数 学

同步提升与练习

基础模块 ·下

选题策划：胡志平
责任编辑：张　昕
封面设计：刘文东

ISBN 978-7-5661-3525-4

定价：29.90元

中等职业学校公共基础课程辅导用书

数学同步提升与练习 基础模块·下

主编 吴英迪

哈尔滨工程大学出版社
Harbin Engineering University Press

中等职业学校公共基础课程辅导用书

数 学

同步提升与练习

基础模块 ·下

主　编　吴英迪

哈尔滨工程大学出版社
Harbin Engineering University Press

中等职业学校公共基础课程辅导用书

数 学

同步提升与练习

基础模块 ·下

主　编　吴英迪
副主编　张秋芸

哈爾濱工程大學出版社
Harbin Engineering University Press

内 容 简 介

本书按照教材《数学(基础模块·下册)》的章节顺序进行编写。“知识脉络”模块对本章知识点进行了总结。“学习目标”模块参照考试大纲,使学生对知识要点的掌握程度有一个初步了解。“知识梳理”模块通过预习,培养学生的阅读能力、理解能力及总结能力。“典型例题”模块对经典例题进行详细讲解,使学生能更好地掌握课本知识。“巩固练习”模块分为基础巩固和能力提升两部分,通过自我检测,使学生及时做到查缺补漏,确保当堂内容当堂清。每章后配有章节测试题,既能强化学生对相应章节知识之间关系的认识,又能培养学生解决综合问题的能力及数学思想和解题技巧。

本书既可作为广大中等职业学校学生的学习用书,也可作为教师教学的参考资料。

图书在版编目(CIP)数据

数学同步提升与练习:基础模块. 下 / 吴英迪主编. —哈尔滨:哈尔滨工程大学出版社,2022.6(2024.1 重印)

ISBN 978-7-5661-3525-4

Ⅰ.①数… Ⅱ.①吴… Ⅲ.①数学课-中等专业学校-教学参考资料 Ⅳ.①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2022)第 085001 号

数学同步提升与练习(基础模块·下)
SHUXUE TONGBU TISHENG YU LIANXI (JICHU MOKUAI·XIA)

选题策划 胡志平
责任编辑 张 昕
封面设计 刘文东

出版发行 哈尔滨工程大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区南通大街 145 号
邮政编码 150001
发行电话 0451-82519328
传　　真 0451-82519699
经　　销 新华书店
印　　刷 三河市骏杰印刷有限公司
开　　本 880 mm×1 230 mm　1/16
印　　张 10.25
字　　数 196 千字
版　　次 2022 年 6 月第 1 版
印　　次 2024 年 1 月第 3 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5661-3525-4
定　　价 29.90 元
http://www.hrbeupress.com
E-mail:heupress@hrbeu.edu.cn

前言

PREFACE

职业教育是培养技术技能人才，促进就业创业创新，推动中国制造和服务上水平的重要基础。而中等职业教育的基础地位是国家经济发展的需要，是国家脱贫攻坚的需要，是国家社会稳定的需要。这就要求中等职业学校必须与时俱进，不断进行教育教学改革。本书以深化学校教育教学改革、提高课堂教学实效性为目标，以《中等职业学校数学课程标准（2020 年版）》为基础，充分落实学生的主体地位，从而激发学生的自信，挖掘学生的潜力。

本书是与中等职业教育课程改革规划新教材《数学（基础模块・下册）》相配套的学生指导用书，主要包含以下模块：

知识脉络——对本章知识点进行了总结。

学习目标——参考考试大纲，使学生对需要学习的知识要点的掌握程度有一个初步了解。

知识梳理——通过预习，培养学生的阅读能力、理解能力及总结能力。

典型例题——对经典例题进行详细讲解，使学生能更好地掌握课本知识。

巩固练习——分为基础巩固和能力提升两部分，通过自我检测，使学生及时做到查缺补漏，确保当堂内容当堂清。

章节测试题——通过章节测试，既能强化学生对相应章节知识之间关系的认识，又能培养学生解决综合问题的能力及数学思想和解题技巧。

由于编者水平有限，书中难免存在不足之处，敬请读者提出宝贵的意见和建议。

编　者

目录
CONTENTS

第5章
指数函数与对数函数

知识脉络

- 指数函数与对数函数
  - 实数指数幂
    - 有理数指数幂
    - 实数指数幂
      - 运算法则
  - 指数函数
    - 指数函数的图像和性质
  - 对数
    - 对数的概念
    - 积、商、幂的对数
      - 运算法则
  - 对数函数
    - 对数函数的图像和性质
  - 指数函数与对数函数的应用
    - 指数函数模型
    - 对数函数模型

5.1 实数指数幂

5.1.1 有理数指数幂

学习目标

1. 了解 n 次方根及根式的概念，理解根式的运算性质.
2. 了解分数指数幂和有理数指数幂的概念.
3. 理解根式与分数指数幂的互化.

知识梳理

1. n 次方根

(1)定义：一般地，如果 $x^n=a(n\in\mathbf{N}^*$ 且 $n>1)$，那么称 x 为 a 的________.

(2)当 n 为偶数时，正数的 n 次方根有两个，即________和________，其中________是 a 的 n 次算术根；负数的 n 次方根没有意义.

(3)当 n 为奇数时，实数 a 的 n 次方根只有一个，记作________.

(4)无论 n 为奇数还是偶数，0 的 n 次方根是________.

2. n 次根式

(1)定义：形如 $\sqrt[n]{a}$ $(n\in\mathbf{N}^*$ 且 $n>1)$ 的式子称为 a 的________，其中，a 称为________，n 称为________.

(2)根式的运算性质：$(\sqrt[n]{a})^n=$________；$\sqrt[n]{a^n}=\begin{cases}________, & n\text{ 为奇数,}\\ ________, & n\text{ 为偶数.}\end{cases}$

3. 分数指数幂($n\in\mathbf{N}^*$ 且 $a\neq0$)

(1)我们规定，当 $a\neq0$ 时，$a^0=$________，$a^{-n}=$________.

(2)正分数指数幂：$a^{\frac{m}{n}}=$________，其中 $m,n\in\mathbf{N}^*$ 且 $n>1$. 当 n 为奇数时，$a\in\mathbf{R}$；当 n 为偶数时，$a\geqslant0$.

