐标为________.

2. 已知△ABC 三个顶点的坐标分别为 $A(-a,0)$,$B(a,0)$,$C(0,\sqrt{3}a)$.

(1)求证:△ABC 是等边三角形;

(2)求这个三角形的中线长.

知识梳理答案

1. $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

2. $\dfrac{x_1+x_2}{2}$　$\dfrac{y_1+y_2}{2}$

6.2　直线的倾斜角及斜率

学习目标

1. 理解直线的倾斜角与斜率的概念.
2. 掌握直线斜率的计算方法.

知识梳理

1. 直线的倾斜角:一般地,在平面直角坐标系中,我们把直线 l 向上的方向与 x 轴正方向所夹的最小正角叫作直线 l 的________,通常用 α 来表示. 规定平行于 x 轴的直线的倾斜角为零,因此,直线 l 的倾斜角 α 的取值范围是________.

2. 直线的斜率：倾斜角不是 $90°$ 的直线，它的倾斜角 α 的正切值叫作这条直线的________，直线的斜率通常用 k 表示，即________.

3. 直线的斜率公式：设点 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$ 为直线 l 上的任意两点，且 $x_1\neq x_2$，则直线 l 的斜率 $k=$________.

（答案在本节末尾）

典型例题

例 1　已知一条直线经过 $A(3,4)$，$B(5,7)$ 两点，求直线 AB 的斜率和倾斜角.

解　由斜率公式可知，直线 AB 的斜率为 $k=\frac{7-4}{5-3}=\frac{3}{2}$，即 $\tan\alpha=\frac{3}{2}$，由于 $0\leqslant\alpha<\pi$，即 $0°\leqslant\alpha<180°$，故倾斜角 $\alpha\approx56°$.

点拨　求倾斜角时，如果三角函数值不是特殊角的三角函数值，那么利用计算器计算.

例 2　证明 $A(2,3)$，$B(1,-3)$，$C(3,9)$三点共线.

解　因为 $k_{AB}=\frac{3+3}{2-1}=6$，$k_{BC}=\frac{-3-9}{1-3}=6$，$k_{AB}=k_{BC}$，且 AB，BC 有公共点 B，所以 A，B，C 三点共线.

点拨　三点共线即三点在一条直线上，故过每两点的直线的斜率相等.

巩固练习

基 础 巩 固

一、选择题

1. 直线的倾斜角的取值范围是　　　　　　（　　）

A. $0\leqslant\alpha<\pi$　　　　B. $0\leqslant\alpha<\pi$ 且 $\alpha\neq\frac{\pi}{2}$

C. $0\leqslant\alpha<2\pi$　　　　D. $0\leqslant\alpha\leqslant\pi$

2. 下列命题中正确命题的个数是　　　　　　（　　）

①任何一条直线都有唯一的倾斜角；

②一条直线的倾斜角可以是$-30°$；

③倾斜角是 $0°$的直线只有一条.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

3. 直线过点$(1,2)$，$(4,2+\sqrt{3})$，则此直线的倾斜角 $\alpha=$　　　　　　（　　）

A. $\frac{\pi}{6}$　　　　B. $\frac{\pi}{4}$

C. $\frac{\pi}{3}$　　　　D. $\frac{\pi}{2}$

4. 直线的倾斜角 $\alpha=\frac{\pi}{4}$，则此直线的斜率 $k=$ （　　）

A. 1　　B. -1　　C. 0　　D. 无法确定

5. 直线经过点 $A(-1,-5)$，$B(1,5)$，则此直线的斜率 $k=$ （　　）

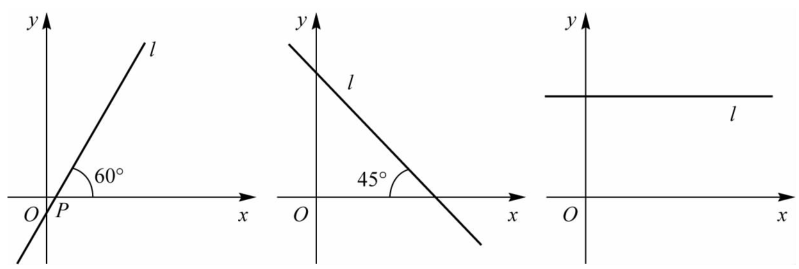
A. -1　　B. $\sqrt{3}$　　C. 5　　D. -5

6. 与 x 轴平行的直线的倾斜角是 （　　）

A. 0　　B. $\frac{\pi}{2}$　　C. π　　D. 不存在

二、填空题

7. 计算下图中直线 l 的倾斜角及斜率.



图①　　图②　　图③

(1)图①中，倾斜角 $\alpha=$________，斜率 $k=$________；

(2)图②中，倾斜角 $\alpha=$________，斜率 $k=$________；

(3)图③中，倾斜角 $\alpha=$________，斜率 $k=$________.

8. 倾斜角为 30°的直线的斜率为________.

9. 经过点(3，-5)与(5，-3)的直线的倾斜角 $\alpha=$________，斜率$k=$________.

10. 已知点 $A(a,c)$，$B(b,c)(a\neq b)$，则直线 AB 的倾斜角是________.

三、解答题

11. 根据给出的条件，计算直线的倾斜角或斜率.

(1)直线的倾斜角 $\alpha=\frac{3\pi}{4}$，求斜率 k；

(2)直线的倾斜角 $\alpha=\frac{2\pi}{3}$，求斜率 k；

(3)直线的斜率 $k=-1$，求倾斜角 α；

(4)直线经过点 $A(-3,5)$，$B(2,-3)$，求斜率 k.

12. 已知三点 $A(1,2)$，$B(-1,0)$，$C(5,4)$，试判断这三点是否在同一条直线上. 为什么？

能力提升

1. 过两点 $A(4,y)$，$B(2,-3)$ 的直线的倾斜角是 135°，则 $y=$　（　　）

A. 1　　B. -1　　C. 5　　D. -5

2. 若三点 $A(a,2)$，$B(5,1)$，$C(-4,2a)$ 在同一直线上，求 a 的值.

知识梳理答案

1. 倾斜角　$0\leqslant\alpha<\pi$　2. 斜率　$k=\tan\alpha(\alpha\neq 90^\circ)$　3. $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

6.3　直线方程

6.3.1　直线的点斜式方程与斜截式方程

学习目标

掌握直线的点斜式方程和斜截式方程.

知识梳理

1. 直线的点斜式方程：设直线 l 经过点 $P(x_0,y_0)$，且斜率为 k，则直线 l 的方程为____________________.

当斜率 $k=0$ 时，直线 l 的方程为________. 此时直线 l 平行于 x 轴（或与 x 轴重合）.

当斜率不存在时，直线 l 的方程为________. 此时直线 l 平行于 y 轴(或与 y 轴重合).

2. 直线的截距：一般地，把直线 l 与 y 轴的交点 $(0,b)$ 的纵坐标________称为直线 l 在 y 轴上的________，与 x 轴的交点 $(a,0)$ 的横坐标________称为直线 l 在 x 轴上的________.

拓展：由此可设直线的截距式方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$，其中 $ab\neq 0$.

3. 直线的斜截式方程：设直线 l 在 y 轴上的截距是 b，且斜率为 k，则直线 l 的方程为________.

（答案在本节末尾）

典型例题

例 1 已知直线 l_1 和 l_2 的倾斜角分别为 $\frac{2\pi}{3}$ 和 $\frac{\pi}{2}$，并且两条直线都经过点 $(1,-2)$，求直线 l_1 和 l_2 的方程.

解 直线 l_1 的斜率为 $k_1=\tan\frac{2\pi}{3}=-\sqrt{3}$，且经过点 $(1,-2)$，故直线 l_1 的点斜式方程为 $y-(-2)=-\sqrt{3}(x-1)$，即 $\sqrt{3}x+y+2-\sqrt{3}=0$.