(3)负分数指数幂：$a^{-\frac{m}{n}}=$________$=$________，其中 $a\neq0$，且 $a^{\frac{m}{n}}$ 有意义.

(4)0 的正分数指数幂是________；0 的负分数指数幂无意义.

（答案在本节末尾）

典型例题

例 1　将下列各分数指数幂写成根式的形式.

(1)$7^{\frac{3}{4}}$；　(2)$a^{\frac{4}{3}}$；　(3)$a^{-\frac{2}{3}}(a\neq 0)$.

解　(1)$7^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{7^3}$. (2)$a^{\frac{4}{3}}=\sqrt[3]{a^4}$. (3)$a^{-\frac{2}{3}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$.

例 2　将下列各根式写成分数指数幂的形式.

(1)$\sqrt[3]{a^2}$；　(2)$\left(\sqrt[3]{\dfrac{3}{5}}\right)^2$.

解　(1)$\sqrt[3]{a^2}=a^{\frac{2}{3}}$. (2)$\left(\sqrt[3]{\dfrac{3}{5}}\right)^2=\left(\dfrac{3}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$.

点拨　熟记分数指数幂和根式的转化公式是解题关键.

巩固练习

基 础 巩 固

一、选择题

1. 下列根式中无意义的是　(　　)

A. $\sqrt[4]{3}$　　B. $\sqrt[3]{0}$　　C. $\sqrt[4]{-2}$　　D. $\sqrt[3]{-2}$

2. $\pi^0=$　(　　)

A. 0　　B. 1　　C. 3. 14　　D. π

3. $\sqrt{(-3)^2}=$　(　　)

A. 3　　B. -3　　C. 9　　D. -9

4. 8 的 3 次方根是　(　　)

A. 2　　B. -2　　C. 2 或-2　　D. 无意义

5. -16 的 4 次方根是　(　　)

A. 2　　B. -2　　C. 2 或-2　　D. 无意义

6. 下列等式不成立的是　(　　)

A. $(\sqrt{a})^2=a$　　B. $(\sqrt[3]{a})^3=a$

C. $\sqrt[4]{(3-\pi)^4}=\pi-3$　　D. $\sqrt{a^2}=a$

7. 把分数指数幂 $2^{-\frac{3}{4}}$ 化为根式的形式是　(　　)

A. $\sqrt[4]{2^3}$　　B. $-\sqrt[4]{2^3}$　　C. $\dfrac{1}{\sqrt[4]{2^3}}$　　D. $-\dfrac{1}{\sqrt[4]{2^3}}$

二、填空题

8. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}=$________；$\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=$________；$(\sqrt{6})^2=$________；$\sqrt[3]{(-3)^3}=$________.

9. -243 的五次方根为________.

10. 用分数指数幂表示 $\sqrt[3]{m^2+n^2}$ 为________.

三、解答题

11. 将下列各分数指数幂写成根式的形式.

(1) $2a^{\frac{4}{3}}$；　　(2) $-2a^{\frac{3}{4}}$.

12. 将下列各根式写成分数指数幂的形式.

(1) $\sqrt[4]{a^3}$；　　(2) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{x^3}}$；

(3) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$；　　(4) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{8}}$.

能力提升

1. 化简：$\dfrac{\sqrt[4]{(3.14-\pi)^4}}{3.14-\pi}+\dfrac{\sqrt[5]{(a-b)^5}}{a-b}+\dfrac{\sqrt[6]{(\pi-\sqrt{10})^6}}{\pi-\sqrt{10}}=$　　(　　)

A. 1　　B. -1　　C. 3　　D. -3

2. 计算：$\left(\dfrac{8}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}+\left(\dfrac{2}{5}\right)^{-2}-\left[-\dfrac{3}{2+\sqrt{3}}\right]^0$.

3. 化简：$\sqrt[n]{(a-b)^n}+\sqrt[n]{(a+b)^n}(a<b<0,n>1,n\in\mathbf{N}^*)$.

知识梳理答案

1. (1) n 次方根　(2) $\sqrt[n]{a}$　$-\sqrt[n]{a}$　$\sqrt[n]{a}$　(3) $\sqrt[n]{a}$　(4) 0

2. (1) n 次根式　被开方数　根指数　(2) a　a　$|a|$

3. (1) 1　$\frac{1}{a^n}$　(2) $\sqrt[n]{a^m}$　(3) $\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$　$\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$　(4) 0

5.1.2　实数指数幂

学习目标

1. 了解实数指数幂的概念，掌握实数指数幂的运算法则.
2. 能用实数指数幂的运算法则进行运算和化简.

知识梳理

实数指数幂的运算法则：

(1) $a^\alpha\cdot a^\beta=$__________；

(2) $(a^\alpha)^\beta=$__________；

(3) $(ab)^\alpha=$__________.

其中 $a>0,b>0,\alpha,\beta\in\mathbf{R}$.

（答案在本节末尾）

典型例题

例 1　计算下列各式.

(1) $27^{\frac{2}{3}}$；

(2) $4^{-\frac{1}{2}}$；

(3)$\dfrac{2\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}}{\sqrt[8]{2}}$.

解 (1)$27^{\frac{2}{3}}=(3^3)^{\frac{2}{3}}=3^{3\times\frac{2}{3}}=3^2=9$.

(2)$4^{-\frac{1}{2}}=(2^2)^{-\frac{1}{2}}=2^{2\times(-\frac{1}{2})}=2^{-1}=\dfrac{1}{2}$.

(3)$\dfrac{2\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}}{\sqrt[8]{2}}=\dfrac{2\cdot 2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{4}}}{2^{\frac{1}{8}}}=2\cdot 2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{4}}\cdot 2^{-\frac{1}{8}}=2^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}}=2^{\frac{13}{8}}$.

例 2 化简下列各式(各式中字母均为正数).

(1)$(p^{\frac{1}{4}}q^{-\frac{3}{8}})^8$;

(2)$(-xy^{\frac{1}{3}})\cdot(2x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{2}})\div(x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{5}{3}})$;

(3)$\sqrt[3]{\dfrac{b^2}{a}}\div\sqrt[3]{a}$.

解 (1)$(p^{\frac{1}{4}}q^{-\frac{3}{8}})^8=(p^{\frac{1}{4}})^8\cdot(q^{-\frac{3}{8}})^8=p^2\cdot q^{-3}=\dfrac{p^2}{q^3}$.

(2)$(-xy^{\frac{1}{3}})\cdot(2x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{2}})\div(x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{5}{3}})=(-xy^{\frac{1}{3}})\cdot(2x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{2}})\cdot x^{-\frac{1}{3}}\cdot y^{-\frac{5}{3}}$

$=-2x^{1+\frac{2}{3}+(-\frac{1}{3})}y^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{5}{3}}=-2x^{\frac{4}{3}}y^{-\frac{5}{6}}$.

(3)$\sqrt[3]{\dfrac{b^2}{a}}\div\sqrt[3]{a}=(a^{-1}b^2)^{\frac{1}{3}}\div a^{\frac{1}{3}}=(a^{-1})^{\frac{1}{3}}\cdot(b^2)^{\frac{1}{3}}\cdot a^{-\frac{1}{3}}=a^{-\frac{1}{3}}\cdot b^{\frac{2}{3}}\cdot a^{-\frac{1}{3}}=a^{(-\frac{1}{3})+(-\frac{1}{3})}b^{\frac{2}{3}}=a^{-\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}$.

点拨 熟记实数指数幂的运算法则是解决问题的关键.

巩固练习

基 础 巩 固

一、选择题

1. 若 $a>0$,则 $a^2\cdot a^{-2}=$ ( )

A. 0　　B. 1　　C. -1　　D. a^{-1}

2. 若 $a>0$,则下列运算法则不成立的是 ( )

A. $a^ma^n=a^{m+n}$　　B. $(a^m)^n=a^{m+n}$　　C. $(ab)^n=a^nb^n$　　D. $\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$

3. 若 $3^m=2$,$3^n=5$,则 $3^{m+n}=$ ( )

A. 5　　B. 2　　C. 10　　D. 7

4. $\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}=$ ( )

A. $2^{\frac{3}{4}}$　　B. $2^{\frac{7}{8}}$　　C. $\sqrt{2}$　　D. 2

5. 下列运算正确的是 ( )

A. $2^{\frac{3}{4}}\cdot 2^{\frac{4}{3}}=1$　　B. $2^{\frac{3}{4}}\cdot 2^{\frac{4}{3}}=2$　　C. $(2^{\frac{3}{4}})^{\frac{4}{3}}=1$　　D. $(2^{\frac{3}{4}})^{\frac{4}{3}}=2$

二、填空题

6. $\left(-\dfrac{27}{8}\right)^{\frac{1}{3}}=$________.

7. $[(-\sqrt{2})^{-4}]^{-\frac{1}{2}}=$________.

8. 设 $a>0$，$b>0$，$(a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{3}{4}})^{12}=$________.

9. $12^{3}\times3^{-3}\times(2^{-3})=$________.

10. $(10-6\times2\ 021^{0})^{-2}=$________.

三、解答题

11. 化简下列各题.

(1) $(a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{6}})^{6}$；

(2) $(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})^{2}$；

(3) $\dfrac{a^{2}}{\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a^{2}}}(a>0)$；

(4) $(2a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}})(-6a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}})\div(-3a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{5}{6}})$.

12. 计算下列各题.

(1) $\sqrt{3}\times\sqrt[3]{9}\times\sqrt[6]{27}$；

(2) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1}-4\times(-2)^{-3}+\left(\dfrac{1}{4}\right)^{0}-9^{-\frac{1}{2}}$.

能力提升

1.计算下列各式的值.

(1)$\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}}+(-5.6)^{0}-\left(\frac{27}{64}\right)^{-\frac{2}{3}}+0.125^{-\frac{1}{3}}$;

(2)$\left(27\frac{69}{70}\right)^{0}-\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\right]\div\left(3\frac{3}{8}\right)^{\frac{1}{3}}$.

2.若 $a>0,b>0$,化简:$\frac{a^{3}b^{2}\cdot\sqrt[3]{ab^{2}}}{(a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{2}})^{4}\sqrt[3]{\frac{b}{a}}}$.

知识梳理答案

(1)$a^{\alpha+\beta}$　(2)$a^{\alpha\beta}$　(3)$a^{\alpha}b^{\alpha}$

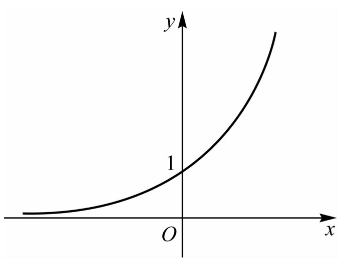
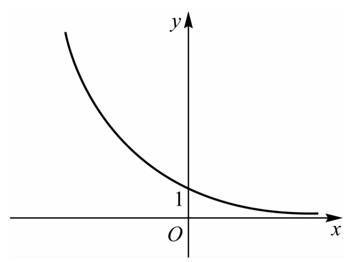
5.2　指 数 函 数

学习目标

1. 了解指数函数的定义，能根据定义判断一个函数是否为指数函数.
2. 理解指数函数的图像和性质，能根据图像归纳出指数函数的性质.

知识梳理

指数函数的图像和性质如下表所示.

<table>
<tr><td>定义</td><td colspan="2">形如 $y=a^x(a>0$ 且 $a\neq1)$的函数称为指数函数</td></tr>
<tr><td>特点</td><td>$a>1$</td><td>$0<a<1$</td></tr>
<tr><td>图像</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="4">性质</td><td colspan="2">定义域:__________;值域:__________</td></tr>
<tr><td colspan="2">图像过点______</td></tr>
<tr><td>在$(-\infty,+\infty)$上是______函数</td><td>在$(-\infty,+\infty)$上是______函数</td></tr>
<tr><td>当 $x<0$ 时,______;
当 $x>0$ 时,______</td><td>当 $x<0$ 时,______;
当 $x>0$ 时,______</td></tr>
</table>

(答案在本节末尾)

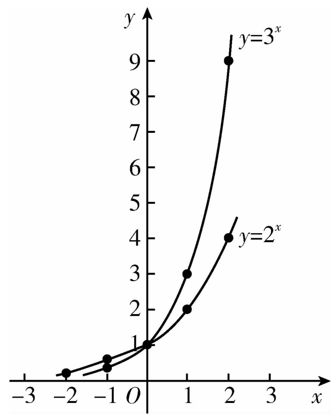
典型例题

例 1　作指数函数 $y=2^x$ 和 $y=3^x$ 的图像.