直线 l_2 的斜率 k_2 不存在且经过点 $(1,-2)$，故其方程为 $x=1$.

点拨 已知一点坐标和倾斜角，用点斜式求直线方程，但直线 l_2 的倾斜角为 $\frac{\pi}{2}$，这时斜率不存在，因此 l_2 是经过点 $(1,-2)$ 且垂直于 x 轴的直线.

例 2 已知直线 l 过点 $A(3,0)$，且在 y 轴上的截距是 -2，求直线 l 的斜截式方程.

解 因为直线 l 过点 $A(3,0)$，且在 y 轴上的截距是 -2，所以直线 l 过点 $(3,0)$ 和 $(0,-2)$，将它们代入斜率公式，得 $k=\frac{-2-0}{0-3}=\frac{2}{3}$.

又因直线在 y 轴上的截距是 -2，代入斜截式方程得 $y=\frac{2}{3}x-2$.

点拨 求直线的斜截式方程，只要求出直线的斜率和在 y 轴上的截距即可解决问题.

巩固练习

基 础 巩 固

一、选择题

1. 下面四个直线方程中，可以看作直线的斜截式方程的是（　　）

A. $x=3$　　　　B. $y=-5$

C. $2y=x$　　　　D. $x=4y-1$

2. 已知直线 l 的方程为 $y-1=-\sqrt{3}(x+\sqrt{3})$，则 l 的倾斜角 α 和在 y 轴上的截距 b 分别为　（　　）

A. $\alpha=\frac{\pi}{3}, b=2$　　B. $\alpha=\frac{\pi}{3}, b=-2$　　C. $\alpha=\frac{2\pi}{3}, b=2$　　D. $\alpha=\frac{2\pi}{3}, b=-2$

3. 若 $k<0, b>0$，则直线 $y=kx+b$ 必不通过　（　　）

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

4. 若点 $P(-2,m)$ 在直线 $y=2x-3$ 上，则 $m=$　（　　）

A. -7　　B. 5　　C. 7　　D. 0

5. 经过点 $(0,3)$ 且斜率为 1 的直线的方程为　（　　）

A. $y=x+3$　　B. $y=x-3$　　C. $y=-x+3$　　D. $y=-x-3$

6. 直线 $x-2y+8=0$ 在 x 轴、y 轴上的截距分别为　（　　）

A. 8 和 4　　B. -8 和 4　　C. 8 和 -4　　D. -8 和 -4

二、填空题

7. 若点 $(-1,3)$ 在直线 $mx-2y-3=0$ 上，则 $m=$________.

8. 过点 $(2,-3)$ 且倾斜角为 $\frac{2\pi}{3}$ 的直线的点斜式方程为________.

9. 过点 $(3,-5)$ 且倾斜角为 $0°$ 的直线的方程为________.

10. 直线的斜截式方程为 $y=4x-3$，则直线的斜率是________，在 y 轴上的截距是________.

三、解答题

11. 判断下列各点是否在直线 $y=2x-1$ 上.

(1) $(2,3)$；(2) $(1,3)$；(3) $(0,-1)$.

12. 求满足下列条件的直线的方程，用点斜式或斜截式表示.

(1)经过点(−3，−3)，且倾斜角为$\frac{\pi}{4}$；

(2)倾斜角为$\frac{\pi}{3}$，且在 y 轴上的截距为 5；

(3)经过点 $A(-1,-4)$，$B(1,2)$.

能力提升

1. 斜率与直线 $y=\frac{3}{2}x$ 的斜率相等，且过点(−4，3)的直线的斜截式方程是________.

2. 求过点(−1，2)，且平行于 x 轴的直线的方程.

3. 求过点(2，3)且在两轴上截距相等的直线的斜截式方程.

知识梳理答案

1. $y-y_0=k(x-x_0)$　$y=y_0$　$x=x_0$

2. b　截距　a　截距

3. $y=kx+b$

6.3.2　直线的一般式方程

学习目标

1. 了解直线方程的一般式形式.
2. 掌握直线的点斜式方程化为一般式方程的方法.
3. 掌握直线的斜截式方程与一般式方程之间的互化.

知识梳理

1. 直线的一般式方程：二元一次方程________（A，B 不同时为零）称为直线的一般式方程.

2. 直线的一般式方程的讨论：

(1)当 $A\neq0$，$B\neq0$ 时，直线的一般式方程 $Ax+By+C=0$ 可化为 $y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$，它表示斜率为 $k=$________，且在 y 轴上的截距为 $b=$________的直线；

(2)当 $A=0$，$B\neq0$ 时，直线的一般式方程 $Ax+By+C=0$ 可化为 $y=-\frac{C}{B}$，它表示经过点________，且平行于________轴的直线；

(3)当 $A\neq0$，$B=0$ 时，直线的一般式方程 $Ax+By+C=0$ 可化为 $x=-\frac{C}{A}$，它表示经过点________，且平行于________轴的直线.

（答案在本节末尾）

典型例题

例 1　求直线 $2x-y-6=0$ 的斜率及直线在 y 轴上的截距.

解　直线 $2x-y-6=0$ 可化为 $y=2x-6$，所以此直线的斜率为 2，在 y 轴上的截距为 -6.

点拨　把直线的一般式方程化为斜截式方程，可以很容易求出直线的斜率和在 y 轴上的截距.

例 2　求满足下列条件的直线的一般式方程.

(1)直线经过点 $A(-1,4)$，倾斜角为 $\frac{3\pi}{4}$；

(2)直线倾斜角的余弦值为 $\frac{4}{5}$，横截距为 -4.

解　(1)由题意可得，$k=\tan\frac{3\pi}{4}=-1$，所以直线方程为 $y-4=-(x+1)$，即 $x+y-3=0$.

(2)设所求直线方程为 $y=kx+b$，因为 $\cos\alpha=\frac{4}{5}$，$\alpha\in[0,\pi)$，所以 $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{3}{5}$，解得 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{3}{4}$，即 $k=\frac{3}{4}$. 因为横截距为 -4，所以直线过点 $(-4,0)$. 将点 $(-4,0)$ 代入 $y=\frac{3}{4}x+b$，得 $b=3$. 所以直线方程为 $y=\frac{3}{4}x+3$，化为一般式为 $3x-4y+12=0$.

点拨　根据直线方程的几种形式选取合适的方法求解直线方程，最终化为一般式方程. 在用点斜式方程时，求斜率的方法一般有两种，即已知两点求斜率和已知倾斜角求斜率.

巩固练习

基础巩固

一、选择题

1. 经过点(2,−5)且与 y 轴垂直的直线的方程为 ( )

A. $x=2$ B. $y=2$ C. $x=-5$ D. $y=-5$

2. 经过点(6,−4)且与 y 轴平行的直线的方程为 ( )

A. $x=6$ B. $y=6$ C. $x=-4$ D. $y=-4$

3. 直线$\sqrt{3}x+y+5=0$ 的倾斜角为 ( )

A. $\frac{2\pi}{3}$ B. $\frac{5\pi}{6}$ C. $\frac{\pi}{6}$ D. $\frac{\pi}{3}$

4. 在 x 轴与 y 轴上的截距分别为−2,3 的直线的一般式方程是 ( )

A. $3x+2y+6=0$ B. $3x-2y+6=0$

C. $2x+3y+6=0$ D. $2x-3y+6=0$

5. 倾斜角为$\frac{3\pi}{4}$,且在 y 轴上的截距为 5 的直线的一般式方程为 ( )

A. $x+y-5=0$ B. $x-y+5=0$

C. $x+y+5=0$ D. $x-y-5=0$

6. 若直线 $ax+by+c=0$ 在第一、二、三象限,则 ( )

A. $ab>0,bc<0$ B. $ab>0,bc>0$

C. $ab<0,bc<0$ D. $ab<0,bc>0$

二、填空题

7. 若方程 $mx+(m^2+m)y^2+2=0$ 表示一条直线,则 $m=$________.

8. 过点(−1,−1),且倾斜角为$\frac{\pi}{3}$的直线的一般式方程为________.

9. 已知直线 l 过点(2,3),若 l 平行于 x 轴,则 l 的一般式方程为________;若 l 平行于 y 轴,则 l 的一般式方程为________.

10. 已知直线 l 经过点 $A(-2,-7)$,$B(1,2)$,则直线 l 的斜率 $k=$________;过两点的一般式方程为________.

三、解答题

11. 求直线 $2(x-1)=y+3$ 的斜率及直线在 y 轴上的截距.

12. 根据下列各条件写出直线的方程,并且化成一般式方程.

(1)经过点 $A(6,-4)$,斜率为$-\frac{4}{3}$;

(2)经过点 $B(4,2)$,平行于 x 轴;

(3)在 x 轴和 y 轴上的截距分别是$\frac{3}{2}$,-3;

(4)经过两点 $P_1(3,-2)$,$P_2(5,4)$.

能力提升

1. 如果直线 $ax+by+1=0$ 平行于 x 轴,则有 (　　)

A. $a\neq0,b\neq0$　　B. $a=0,b=0$

C. $a\neq0,b=0$　　D. $a=0,b\neq0$

2. 已知三角形的三个顶点 $A(-5,0)$,$B(3,-3)$,$C(0,2)$,求:

(1)AC 边所在直线的斜率和方程;

(2)BC 边上中线所在直线的方程.

3. 已知直线 l 经过点 $P(-5,-4)$,且与两坐标轴围成的三角形的面积为 5,求直线 l 的方程,并将直线的方程化为一般式.

知识梳理答案

1. $Ax+By+C=0$

2. (1)$-\frac{A}{B}$　$-\frac{C}{B}$　(2)$\left(0,-\frac{C}{B}\right)$　x　(3)$\left(-\frac{C}{A},0\right)$　y

6.4 两条相交直线的交点

学习目标

掌握求两条相交直线的交点坐标的方法.

知识梳理

1. 对于直线 $l_1: A_1x+B_1y+C_1=0$，$l_2: A_2x+B_2y+C_2=0$，它们的交点通过方程组 $\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2=0\end{cases}$ 求解.

方程组有________$\Leftrightarrow l_1, l_2$ 相交，交点坐标就是方程组的解.

2. 两条相交直线的斜率的关系：

(1)若直线 $l_1: y=k_1x+b_1$ 与直线 $l_2: y=k_2x+b_2$ 相交，则直线 l_1 与直线 l_2 的斜率________，即________. 反之，若直线 l_1 与直线 l_2 的斜率都存在且不相等，则直线 l_1 与直线 l_2 ________；

(2)若直线 l_1 的斜率不存在，而直线 l_2 的斜率存在，则直线 l_1 与直线 l_2 ________.

(答案在本节末尾)

典型例题

例 求直线 $x+2y-5=0$ 与直线 $y=x+1$ 的交点的坐标.

解 因为直线 $x+2y-5=0$ 的斜率为 $-\frac{1}{2}$，直线 $y=x+1$ 的斜率为 1，斜率不相等，所以两条直线相交. 解方程组 $\begin{cases}x+2y-5=0,\\y=x+1,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=1,\\y=2,\end{cases}$ 所以交点的坐标为(1,2).

点拨 若直线 l_1 与直线 l_2 相交，则两条直线交点的坐标就是两条直线的方程的公共解.

巩固练习

基础巩固

一、选择题

1.直线 $x-3y=0$ 与 $y=3$ 的交点的坐标是　（　　）

A.(1,-3)　　B.(9,3)　　C.(3,9)　　D.(9,1)

2.直线 $x-2y+6=0$ 与 $2x+y-3=0$ 的交点的坐标是　（　　）

A.(-3,0)　　B.(3,0)　　C.(0,3)　　D.(0,-3)

二、填空题

3.直线 $x-4=0$ 与 $y=-2$ 的交点的坐标是________.

4.已知直线 $4x-y+C=0$ 与 $3x+y-5=0$ 的交点的坐标是(1,2),则 $C=$________.

三、解答题

5.判断下列各组中两条直线是否相交.若相交,求出交点的坐标.

(1)l_1:$x-2y=10$ 与 l_2:$2x+y=0$;

(2)l_1:$2x+3y+2=4$ 与 l_2:$y=x-1$.

6.求经过点 $A(2,3)$ 及两条直线 l_1:$2x+5y+3=0$ 与 l_2:$y=x-2$ 的交点 B 的直线方程.

能力提升

1.如果两直线 $2x+3y-k=0$ 和 $x-ky+12=0$ 的交点在 y 轴上,那么 k 的值是　（　　）

A.-24　　B.6　　C.±6　　D.±24

2.若直线 $y=kx+3$ 与直线 $y=\dfrac{1}{k}x-5$ 的交点在直线 $y=x$ 上,则 $k=$________.

知识梳理答案

1.唯一解　2.(1)不相等　$k_1\neq k_2$　相交　(2)相交

6.5　两条直线平行的条件

学习目标

1. 理解两条直线平行的条件.
2. 掌握两条直线平行的判定方法.

知识梳理

1. 两条平行直线的斜率关系：

(1)若直线 l_1 与直线 l_2 平行且都平行于 x 轴，则直线 l_1 与直线 l_2 的斜率都为________；

(2)若直线 l_1 与直线 l_2 平行且都垂直于 x 轴，则直线 l_1 与直线 l_2 的斜率都________；

(3)若直线 $l_1: y=k_1x+b_1$ 与直线 $l_2: y=k_2x+b_2$ 平行，则直线 l_1 与直线 l_2 的斜率相等，即________.

2. 两条直线平行关系的判定：

(1)若直线 $l_1: y=k_1x+b_1$ 与直线 $l_2: y=k_2x+b_2$ 的斜率存在且相等，但在 y 轴上的截距不相等，即________，且________，则直线 l_1 与直线 l_2 ________；

(2)若直线 $l_1: y=k_1x+b_1$ 与直线 $l_2: y=k_2x+b_2$ 的斜率存在且相等，在 y 轴上的截距相等，即________，且________，则这两条直线________；

(3)若直线 l_1 与直线 l_2 的斜率都不存在，则直线 l_1 与直线 l_2 ________或________.

（答案在本节末尾）

典型例题

例 1　判断下列各组直线是否平行.

(1) $l_1: y=x+6$，$l_2: y=x-1$；

(2) $l_1: y=2x+3$，$l_2: y=2+3x$；

(3) $l_1: 6x+2y-2=4$，$l_2: y=-3x+2$；

(4) $l_1: x+2y+1=2$，$l_2: 2x+y=0$；

(5) $l_1: x=1$，$l_2: x=-2$；

(6) $l_1: y=1$，$l_2: y=-2$.

解　(1)因为直线 $y=x+6$ 与 $y=x-1$ 的斜率都为 1，且在 y 轴上的截距不相等，即 $k_1=k_2$，$b_1 \neq b_2$，所以两条直线平行.

(2)因为直线 $y=2x+3$ 与 $y=2+3x$ 的斜率不相等,所以两条直线不平行.

(3)因为直线 $6x+2y-2=4$ 与 $y=-3x+2$ 的斜率相等,且在 y 轴上的截距不相等,即 $k_1=k_2$, $b_1\neq b_2$,所以两条直线平行.

(4)因为直线 $x+2y+1=2$ 与 $2x+y=0$ 的斜率不相等,所以两条直线不平行.

(5)因为直线 $x=1$ 与 $x=-2$ 都垂直于 x 轴,两条直线的斜率都不存在,所以两条直线平行.