解　列出 x,y 的对应值如下表所示.

x	…	-2	-1	0	1	2	…
$y=2^x$	…	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	…
$y=3^x$	…	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	…

用描点法在同一坐标系中作出它们的图像，如下图所示.

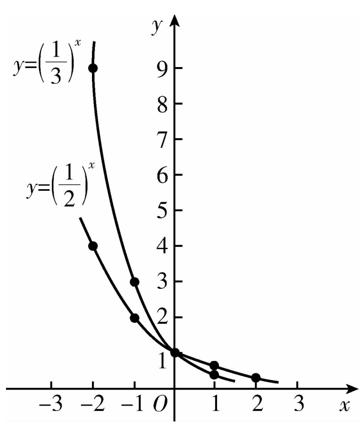


例 2　作指数函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 和 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 的图像.

解　列出 x，y 的对应值如下表所示.

x	…	-2	-1	0	1	2	…
$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$	…	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	…
$y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$	…	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	…

用描点法，在同一坐标系中作出它们的图像，如下图所示.



点拨　从例 1、例 2 所画出的函数的图像可以看出以下几点：

(1)这 4 个函数的图像都在 x 轴上方，且它们的图像都经过点(0，1)；

(2)$y=2^x$ 和 $y=3^x$ 在$(-\infty,+\infty)$上是增函数,当 x 逐渐减小时,其图像从 x 轴上方逐渐逼近 x 轴;$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 和 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 在$(-\infty,+\infty)$上是减函数,当 x 逐渐增大时,其图像从 x 轴上方逐渐逼近 x 轴.

例 3　比较下列各组中两个值的大小.

(1)$5^{0.4}$与 $5^{0.6}$;

(2)0.8^{-3}与 $0.8^{-1.5}$;

(3)$10^{\frac{2}{3}}$与 1.

解　(1)函数 $y=5^x$ 在$(-\infty,+\infty)$上是增函数.因为 $0.4<0.6$,所以 $5^{0.4}<5^{0.6}$.

(2)函数 $y=0.8^x$ 在$(-\infty,+\infty)$上是减函数.因为$-3<-1.5$,所以 $0.8^{-3}>0.8^{-1.5}$.

(3)函数 $y=10^x$ 在$(-\infty,+\infty)$上是增函数.因为$\frac{2}{3}>0$,所以 $10^{\frac{2}{3}}>10^0=1$.

点拨　比较同底的指数大小,可利用指数函数的单调性得到大小关系.

例 4　求下列函数的定义域.

(1)$y=2^{1-x}$;

(2)$y=\frac{2}{3^x-1}$.

解　(1)$y=2^{1-x}=\frac{2}{2^x}$,$2^x>0$ 恒成立,故函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$.

(2)要使 $y=\frac{2}{3^x-1}$有意义,则应有 $3^x-1\neq0$,解得 $x\neq0$,所以函数 $y=\frac{2}{3^x-1}$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

点拨　求定义域时要注意,含有分式时,分母不为零,然后再解含有指数幂的不等式即可.

巩固练习

基 础 巩 固

一、选择题

1. 下列函数是指数函数的是　　(　　)

A. $y=x$　　B. $y=x^2$　　C. $y=2^x$　　D. $y=(-2)^x$

2. 下列函数在$(-\infty,+\infty)$内是增函数的是　　(　　)

A. $y=0.3^x$　　B. $y=2^x$　　C. $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$　　D. $y=3^{-x}$

3. 下列函数在$(-\infty,+\infty)$内是减函数的是　　(　　)

A. $y=3^x$　　B. $y=2^x$　　C. $y=10^x$　　D. $y=2^{-x}$

4. 函数 $y=3^x$ 的图像一定经过点 (　　)

A. $(0,0)$　　B. $(0,1)$　　C. $(1,1)$　　D. $(1,0)$

5. 函数 $y=0.2^x$ (　　)

A. 在 $\mathbf{R}$ 内是增函数　　B. 在 $(0,+\infty)$ 内是增函数

C. 在 $\mathbf{R}$ 内是减函数　　D. 在 $(0,+\infty)$ 内是减函数

6. 函数 $y=\left(\frac{4}{3}\right)^x$ 的 (　　)

A. 定义域是 $(-\infty,+\infty)$，值域是 $(-\infty,+\infty)$

B. 定义域是 $(0,+\infty)$，值域是 $(0,+\infty)$

C. 定义域是 $(0,+\infty)$，值域是 $(-\infty,+\infty)$

D. 定义域是 $(-\infty,+\infty)$，值域是 $(0,+\infty)$

7. 若函数 $y=a^x$ 是减函数，则 a 的取值范围是 (　　)

A. $a>0$　　B. $a<0$　　C. $0<a<1$　　D. $a>1$

二、填空题

8. 若 $\left(\frac{3}{4}\right)^3>\left(\frac{3}{4}\right)^x$，则 x 的取值范围为________.

9. 若 $3^{x-1}<1$，则 x 的取值范围为________.

10. 若 $a^2<a^3$，则 a 的取值范围为________.

三、解答题

11. 若指数函数 $f(x)=a^x$ 的图像过点 $(2,9)$，求 a 的值.

12. 比较下列各组中两个数的大小.

(1) $0.7^{-0.9}$ 与 $0.7^{-1.2}$；　　(2) $3^{\frac{1}{4}}$ 与 $3^{\frac{1}{5}}$.

能力提升

1. 函数 $y=2^{x}$ 与 $y=2^{-x}$ 的图像关于________对称.

2. 已知指数函数 $f(x)=a^{x}$ 的图像经过点 $(3,8)$.

(1)求该函数的解析式;

(2)判断该函数的单调性;

(3)求 $f(-3)$ 的值.

3. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{2^{x}-8}$;

(2) $y=\dfrac{\sqrt{2x-4}}{\sqrt{2^{x}-1}}$.

知识梳理答案

$(-\infty,+\infty)$　$(0,+\infty)$　$(0,1)$　增　减　$0<y<1$　$y>1$　$y>1$　$0<y<1$

5.3 对　　数

5.3.1 对数的概念

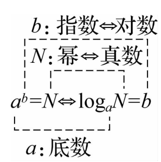
学习目标

1. 了解对数的概念及性质.
2. 了解常用对数与自然对数的表示方法.
3. 了解指数与对数的关系.