(6)因为直线 $y=1$ 与 $y=-2$ 的斜率都为 0,且 $b_1\neq b_2$,所以两条直线平行.

点拨　判断两直线平行时要注意应用 $k_1=k_2$, $b_1\neq b_2$. 若 $k_1=k_2$, $b_1=b_2$,则两条直线重合.

例 2　求过点 $P(1,-5)$,且与直线 $3x+y-10=0$ 平行的直线方程.

解　由题意可设所求直线方程为 $3x+y+c=0(c\neq-10)$,把点 P 的坐标代入得 $3-5+c=0$,解得 $c=2$,因此所求直线方程是 $3x+y+2=0$.

点拨　用公式和待定系数法求直线方程的要点:通过对已知条件的分析,寻求满足直线方程的两个独立的条件,代入公式写出直线方程或列出直线方程求待定系数,在使用直线方程时,要注意方程成立的条件,必要时要分类讨论.

巩固练习

基础巩固

一、选择题

1. 若直线 l 与直线 $4x-y-2=0$ 平行,则直线 l 的斜率为　(　　)

A. 4　　B. -4

C. $\frac{1}{4}$　　D. $-\frac{1}{4}$

2. 直线 $x-y+3=0$ 与直线 $2x-2y-8=0$ 的位置关系是　(　　)

A. 平行　　B. 不平行

C. 平行或重合　　D. 既不平行也不重合

3. 直线 $2x-y+m=0$ 与直线 $4x-2y-8=0$ 的位置关系是　(　　)

A. 平行　　B. 不平行

C. 平行或重合　　D. 既不平行也不重合

4. 若直线 $mx+y-2=0$ 与 $x+y-1=0$ 互相平行,则实数 m 的值为　(　　)

A. 0　　B. -1　　C. 1　　D. $\frac{1}{2}$

5. 过点(2,4)且与直线 $2x+4y+3=0$ 平行的直线的方程是　(　　)

A. $2x+y-8=0$　　B. $x+2y-10=0$

C. $x+2y+10=0$　　D. $2x+y+8=0$

6. 若直线 $4x-3y+m=0$ 与直线 $8x-6y-8=0$ 重合,则实数 m 的值为 ( )

A. 4　　B. -4　　C. 8　　D. -8

二、填空题

7. 若直线 $x-2ay-1=0$ 与直线 $x-ay+5=0$ 平行,则 $a=$________.

8. 与直线 $x-3y+1=0$ 平行,且在 x 轴上的截距是 -3 的直线的方程为________.

9. 过点(2,3),且与直线 $y=3x$ 平行的直线方程为________.

三、解答题

10. 已知直线 l 经点(3,7),且与直线 $y=3x+5$ 平行,求直线 l 的方程.

11. 已知直线 l 经过点(0,2),且与直线 $x+2y+1=2$ 平行,求直线 l 的方程.

12. 已知直线 l 经过点(−1,3),且与直线 $y=-2$ 平行,求直线 l 的方程.

能力提升

1. 若直线 $x+ay-2a-2=0$ 与 $ax+y-a-1=0$ 互相平行,则实数 a 的值为 ( )

A. $-\frac{1}{2}$　　B. -1　　C. 1　　D. $\frac{1}{2}$

2. 已知直线 l 经过(−1,−2),且与倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$ 的直线平行,求直线 l 的方程.

知识梳理答案

1. (1)0　(2)不存在　(3)$k_1=k_2$

2. (1)$k_1=k_2$　$b_1\neq b_2$　平行　(2)$k_1=k_2$　$b_1=b_2$　重合　(3)平行　重合

6.6　两条直线垂直的条件

学习目标

1. 理解两条直线垂直的条件.
2. 掌握两条直线垂直的判定方法.

知识梳理

两条直线垂直的判定：

(1)当直线 $l_1: y=k_1x+b_1$ 与直线 $l_2: y=k_2x+b_2$ 的斜率都存在且不等于零时，如果它们互相垂直，那么它们的斜率互为负倒数；反之，如果它们的斜率互为负倒数，那么它们互相垂直，记作 $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow$________或________；

(2)斜率不存在的直线与斜率为零的直线________.

（答案在本节末尾）

典型例题

例 1　判断直线 $x-2y+1=0$ 与直线 $y=2x+1$ 是否互相垂直.

解　因为直线 $x-2y+1=0$ 的斜率为$\frac{1}{2}$，直线 $y=2x+1$ 的斜率为 2，而$\frac{1}{2}\times 2=1\neq -1$，所以两条直线不垂直.

点拨　如果直线 l_1 与直线 l_2 的斜率都存在且不等于零，那么 $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2=-1$.

例 2　已知直线 l 经过点(0,2)，且垂直于直线 $x+2y+1=0$，求直线 l 的方程.

解　因为直线 $x+2y+1=0$ 的斜率为$-\frac{1}{2}$，而直线 l 与 $x+2y+1=0$ 垂直，所以直线 l 的斜率为 2，从而直线 l 的方程为 $y=2x+2$.

点拨　如果直线 l_1 与直线 l_2 的斜率都存在且不等于零，那么 $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2=-1$，依照公式我们可以求出直线 l 的斜率，然后再根据斜截式求出直线的方程.

巩固练习

基础巩固

一、选择题

1.若直线 l 与直线 $x-y-2=0$ 垂直，则直线 l 的斜率为　（　　）

A. 1　　B. -1　　C. 0　　D. 不存在

2.直线 $2x+3y+5=0$ 与直线 $x-2y+3=0$ 的位置关系是　（　　）

A. 垂直　　B. 平行

C. 相交但不垂直　　D. 重合

3.直线 $x=2$ 与直线 $y=-3$ 的位置关系是　（　　）

A. 垂直　　B. 平行

C. 相交但不垂直　　D. 重合

4.已知直线 $l_1:y=3x+1$ 与直线 $l_2:ax+y+1=0$，若 $l_1\perp l_2$，则 a 的值为　（　　）

A. $-\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. -3　　D. 3

5.过点 $P(-1,3)$ 且垂直于直线 $x-2y+3=0$ 的直线方程为　（　　）

A. $2x+y-5=0$　　B. $2x+y-1=0$

C. $x+2y-5=0$　　D. $x-2y+7=0$

二、填空题

6.与直线 $x-y-7=0$ 垂直的直线的倾斜角是________.

7.和直线 $3x+4y-7=0$ 垂直，并且在 x 轴上的截距是 -2 的直线方程是________.

8.已知直线 $ax+2y-5=0$ 与直线 $2x-5y+7=0$ 垂直，则 $a=$________.

9.若直线 l 经过点 $(2,1)$，且垂直于 $x-2y+1=0$，则直线 l 的方程为________.

三、解答题

10.已知直线 l 经过点 $(2,0)$，且与直线 $y=x-4$ 垂直相交于点 P.

(1)求直线 l 的方程；

(2)求点 P 的坐标.

能力提升

1. 若直线 $mx+4y-2=0$ 与直线 $2x-5y+n=0$ 垂直，垂足为 $(1,p)$，则实数 n 的值为　(　　)

A. -12　　B. -2　　C. 0　　D. 10

2. 求过直线 $3x+2y+1=0$ 与 $2x-3y+5=0$ 的交点，且垂直于直线 l：$6x-2y+5=0$ 的直线的方程.

3. 已知△ABC 的三个顶点为 $A(-2,1)$，$B(2,5)$，$C(4,-3)$，求 BC 边上的高所在直线的方程.

知识梳理答案

(1) $k_1=-\frac{1}{k_2}$　$k_1\cdot k_2=-1$　(2)互相垂直

6.7　点到直线的距离

学习目标

1. 了解点到直线的距离公式.
2. 能用公式求两条平行线间的距离.

知识梳理

1. 点到直线的距离公式：点 $P_0(x_0,y_0)$ 到直线 $Ax+By+C=0$ 的距离为______________.

注意：使用公式前，需要把直线方程化成一般式.

2. 两条平行直线的距离公式：直线 $Ax+By+C_1=0$ 到直线 $Ax+By+C_2=0$ 的距离为__________________.

注意：(1)利用公式时，要注意 x,y 的系数必须分别对应相等.

(2)求两条平行线之间的距离也可以先在一条直线上取一个坐标数值比较简单的点，然后利用点到直线的距离公式，求出这个点到另一条直线的距离，即为两条平行直线间的距离.

(答案在本节末尾)

典型例题

例 1 求点 $P(1,0)$ 到直线 $l:x-y+3=0$ 的距离.

解 根据点到直线的距离公式，得 $d=\frac{|1-0+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=2\sqrt{2}$.

点拨 在应用公式时要注意直线方程的形式，不是一般式的要化成一般式.

例 2 求两条平行直线 $2x+y+1=0$ 与 $y=-2x+4$ 之间的距离.

解 解法一：$y=-2x+4$ 化成一般式为 $2x+y-4=0$，在直线 $2x+y+1=0$ 上取一点 $(0,-1)$，因为点 $(0,-1)$ 到直线 $2x+y-4=0$ 的距离 $d=\frac{|2\times 0+(-1)-4|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}$，故两条平行直线 $2x+y+1=0$ 与 $y=-2x+4$ 之间的距离为 $\sqrt{5}$.

解法二：$d=\frac{|1-(-4)|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}$.

点拨 求两条平行线之间的距离可以先在一条直线上取一个坐标数值比较简单的点，然后利用点到直线的距离公式，求出这个点到另一条直线的距离，即为两条平行直线间的距离. 还可以直接应用两平行线间的距离公式求解.

巩固练习

基 础 巩 固

一、选择题

1. 原点到直线 $x+y+1=0$ 的距离为 ( )

A. 1　　B. 2

C. $\sqrt{2}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

2. 点 $P(1,2)$ 到直线 $4x+3y+5=0$ 的距离为 ( )

A. 2　B. 3　C. 4　D. 5

3. 若点 $P(0,2)$ 到直线 $ax+4y+2=0$ 的距离为 2，则 a 的值为 ( )

A. 3　B. 2　C. 3 或 -3　D. 2 或 -2

4. 两平行直线 $5x+12y+3=0$ 与 $10x+24y+5=0$ 之间的距离是 ( )

A. $\frac{1}{13}$　B. $\frac{1}{26}$　C. $\frac{2}{13}$　D. $\frac{5}{26}$

5. 若点 $(4,a)$ 到直线 $4x-3y-1=0$ 的距离等于 3，则 a 的值为 ( )

A. 0　B. 10　C. 0 或 10　D. 不存在

6. 若点 $P(x,y)$ 在直线 $x+y-4=0$ 上，O 为原点，则 $|OP|$ 的最小值是 ( )

A. $\sqrt{10}$　B. $2\sqrt{2}$　C. $\sqrt{6}$　D. 2

二、填空题

7. 点 $M(1,2)$ 到直线 $6x+8y+3=0$ 的距离为________.

8. 两条平行直线 $4x+3y+6=0$ 与 $8x+6y+2=0$ 的距离为________.

9. 点 $P(-1,2)$ 到直线 $x-3=0$ 的距离为________.

10. 点 $P(a,0)$ 到直线 $3x+4y-6=0$ 的距离大于 3，则实数 a 的取值范围为________.

三、解答题

11. 求 $P(2,-3)$ 到直线 l：$y=3x+1$ 的距离.

12. 求与直线 $4x-3y+8=0$ 平行且距离为 3 的直线方程.

能 力 提 升

1. 已知直线 l 经过点 $P(5,10)$，且原点到它的距离为 5，则直线 l 的方程为________.

2. 直线 l 平行于直线 $4x-3y+5=0$，且 $P(2,-3)$ 到 l 的距离为 4，求直线 l 的方程.

知识梳理答案

1. $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

2. $d=\dfrac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

6.8 圆的方程

6.8.1 圆的标准方程

学习目标

1. 了解圆的定义.
2. 掌握圆的标准方程.

知识梳理

1. 圆的定义:平面内到定点的距离为定长的动点的轨迹称为________,其中定点称为圆的________,定长称为圆的________.

2. 圆的标准方程:以点 $C(a,b)$ 为圆心,r 为半径的圆的标准方程为________________. 特别地,以坐标原点 $O(0,0)$ 为圆心,r 为半径的圆的标准方程为______________.

(答案在本节末尾)

典型例题

例 1 求以 $C(1,-2)$ 为圆心,5 为半径的圆的标准方程.

解 因为圆心 $C(1,-2)$,半径 $r=5$,所以圆的标准方程为 $(x-1)^2+(y+2)^2=25$.

点拨 根据圆的定义可得.

例 2 已知圆的标准方程为 $(x+4)^2+(y-3)^2=16$,求圆心坐标及半径.

解 因为圆的标准方程为 $(x+4)^2+(y-3)^2=16$,所以圆心坐标为 $(-4,3)$,半径 $r=4$.

点拨 根据圆的标准方程的形式可得.

巩固练习

基础巩固

一、选择题

1. 到点$(3,-2)$的距离等于5的轨迹方程为　　(　　)

A. $(x-3)^2+(y+2)^2=5$　　B. $(x-3)^2+(y+2)^2=25$

C. $(x+3)^2+(y-2)^2=5$　　D. $(x+3)^2+(y-2)^2=25$

2. 圆心在点$C(-2,0)$，半径$r=5$的圆的标准方程为　　(　　)

A. $(x+2)^2+y^2=5$　　B. $(x+2)^2+y^2=25$

C. $x^2+(y+2)^2=5$　　D. $x^2+(y+2)^2=25$

3. 圆心在点$C(2,0)$，半径$r=7$的圆的标准方程为　　(　　)

A. $(x-2)^2+y^2=7$　　B. $(x-2)^2+y^2=49$

C. $x^2+(y-2)^2=7$　　D. $x^2+(y-2)^2=49$

4. 圆$(x-1)^2+(y+4)^2=9$的圆心坐标和半径分别为　　(　　)

A. $(1,-4)$，3　　B. $(1,-4)$，9

C. $(-1,4)$，3　　D. $(-1,4)$，9

5. 圆$(x+1)^2+(y-4)^2=16$的圆心坐标和半径分别为　　(　　)

A. $(1,-4)$，4　　B. $(1,-4)$，16

C. $(-1,4)$，4　　D. $(-1,4)$，16

6. 已知点$M(1,2)$，$N(3,4)$，则以线段MN为直径的圆的标准方程是　　(　　)

A. $(x+2)^2+(y+3)^2=2$　　B. $(x-2)^2+(y-3)^2=2$

C. $(x+2)^2+(y+3)^2=8$　　D. $(x-2)^2+(y-3)^2=8$

二、填空题

7. 圆心是原点，半径是1的圆的标准方程为________.

8. 圆$x^2+y^2=4$的圆心坐标为________，半径为________.

9. 圆$(x-3)^2+(y+2)^2=16$的圆心坐标为________，半径为________.

10. 若圆$x^2+y^2=m$经过点$(-3,4)$，则圆的半径为________.

三、解答题

11. 求圆心在点$C(3,2)$，并且经过点$D(-1,4)$的圆的标准方程.

12. 已知点 $A(8,3)$，$B(2,-5)$，求以 AB 为直径的圆的方程，并判断点 $P(3,2)$ 是在圆内、圆上还是圆外.