知识梳理

1. 对数：一般地，若 $a^b=N(a>0$ 且 $a\neq1)$，则称 b 是以 a 为底 N 的________，记作________. 其中，a 称为对数的________，N 称为________.

2. 指数式与对数式的转换：



3. 对数的性质($a>0$ 且 $a\neq1$)：

(1)$\log_a 1=$________；

(2)$\log_a a=$________；

(3)N ________，即零和负数没有对数.

4. 常用对数：是指以 10 为底的对数，记作 $\log_{10}N$，简记为________.

5. 自然对数：是指以无理数 e 为底的对数，记作 $\log_e N$，简记为________ .

自然对数经常使用于科学研究和工程计算领域中.

（答案在本节末尾）

典型例题

例 1　将下列指数式写成对数式.

(1)$3^4=81$；　(2)$2^{-5}=\frac{1}{32}$；　(3)$(0.7)^0=1$；　(4)$9^{\frac{1}{2}}=3$.

解　根据对数式与指数式的关系得：

(1)$\log_3 81=4$.　(2)$\log_2 \frac{1}{32}=-5$.　(3)$\log_{0.7} 1=0$.　(4)$\log_9 3=\frac{1}{2}$.

例 2　把下列对数式写成指数式.

(1)$\log_6 36=2$；　(2)$\log_2 \frac{1}{8}=-3$；　(3)$\log_{\frac{1}{2}} 8=-3$；　(4)$\log_{10} 100=2$.

解　根据对数式与指数式的关系得：

(1)$6^2=36$.　(2)$2^{-3}=\frac{1}{8}$.　(3)$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=8$.　(4)$10^2=100$.

巩固练习

基 础 巩 固

一、选择题

1. lg 7 是以(　　)为底的对数.　(　　)

A. 1　　B. 7　　C. 10　　D. e

2. ln 2 是以(　　)为底的对数.　(　　)

A. 1　　B. 2　　C. 10　　D. e

3. 下列表示方法不正确的是　(　　)

A. $\log_{10} 5$　　B. $\log 5$　　C. $\lg 5$　　D. $\ln 5$

4. 下列表示方法正确的是　(　　)

A. $\log_2(-5)$　　B. $\log_{(-2)} 8$　　C. $\lg(-7)$　　D. $\ln e^2$

5. 下列等式不正确的是　(　　)

A. $\log_2 2=1$　　B. $\lg(-10)=-1$

C. $\lg 10=1$　　D. $\ln 1=0$

6. 下列指数式与对数式的互化中，不正确的是　(　　)

A. $10^0=1$ 与 $\lg 1=0$　　B. $27^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}$ 与 $\log_{27}\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}$

C. $\log_3 9=2$ 与 $9^{\frac{1}{2}}=3$　　D. $\log_5 5=1$ 与 $5^1=5$

7. 在 $b=\log_{(a-2)}(5-a)$ 中，实数 a 的取值范围是　(　　)

A. $a>5$ 或 $a<2$　　B. $2<a<5$

C. $2<a<3$ 或 $3<a<5$　　D. $3<a<4$

二、填空题

8. 计算：$\log_2 1=$________；$\log_9 9=$________；

$\log_{\frac{1}{3}} 1=$________；$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}=$________.

9. 计算：$\lg 10\ 000=$________；$\lg 0.001=$________.

10. 计算：$\ln \frac{1}{e}=$________；$\ln e^3=$________.

三、解答题

11. 把下列指数式写成对数式.

(1)$e^{-2}=x$；　　(2)$10^x=5$；

(3)$4^{-2}=\frac{1}{16}$；　　(4)$\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$.

12. 把下列对数式写成指数式.

(1)$\log_2 \frac{1}{16}=-4$；　　(2)$\log_5 \frac{1}{5}=-1$；

(3)$\lg 100=2$；　　(4)$\ln \frac{1}{e}=-1$.

能 力 提 升

1. $\log_7[\log_3(\log_2 x)]=0$，则 $x=$________.

2. 求下列等式中 x 的值.

(1)$\lg x=-1$；　　(2)$\ln x=2$.

知识梳理答案

1. 对数　$b=\log_a N$　底数　真数

3. (1)0　(2)1　(3)>0

4. $\lg N$　5. $\ln N$

5.3.2　积、商、幂的对数

学习目标

1. 了解积、商、幂的对数及运算法则.
2. 能运用积、商、幂的运算法则解决有关问题.

知识梳理

1. 积、商、幂的对数的运算法则

如果 $a>0$ 且 $a\neq1$，$M>0$，$N>0$，那么

(1)$\log_a(MN)=$__________________________ ；

(2)$\log_a\dfrac{M}{N}=$__________________________；

(3)$\log_a M^n=$__________________________.

2. 换底公式

如果 $a>0$ 且 $a\neq1$，$b>0$，$c>0$ 且 $a\neq1$，那么 $\log_a b=$________.

取 $c=10$，有 $\log_a b=$________；

取 $c=e$，有 $\log_a b=$________.

（答案在本节末尾）

典型例题

例 1　用 $\lg x$，$\lg y$，$\lg z$ 表示下列各式.

(1)$\lg x^2$；　(2)$\lg(x^2y^2z)$；　(3)$\lg\dfrac{x^2}{yz}$.

解　(1)$\lg x^2=2\lg x$.

(2)$\lg(x^2y^2z)=2\lg x+2\lg y+\lg z$.

(3)$\lg\dfrac{x^2}{yz}=2\lg x-\lg y-\lg z$.

例 2 求下列各式的值.

(1)$\log_3(27\times9)$； (2)$\lg 4+\lg 25$； (3)$\log_3 5-\log_3 15$.

解 (1)$\log_3(27\times9)=\log_3(3^3\times3^2)=\log_3 3^{3+2}=5$.

(2)$\lg 4+\lg 25=\lg(4\times25)=\lg 100=\lg 10^2=2$.

(3)$\log_3 5-\log_3 15=\log_3\dfrac{5}{15}=\log_3 3^{-1}=-1$.

点拨 熟记积、商、幂的对数及运算法则,就能迅速解决问题.