能力提升

1. 点 $P(m,5)$ 与圆 $x^2+y^2=25$ 的位置关系 (　　)

A. 在圆外　　B. 在圆上

C. 在圆内　　D. 在圆上或圆外

2. 过点 $C(-1,1)$ 和点 $D(1,3)$ 且圆心在 x 轴上的圆的方程是 (　　)

A. $x^2+(y-2)^2=10$　　B. $x^2+(y+2)^2=10$

C. $(x+2)^2+y^2=10$　　D. $(x-2)^2+y^2=10$

3. 求经过直线 $x+2y+4=0$ 与 $3x-2y-12=0$ 的交点，且圆心为 $C(-1,1)$ 的圆的方程.

知识梳理答案

1. 圆　圆心　半径

2. $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$　$x^2+y^2=r^2$

6.8.2　圆的一般方程

学习目标

了解二元二次方程表示圆的条件和圆的一般方程.

知识梳理

1. 圆的一般方程：

将方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$①配方整理，得 $\left(x+\dfrac{D}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{E}{2}\right)^2=\dfrac{D^2+E^2-4F}{4}$.

(1)当 $D^2+E^2-4F>0$ 时，二元二次方程①表示以________为圆心，以________为半径的圆；

(2)当 $D^2+E^2-4F=0$ 时，二元二次方程①表示一个点________；

(3)当 $D^2+E^2-4F<0$ 时，二元二次方程①无意义，不表示任何图形.

综上，当 $D^2+E^2-4F>0$ 时，二元二次方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 称为圆的一般方程.

2. 圆的一般方程的特点：

(1)含 x^2 项的系数与含 y^2 项的系数都是________；

(2)方程不含 xy 项；

(3) D^2+E^2-4F ________ 0.

(答案在本节末尾)

典型例题

例 1　判断方程 $x^2+y^2-4x+6y+9=0$ 是不是圆的方程. 如果是，求出圆心坐标和半径.

解　解法一：将方程配方，得

$(x^2-4x+4)+(y^2+6y+9)=4$，即 $(x-2)^2+(y+3)^2=2^2$.

所以方程表示圆心为 $(2,-3)$，半径为 2 的一个圆.

解法二：与圆的一般方程比较可知，$D=-4$，$E=6$，$F=9$，所以 $D^2+E^2-4F=16+36-36=16>0$，所以方程为圆的方程，且由 $\frac{D}{2}=-2$，$\frac{E}{2}=3$，$\frac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2}=2$ 可知，圆心坐标为 $(2,-3)$，半径为 2.

点拨　已知圆的一般方程，求圆心坐标和半径，一般采用通过配方将方程化为标准方程的方法，也可以利用圆的一般方程的结论.

例 2　若圆过 $A(2,0)$，$B(4,0)$，$C(0,2)$ 三点，求这个圆的方程.

解　设所求圆的方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，则有

$$\begin{cases}4+2D+F=0,\\16+4D+F=0,\\4+2E+F=0,\end{cases}\text{解得}\begin{cases}D=-6,\\E=-6,\\F=8.\end{cases}$$

所以所求圆的方程为 $x^2+y^2-6x-6y+8=0$.

点拨　若已知条件与圆心和半径关系不大，一般用圆的一般方程. 求圆的方程时经常使用待定系数法.

巩固练习

基础巩固

一、选择题

1. 圆心为 $C(1,-2)$，半径为 4 的圆的一般方程为（　　）

A. $x^2+y^2-2x+4y+1=0$　　B. $x^2+y^2-2x+4y-11=0$

C. $x^2+y^2+2x-4y+1=0$　　D. $x^2+y^2+2x-4y-11=0$

2. 方程 $2x^2+2y^2-4x+8y+10=0$ 表示的图形是（　　）

A. 一个点　　B. 一个圆　　C. 一条直线　　D. 不存在

3. 圆 $x^2+y^2-4x+6y+9=0$ 的圆心坐标和半径分别为（　　）

A. $(2,3)$，4　　B. $(2,-3)$，4

C. $(2,3)$，2　　D. $(2,-3)$，2

4. 圆 $x^2+y^2-2x+6y+8=0$ 的周长等于（　　）

A. $\sqrt{2}\pi$　　B. 2π　　C. $2\sqrt{2}\pi$　　D. 4π

5. 若圆 $x^2-2x+y^2+4y+m=0$ 的半径为 2，则 m 的值是（　　）

A. 1　　B. 4　　C. -1　　D. -4

6. 下列直线中，过圆 $x^2+y^2+6x-2y-15=0$ 的圆心的直线是（　　）

A. $x+2y-1=0$　　B. $x+2y+1=0$

C. $x-2y-1=0$　　D. $x-2y+1=0$

二、填空题

7. 圆 $x^2-2x+y^2+4y=-1$ 的圆心坐标为________，半径为________.

8. 点 $P(1,-2)$ 和圆 C：$x^2+y^2+m^2x+y+m^2=0$ 的位置关系是________（填“在圆内”“在圆上”或“在圆外”）.

9. 若方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 表示以 $(2,-4)$ 为圆心，4 为半径的圆，则 $F=$________.

10. 以点 $(1,1)$ 为圆心，且过点 $(2,-3)$ 的圆的一般方程为________.

三、解答题

11. 求经过三点 $A(1,-1)$，$B(2,0)$，$C(0,0)$ 的圆.

12. 若方程 $x^2+y^2-2x+y+k=0$ 表示一个圆，求实数 k 的取值范围.

能 力 提 升

1. 过点(3，−1)，圆心在 y 轴上，且与 x 轴相切的圆的方程为 (　　)

A. $x^2+y^2-10y=0$　　B. $x^2+y^2+10y=0$

C. $x^2+y^2+10x=0$　　D. $x^2+y^2-10x=0$

2. 求圆心在直线 $3x+2y=0$ 上，并且与 x 轴的交点分别为(−2，0)，(6，0)的圆的方程.

知识梳理答案

1. (1) $\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$　$\frac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2}$　(2) $\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$

2. (1)1　(3)>

6.9　直线与圆的位置关系

学习目标

1. 理解直线与圆的位置关系及判定方法.
2. 初步掌握直线与圆相交时弦长的求法及圆的切线方程的求法.

知识梳理

1. 直线与圆位置关系的判别方法：

(1)方法一：设圆的标准方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，则圆心 $M(a,b)$ 到直线 $Ax+By+C=0$ 的距离为________________，则

①直线 l 与圆相离，当且仅当________；

②直线 l 与圆相切，当且仅当________；

③直线 l 与圆相交，当且仅当________.

(2)方法二：设直线 l 的方程为 $Ax+By+C=0$，圆的方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ $(D^2+E^2-4F>0)$，两个方程联立，经消元法后得到一元二次方程，其判别式为 Δ，则

①直线 l 与圆相离，当且仅当________；

②直线 l 与圆相切，当且仅当________；

③直线 l 与圆相交，当且仅当________.

2. 圆的切线方程：

求圆的切线方程的关键是设出切线的斜率 k，然后利用圆心到切线的距离等于圆的半径来确定 k. 应注意斜率不存在的情况.

(1)点 P 在圆上，过点 P 只能作________条直线与圆相切；

(2)点 P 在圆外，过点 P 可以作________条直线与圆相切；

(3)点 P 在圆内，过点 P 可以作 ________条直线与圆相切.

3. 弦长公式：

若直线 l：$Ax+By+C=0$ 与圆 M：$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 交于 P，Q 两点，线段 PQ 为圆的一条弦，圆心 $M(a,b)$ 到直线 $Ax+By+C=0$ 的距离为 d，则 $|PQ|=$________.

（答案在本节末尾）

典型例题

例 1 判断直线 $x-y-4=0$ 与圆 $(x-1)^2+(y-1)^2=16$ 的位置关系.

解 圆 $(x-1)^2+(y-1)^2=16$ 的圆心为 $(1,1)$，半径为 4.

因为圆心到直线的距离为 $d=\dfrac{|1-1-4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=2\sqrt{2}<4=r$，所以直线与圆相交.