巩固练习

基础巩固

一、选择题

1. 若 $M,N>0$,则下列等式成立的是 ( )

A. $\lg(M+N)=\lg M+\lg N$ B. $\lg(M-N)=\lg M-\lg N$

C. $\lg(MN)=\lg M\cdot\lg N$ D. $\lg(MN)=\lg M+\lg N$

2. 若 $M,N>0$,则下列等式不成立的是 ( )

A. $\lg\sqrt[3]{N}=\dfrac{1}{3}\lg N$ B. $\log_a M^n=(\log_a M)^n$

C. $\log_a\dfrac{N}{M}=\log_a N-\log_a M$ D. $\log_a M^n=n\log_a M$

3. $\log_2 16=$ ( )

A. 4 B. 8 C. 16 D. 32

4. $\log_3 27-\log_3 9=$ ( )

A. $\log_3 18$ B. $\dfrac{3}{2}$ C. 2 D. 1

5. 下列结论错误的是 ( )

A. $\log_2\dfrac{1}{8}=-3$ B. $\log_5 1=0$ C. $\log_7 7=1$ D. $\log_4 8=2$

6. 如果 $\lg x=\lg a+2\lg b-3\lg c$,则 x 等于 ( )

A. $a+2b-3c$ B. $a+b^2-c^3$ C. $\dfrac{ab^2}{c^3}$ D. $\dfrac{2ab}{3c}$

二、填空题

7. 计算.

$\log_{3.1}1=$________;$\ln e^{-2}=$________;$\lg 100=$________;

$\lg\sqrt[5]{100}=$________;$\log_3(27\times81)=$________;$\log_{0.1}0.001=$________;

$\lg 20-\lg 2=$________;$\log_3 5+\log_3\dfrac{1}{5}=$________; $\lg 4+2\lg 5=$________.

8. $\log_3(\log_2 8)=$________ .

9. $\log_3 5 \cdot \log_5 7 \cdot \log_7 3=$________.

10. $2^{1+\frac{1}{2}\log_2 5}$的值等于________.

三、解答题

11. 用 $\lg x,\lg y,\lg z$ 表示下列各式.

(1)$\lg \sqrt{x}$；　　(2)$\lg\left(\frac{y}{x}\right)^2$；　　(3)$\lg \frac{x^2\sqrt{y}}{z^3}$.

12. 求下列各式的值.

(1)$\log_2(4\times 2^5)$；　　(2)$\log_{30}1+\log_6 36-2\log_7 7$；

(3)$2\lg 3+\lg 7+\lg \frac{25}{7}-\lg \frac{9}{4}+\ln 1$.

能 力 提 升

1. 计算：$\frac{(1-\lg 5)^2+\lg 2\lg 5}{\lg 8}$.

2. 设 $\lg 2=a$，$\lg 3=b$，用 a,b 表示 $\log_5 12$.

知识梳理答案

1. (1)$\log_a M+\log_a N$　(2)$\log_a M-\log_a N$　(3)$n\log_a M$

2. $\frac{\log_c b}{\log_c a}$　$\frac{\lg b}{\lg a}$　$\frac{\ln b}{\ln a}$

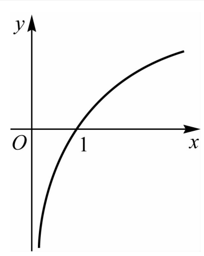
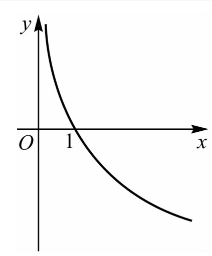
5.4 对数函数

学习目标

1. 了解对数函数的定义、图像和性质.
2. 通过对对数函数图像的观察及讨论，总结出对数函数的性质.

知识梳理

对数函数的图像和性质如下表所示.

定义	形如 $y=\log_a x$（$a>0$ 且 $a\neq1$）的函数称为对数函数	
特点	$a>1$	$0<a<1$
图像		
性质	定义域：______；值域：______	
	图像过点______	
	在$(0,+\infty)$上是______函数	在$(0,+\infty)$上是______函数
	当 $0<x<1$ 时，y ______ 0； 当 $x>1$ 时，y ______ 0	当 $0<x<1$ 时，y ______ 0； 当 $x>1$ 时，y ______ 0

（答案在本节末尾）

典型例题

例 1 求下列函数的定义域.

(1) $y=\log_5(x-3)$；

(2) $y=\lg(x^2+2x)$.

解 (1)要使函数有意义，则需 $x-3>0$，即 $x>3$.

所以函数的定义域为$(3,+\infty)$.

(2)要使函数有意义，则需 $x^2+2x>0$，即 $x>0$ 或 $x<-2$.

所以函数的定义域为$(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$.

点拨　对数的真数一定要大于零.

例 2　比较下列各组中两个值的大小.

(1)$\ln 5$与$\ln 7$；　(2)$\log_{\frac{1}{2}}0.3$与$\log_{\frac{1}{2}}2.3$.

解　(1)函数$y=\ln x$在$(0,+\infty)$上是增函数.因为$5<7$,所以$\ln 5<\ln 7$.

(2)函数$y=\log_{\frac{1}{2}}x$在$(0,+\infty)$上是减函数.因为$0.3<2.3$,所以$\log_{\frac{1}{2}}0.3>\log_{\frac{1}{2}}2.3$.

点拨　当底数相同时,利用相同底数的对数函数的单调性来判断大小.

巩固练习

基础巩固

一、选择题

1.若函数$y=\log_a x$的图像经过点$(2,-1)$,则底数a为　(　　)

A. 2　　B. -2　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $-\frac{1}{2}$

2.下列对数函数在区间$(0,+\infty)$内为减函数的是　(　　)

A. $y=\lg x$　　B. $y=\log_{\frac{1}{2}}x$　　C. $y=\ln x$　　D. $y=\log_2 x$

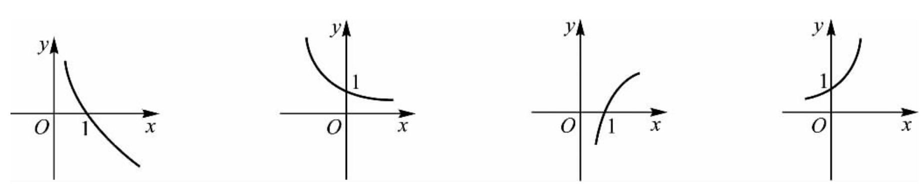
3.函数$y=\log_3(x+1)$的定义域为　(　　)

A. **R**　　B. $(-1,+\infty)$　　C. $[-1,+\infty)$　　D. $(-\infty,-1)$

4.函数$f(x)=\log_2\frac{1}{1-3x}$的定义域为　(　　)

A. $\left\{x\middle|x\neq\frac{1}{3}\right\}$　　B. $\{x|x>0\}$　　C. $\left\{x\middle|0<x<\frac{1}{3}\right\}$　　D. $\left\{x\middle|x<\frac{1}{3}\right\}$

5.函数$y=\log_{\frac{1}{2}}x$的图像大致是　(　　)



A　　B　　C　　D

6.对数函数的图像一定过　(　　)

A.第一、二象限　　B.第一、三象限

C.第一、四象限　　D.第二、三象限

二、填空题

7.设函数$f(x)=2\lg x+1$,则$f(10)=$________.

8.对数函数$y=\log_a x(a>1)$的图像经过点________;该函数在定义域上是________(填“增”或“减”)函数.

9. 比较大小：$\log_2 5$ ________ $\log_2 6$，$\log_{0.2} 5$ ________ $\log_{0.2} 6$.

10. 若 $\log_7 x > \log_7 6$，则 x 的取值范围为________.

三、解答题

11. 已知对数函数 $f(x)=\log_a x$ 的图像经过点$(8,3)$.

(1)求该函数的解析式；

(2)判断该函数的单调性；

(3)求 $f(16)$的值.

12. 若 $\log_{\frac{1}{2}}(3x-2) > \log_{\frac{1}{2}}(x+4)$，求 x 的取值范围.

能 力 提 升

1. 若 $\log_a 2 < \log_a 3$，则 a 的取值范围为________.

2. 用"$<$"把 $\log_2 3$，$\log_2 1$ 和 $\log_{0.2} 2$ 连接起来为________.

3. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{1}{\log_2(-x^2+4x-3)}$；　　(2) $y=3+4\sqrt{\log_{0.3}(x-3)}$.

4. 若 $a=\log_2 3.6$，$b=\log_4 3.2$，$c=\log_4 3.6$，试比较 a，b，c 的大小.

知识梳理答案

$(0,+\infty)$　$(-\infty,+\infty)$　$(1,0)$　增　减　$<$　$>$　$>$　$<$

5.5　指数函数与对数函数的应用

学习目标

初步掌握从实际情境中抽象出指数函数、对数函数模型解决实际问题的方法.

知识梳理

解应用题的步骤如下：

(1)审题，了解问题背景，寻找实际问题与函数知识的结合点，分析题中的数量关系.

(2)建立数学模型.

(3)建立方程.

(4)解方程，把数学问题还原为实际问题.

典型例题

例1　某城市现有人口总数100万人，如果年自然增长率为1.2%，试解答下面的问题：

(1)设x年后该城市的人口总数为y万人，写出y与x的函数关系式；

(2)计算10年以后该城市人口总数(精确到0.1万人).

解　(1)1年后，即当$x=1$时，$y=100\times(1+1.2\%)=100\times1.012$，

2年后，即当$x=2$时，$y=100\times1.012\times(1+1.2\%)=100\times1.012^2$，

3年后，即当$x=3$时，$y=100\times1.012^2\times(1+1.2\%)=100\times1.012^3$，

……

由此得到，x年后该城市的人口总数为$y=100\times1.012^x(x\in\mathbf{N}^*)$.

(2)当$x=10$时，$y=100\times1.012^{10}\approx112.7$.故10年后该城市的人口总数约为112.7万人.

点拨　解决实际问题时，要注意题目中要求的精确度.

例2　为了提高教师的待遇，国家计划每年将教师工资提高5%，若张老师现在年收入10万元，问大约经过多少年，张老师的工资可翻一番？

解　设x年后张老师工资为y元.

由题意得$y=10\times(1+5\%)^x$，令$20=10\times(1+5\%)^x$，则$1.05^x=2$，得$x=\log_{1.05}2\approx14$.

故大约经过14年张老师的工资可翻一番.

点拨 在解决对数函数的问题时,先利用指数函数进行研究,再转化为对数函数或求对数值.解决实际问题时,还要结合实际情况,回归实际问题时要考虑是否有取整的需要.

巩固练习

基础巩固

一、选择题

1.一辆价值为20万元的汽车,按每年20%的折旧率折旧,设x年后汽车的价值为y万元,则y与x的函数解析式为 ( )

A. $y=20\times0.2^x$ B. $y=20\times0.8^x$

C. $y=20\times1.2^x$ D. $y=20\times1.02^x$

2.一件价值为200万元的清代文物,每年升值10%,设x年后该文物价值为y万元,则y与x的函数解析式为 ( )

A. $y=200\times0.1^x$ B. $y=200\times0.9^x$

C. $y=200\times1.1^x$ D. $y=200\times1.01^x$

二、解答题

3.某细胞每30分钟裂变一次,分裂成两个细胞,那么3小时后,这个细胞可分裂到多少个?

4.为响应国家号召,我国西北地区将对3万公顷荒地进行绿化,从2018年起每年将荒地的20%种植树木,经过4年后还有多少荒地需要绿化?

5. 某工厂购买了一套价值 100 万元的设备，若年折旧率为 10%，问经过多少年后，设备的价值仅为原来的一半？

6. 某城市现有人口 100 万，根据最近几年统计，这个城市的人口自然增长率为 0.6%. 按这个增长率计算，试问多少年后这个城市的人口可达到 120 万？

能力提升

1. 某城市 2020 年的国民生产总值为 25 亿元，如果增长率保持 7.8%，试求到 2026 年该市的国民生产总值将达到多少亿元(精确到 0.01).

2. 已知放射性物质镭经过 100 年残留量是原来的 95.76%，试计算它的半衰期(保留四位有效数字).