点拨 设圆的标准方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，则圆心 $M(a,b)$ 到直线 $Ax+By+C=0$ 的距离为 $d=\dfrac{|Aa+Bb+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$，则

(1)当 $d>r$ 时，直线与圆相离；

(2)当 $d=r$ 时，直线与圆相切；

(3)当 $d<r$ 时，直线与圆相交.

例 2 已知直线 l：$y=kx+5$，圆 C：$(x-1)^2+y^2=1$，当 k 为何值时，直线 l 与圆 C 相离、相切、相交？

解 圆心为 $C(1,0)$，半径为 1，圆心到直线的距离为 $d=\dfrac{|k+5|}{\sqrt{k^2+1}}$.

(1)当 $d>r$，即 $\dfrac{|k+5|}{\sqrt{k^2+1}}>1$ 时，直线与圆相离，即当 $k>-\dfrac{12}{5}$时，直线与圆相离.

(2)当 $d=r$，即 $\frac{|k+5|}{\sqrt{k^2+1}}=1$ 时，直线与圆相切，即当 $k=-\frac{12}{5}$时，直线与圆相切.

(3)当 $d<r$，即 $\frac{|k+5|}{\sqrt{k^2+1}}<1$ 时，直线与圆相交，即当 $k<-\frac{12}{5}$时，直线与圆相交.

点拨　讨论直线与圆的位置关系一般有两种方法.

(1)代数法，即将直线的方程与圆的方程联立，消元得到一个一元二次方程，然后用判别式去判断直线与圆的位置关系.

(2)几何法，即利用圆心到直线的距离与半径比较来判定直线与圆的位置关系. 在判断时要注意直线的斜率不存在的情形.

例 3　过点 $P(2,3)$向圆$(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 引切线，求切线方程.

解　由题意得，圆心坐标为$(1,1)$，半径 $r=1$. 因为$(2-1)^2+(3-1)^2>1$，所以点 P 在圆外，故切线有两条.

当 k 存在时，设切线方程为 $y-3=k(x-2)$，即 $kx-y+3-2k=0$，则圆心到切线的距离 $d=\frac{|2-k|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，解得 $k=\frac{3}{4}$，所以切线方程为 $y-3=\frac{3}{4}(x-2)$，即 $3x-4y+6=0$.

当 k 不存在时，切线方程为 $x=2$.

所以所求切线方程为 $3x-4y+6=0$ 或 $x=2$.

点拨　首先要判断点与圆的位置关系，明确所求的切线有几条，然后设切线的方程，利用圆心到切线的距离等于半径来求切线的斜率. 此题一定要注意切线的斜率不存在的情形，防止漏解.

例 4　已知直线 $3x+4y-5=0$ 与圆 $x^2+y^2=4$ 相交于 A,B 两点，求弦 AB 的长.

解　圆 $x^2+y^2=4$ 的圆心为$(0,0)$，到直线 $3x+4y-5=0$ 的距离 $d=\frac{|-5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1$，故 $|AB|=2\sqrt{4-1}=2\sqrt{3}$.

点拨　根据弦长公式，若直线 $l:Ax+By+C=0$ 与圆 $M:(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 交于 P,Q 两点，线段 PQ 为圆的一条弦，圆心(a,b)到直线 $Ax+By+C=0$ 的距离为 d，则 $|PQ|=2\sqrt{r^2-d^2}$.

巩固练习

基 础 巩 固

一、选择题

1. 直线 $5x+12y-8=0$ 与圆$(x-1)^2+(y+3)^2=8$ 的位置关系是　　(　　)

A. 相交　　B. 相离

C. 相切　　D. 无法确定

2. 下列直线中，与圆 $x^2+y^2+2x-3=0$ 相切的是 （　　）

A. $3x+4y+7=0$　　B. $3x-4y-7=0$

C. $4x+3y+7=0$　　D. $4x-3y-7=0$

3. 若直线 $x-y+1=0$ 与圆 $(x-a)^2+y^2=2$ 有公共点，则实数 a 的取值范围是 （　　）

A. $[-3,-1]$　　B. $[-1,3]$

C. $[-3,1]$　　D. $(-\infty,-3]\cup[1,+\infty)$

4. 已知直线 l：$3x-4y+m=0$ 与圆 C：$(x-1)^2+(y+2)^2=9$ 相切，则 $m=$ （　　）

A. -4　　B. -26 或 4　　C. 4　　D. -4 或 26

5. 以点 $(1,-2)$ 为圆心，且与直线 $x-y-1=0$ 相切的圆的方程是 （　　）

A. $(x-1)^2+(y+2)^2=2$　　B. $(x-1)^2+(y+2)^2=1$

C. $(x+1)^2+(y-2)^2=2$　　D. $(x+1)^2+(y-2)^2=1$

6. 已知圆 C：$x^2+y^2=10$，过点 $P(1,3)$ 作圆 C 的切线，则切线方程为 （　　）

A. $x+3y-10=0$　　B. $x-3y+8=0$

C. $3x+y-6=0$　　D. $3x-y+10=0$

二、填空题

7. 圆 $(x-1)^2+(y+1)^2=4$ 的圆心到直线 $3x-4y-4=0$ 的距离是________.

8. 圆 $(x+3)^2+(y-2)^2=9$ 与 y 轴的位置关系是________.

9. 直线 $x+y=2$ 与圆 $x^2+y^2=2$ 的位置关系是________.

10. 直线 $x+y-4=0$ 与圆 $(x-3)^2+(y-3)^2=4$ 相交于 A，B 两点，则 $|AB|=$________.

三、解答题

11. 判断下列直线与圆的位置关系.

(1) 直线 $3x-4y+4=0$ 与圆 $(x-1)^2+(y+2)^2=25$；

(2) 直线 $x-y+1=0$ 与圆 $x^2+y^2-2x-1=0$；

(3) 直线 $3y=-4x$ 与圆 $(x-4)^2+y^2=4$.

12. 求过点 $(1,2)$ 且与圆 $(x-2)^2+y^2=4$ 相切的直线方程.

能力提升

1. 若直线 $3x+4y-5=0$ 与圆 $x^2+y^2=m$ 相切，则 $m=$________.

2. 求以点 $C(1,2)$ 为圆心，且与直线 $3x+4y-1=0$ 相切的圆的方程.

3. 已知圆的方程 $x^2+y^2=2$ 与直线 l：$y=x+b$. 当 b 分别为何值时，圆与直线 l 相交、相切、相离？

知识梳理答案

1. (1) $d=\dfrac{|Aa+Bb+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$　①$d>r$　②$d=r$　③$d<r$

(2) ①$\Delta<0$　②$\Delta=0$　③$\Delta>0$

2. (1) 1　(2) 2　(3) 0　3. $2\sqrt{r^2-d^2}$

6.10　圆的方程的应用

学习目标

初步掌握用直线方程与圆的方程解决实际问题的方法.

知识梳理

在解解析几何应用题时，首先要注重对题目的阅读理解，分析其含义；其次是要寻找和整理数据，建立数学模型，寻求几何元素之间的关系，抓住几何特征列方程或方程组；最后解方程或方程组，并代入实际问题检验.

典型例题

例 1　从点 $P(-2,1)$ 射出一条光线，经 x 轴反射后，反射光线恰好平分圆 C：$x^2+y^2-2x-2y+1=0$ 的圆周，求反射光线所在的直线的方程.

解　因为反射光线平分圆 C 的圆周，所以反射光线过圆 C 的圆心.

将圆 C 的一般方程化为标准方程，得 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$，所以反射光线经过点 $C(1,1)$.

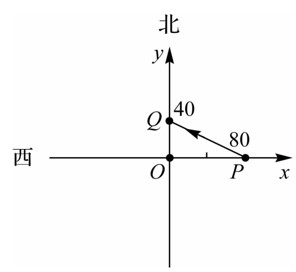
根据光的反射定律可知，过点 P 关于 x 轴的对称点 P' 与点 C 的直线 $P'C$，即为反射光线所在的直线.

因为点 $P(-2,1)$ 关于 x 轴的对称点为 $P'(-2,-1)$，所以直线 $P'C$ 的斜率为 $k=\dfrac{1-(-1)}{1-(-2)}=\dfrac{2}{3}$，所以直线 $P'C$ 的点斜式方程为 $y-1=\dfrac{2}{3}(x-1)$，即 $2x-3y+1=0$.

故反射光线所在的直线的方程为 $2x-3y+1=0$.

例 2　一个小岛的周围有环岛暗礁，暗礁分布在以小岛的中心为圆心，半径为 30 km 的圆形区域. 已知小岛中心位于轮船正西 80 km 处，港口位于小岛中心正北 40 km 处，如果轮船沿直线返港，那么它是否会有触礁危险.

解　以小岛为原点，轮船和小岛的连线所在直线为 x 轴，小岛与港口的连线所在直线为 y 轴，建立平面直角坐标系如图所示.



设小岛、轮船、港口对应位置分别为点 O,P,Q，则它们的坐标分别为 $O(0,0)$，$P(80,0)$，$Q(0,40)$. 设轮船航线所在直线 PQ 的斜率为 k，则 $k=\dfrac{40-0}{0-80}=-\dfrac{1}{2}$，从而直线 PQ 的斜截式方程为 $y=-\dfrac{1}{2}x+40$，即 $x+2y-80=0$.

环岛暗礁的分布区域是以 $O(0,0)$ 为圆心，以 $r=30$ 为半径的圆形区域. 因为圆心 $O(0,0)$ 到直线 PQ 的距离为 $d=\dfrac{|1\times0+2\times0-80|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{80}{\sqrt{5}}>30$，所以轮船航线与以小岛为圆心，以 30 km 为半径的圆相离，从而轮船沿直线返港不会有触礁危险.

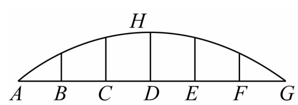
点拨　读懂题意，建立平面直角坐标系是解决实际问题的关键.

巩固练习

基础巩固

1. 从点 $P(-1,2)$ 射出一条光线，经过 x 轴反射后过点 $Q(3,4)$，求反射点 M 的坐标.

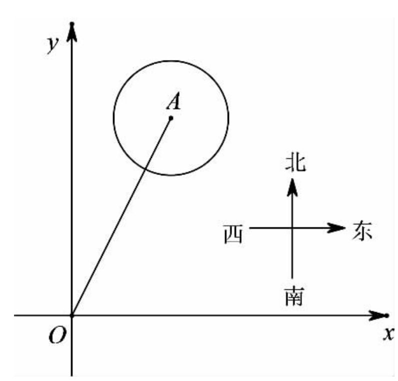
2. 某施工单位砌圆拱时，需要制作如图所示的木模，设圆拱高为1 m，跨度为 6 m，中间需要等距离安装 5 根支撑柱子，求 E 点的柱子的长度(精确到 0.1 m).



3. 一艘科考船在点 O 处监测到北偏东 30°方向 40 海里处有一个小岛 A，距离小岛 10 海里范围内可能存在暗礁.

(1)若以点 O 为原点，正东、正北方向分别为 x 轴、y 轴正方向建立平面直角坐标系，写出暗礁所在区域边界的⊙A 的方程；

(2)科考船先向东行驶了 50 海里到达 B 岛后，再以北偏西 30°方向行驶的过程中，是否有触礁的风险？



能力提升

1. 光线从点 $P(4,1)$ 射出，经过 x 轴反射后再经过 y 轴反射，最后到达点 $Q(1,6)$，求光线在 x 轴上的反射点 M_1 的坐标和在 y 轴上的反射点 M_2 的坐标.

2. 已知隧道的截面是半径为 5 m 的半圆，车辆只能在道路中心线一侧行驶，一辆宽为 2.6 m，高为 3 m 的货车能不能驶入这个隧道？

第六单元测试题

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

1. 点(3,2)与(1,0)所连线段的中点的坐标为 （　　）

A. (−1,−1)　　B. (1,1)　　C. (2,1)　　D. (4,2)

2. 若直线经过点(2,3)与(4,5)，则直线的倾斜角是 （　　）

A. 30°　　B. 45°　　C. 60°　　D. 135°

3. 直线 $x+2y-3=0$ 经过点 （　　）

A. (1,1)　　B. (−1,−1)　　C. (2,1)　　D. (−2,1)

4. 直线 $y=\sqrt{3}x+4$ 的倾斜角是 （　　）

A. 30°　　B. 45°　　C. 60°　　D. 120°

5. 直线 $3x-2y-6=0$ 在 y 轴上的截距是 （　　）

A. −6　　B. 6　　C. −3　　D. 3

6. 过点 $C(2,-1)$，且与 x 轴平行的直线的方程是 （　　）

A. $x=2$　　B. $x=-1$　　C. $y=2$　　D. $y=-1$

7. 已知两条直线 $ax-y-2=0$ 和 $(a+2)x-y+1=0$ 互相垂直，则 a 等于　(　　)

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

8. 圆 $x^2+y^2-4x=0$ 在点 $P(1,\sqrt{3})$ 处的切线方程为　(　　)

A. $x+\sqrt{3}y-2=0$　　B. $x+\sqrt{3}y-4=0$

C. $x-\sqrt{3}y+4=0$　　D. $x-\sqrt{3}y+2=0$

9. 直线 $3x+4y-10=0$ 与圆 $x^2+y^2=9$ 的位置关系是　(　　)

A. 相交过圆心　　B. 相切　　C. 相交不过圆心　　D. 相离

10. 一辆卡车宽 2.7 m，要经过一个半径为 4.5 m 的半圆形隧道(双车道，不得违章)，则这辆卡车的平顶车篷篷顶距离地面的高度不得超过　(　　)

A. 1.4 m　　B. 3.0 m　　C. 3.6 m　　D. 4.5 m

二、填空题(本大题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分)

11. 已知点 $(m,5)$ 与 $(3,n)$ 所连线段的中点坐标是 $(2,3)$，则 $m=$________，$n=$________.

12. 已知点 $A(1,3)$ 与 $B(5,0)$，则 $|AB|=$________.

13. 直线 $x+y-3=0$ 的斜率是________，倾斜角是________，其斜截式方程是________.

14. 点 $(2,1)$ 到直线 $3x+4y-5=0$ 的距离是________.

15. 圆 $x^2+y^2-6x+4y-12=0$ 的圆心坐标是________.

16. 若圆 $x^2+y^2=1$ 与直线 $y=kx+2$ 没有公共点，则 k 的取值范围是________.

三、解答题(本大题共 4 小题，每小题 9 分，共 36 分)

17. 已知点 $A(-1,2)$ 和 $B(7,-4)$，求以 AB 为直径的圆的标准方程.

18. 已知直线 l_1：$x+2y-3=0$ 与 l_2：$2x-y-1=0$.

(1)求直线 l_1 与 l_2 的交点 A 的坐标；

(2)求过点 A 且与直线 $x+3y-5=0$ 垂直的直线的方程.

19.已知直线 l 过直线 $3x-4y+2=0$ 与 y 轴的交点且平行于直线 $x+2y-3=0$.

(1)求直线 l 的方程；

(2)求过三点$(0,-4)$,$(2,0)$,$(-1,-1)$的圆的方程；

(3)判断直线 l 与圆的位置关系.

20.已知方程 $x^2+y^2-2mx-4y+5m=0$ 表示的曲线是圆 C.

(1)求 m 的取值范围；

(2)当 $m=-2$ 时，求圆 C 截直线 l：$2x-y+1=0$ 所得弦长.