第 5 章测试题

一、选择题(本大题共 10 小题,每小题 4 分,共 40 分)

1. 若 $a>0$,则 $a^3\cdot a^{-3}=$ ( )

A. 0　B. 1　C. -1　D. a^{-1}

2. $\sqrt[4]{(-2)^4}$的运算结果是 ( )

A. 2　B. -2　C. ±2　D. 不确定

3. 下列函数是指数函数的是 ( )

A. $y=2x$　B. $y=x^2$　C. $y=3^x$　D. $y=(-3)^x$

4. 若$(1-2x)^{-\frac{1}{2}}$有意义,则 x 的取值范围是 ( )

A. $x\in\mathbf{R}$　B. $x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq\frac{1}{2}$

C. $x>\frac{1}{2}$　D. $x<\frac{1}{2}$

5. 函数 $y=\log_3x$ 的图像一定经过点 ( )

A. $(0,0)$　B. $(0,1)$　C. $(1,1)$　D. $(1,0)$

6. 函数 $y=\log_2x$ 与 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 的图像关于 ( )

A. x 轴对称　B. y 轴对称

C. 原点对称　D. 直线 $y=x$ 对称

7. 若函数 $\log_{(a-1)}x$ 在$(0,+\infty)$内为增函数,则 a 的取值范围是 ( )

A. $a>1$　B. $a>2$　C. $0<a<1$　D. $a>0$

8. 已知 $0<a<1,b<-1$,则函数 $f(x)=a^x+b$ 的图像不经过 ( )

A. 第一象限　B. 第二象限　C. 第三象限　D. 第四象限

9. 若$\left(\frac{1}{2}\right)^{2a+1}<\left(\frac{1}{2}\right)^{3-2a}$,则实数 a 的取值范围为 ( )

A. $(1,+\infty)$　B. $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$　C. $(-\infty,1)$　D. $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$

10. 设 $a=\log_{\frac{1}{3}}2,b=\log_{\frac{1}{3}}3,c=\left(\frac{1}{2}\right)^{0.3}$,则 ( )

A. $a<b<c$　B. $a<c<b$　C. $b<c<a$　D. $b<a<c$

二、填空题(本大题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分)

11. 设 $a>0,b>0,(a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{3}{4}})^{12}=$________.

12. 函数 $y=\lg(4-x)$的定义域为________.

13. 若指数函数 $y=a^x$ 的图像过点$(2,4)$,则 $a=$________.

14. $\lg 20+\log_{100}25=$________.

15. 若 $3^a=2$，则 $\log_3 8-2\log_3 6=$________.（用含 a 的式子表示）

16. 方程 $2^{\log_3 x}=\frac{1}{4}$的解是________.

三、解答题(本大题共 4 小题，第 17 小题 8 分，第 18 小题 10 分，第 19、20 小题每小题9 分，共 36 分)

17. 计算.

(1) $(-1.8)^0+(1.5)^{-2}\times\left(3\frac{3}{8}\right)^{\frac{2}{3}}+9^{\frac{3}{2}}$；

(2) $\log_{30}1+\log_6 36-2\log_7 7+\lg 4+2\lg 5+\ln e^{-4}$.

18. 求下列函数的定义域.

(1) $f(x)=\sqrt{2^x-16}$；

(2) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\log_{0.5}(4x-3)}}$.

19.已知对数函数 $f(x)=\log_a x$ 的图像经过点(16,2).

(1)求该函数的解析式；

(2)求 $f(64)$的值.

20.某纯净水制造厂在净化水过程中，每增加一次过滤可减少水中杂质的20%，要使水中杂质减少到原来的5%以下，则至少需要过滤几次？（参考数据：$\lg 2\approx0.3010$，$\lg 3\approx0.4771$）

数学同步提升与练习
（基础模块·下）

参考答案及解析

目　录

第5章 指数函数与对数函数

5.1 实数指数幂

5.1.1 有理数指数幂

【基础巩固】

一、选择题

1.C 2.B 3.A 4.A 5.D 6.D 7.C

二、填空题

8.4 $\frac{1}{4}$ 6 -3

9.-3

10.$(m^2+n^2)^{\frac{1}{3}}$

三、解答题

11.**解:**(1) $2\sqrt[3]{a^4}$. (2)$-2\sqrt[4]{a^3}$.

12.**解:**(1)$a^{\frac{3}{4}}$. (2) $x^{-\frac{3}{5}}$. (3) $x^{-\frac{2}{3}}$. (4) $8^{-\frac{1}{4}}$.

【能力提升】

1.B **解析:**因为 $3.14<\pi<\sqrt{10}$,所以 $\frac{\sqrt[4]{(3.14-\pi)^4}}{3.14-\pi}=\frac{\pi-3.14}{3.14-\pi}=-1$,$\frac{\sqrt[6]{(\pi-\sqrt{10})^6}}{\pi-\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}-\pi}{\pi-\sqrt{10}}=-1$,而 $\frac{\sqrt[5]{(a-b)^5}}{a-b}=1$.故原式$=-1+1-1=-1$.

2.**解:**$\left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}+\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}-\left(-\frac{3}{2+\sqrt{3}}\right)^0=\frac{9}{4}+\frac{25}{4}-1=\frac{15}{2}$.

3.**解:**当 n 为奇数时,原式$=a-b+a+b=2a$;
当 n 为偶数时,原式$=b-a-a-b=-2a$.

5.1.2 实数指数幂

【基础巩固】

一、选择题

1.B

2.B

3.C **解析:**$3^{m+n}=3^m3^n=2\times5=10$.

4.B

5.D

二、填空题

6.$-\frac{3}{2}$

7.2

8.a^8b^9

9.8

10.$\frac{1}{16}$

三、解答题

11.**解:**(1)a^4b. (2)$a+2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b$. (3) $a^{\frac{5}{6}}$.
(4)$4a$.

12.**解:**(1) $3^{\frac{5}{3}}$.(2) $\frac{19}{6}$.

【能力提升】

1.**解:**(1)原式$=\frac{2}{3}+1-\frac{16}{9}+2=\frac{17}{9}$.

(2)原式$=1+3\div\frac{3}{2}=3$.

2.**解:**原式$=\frac{a^3b^2\cdot(a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}})}{ab^2\cdot(b^{\frac{1}{3}}a^{-\frac{1}{3}})}=a^{3+\frac{1}{3}-1+\frac{1}{3}}\cdot b^{2+\frac{2}{3}-2-\frac{1}{3}}=a^{\frac{8}{3}}b^{\frac{1}{3}}$.

5.2 指数函数

【基础巩固】

一、选择题

1.C 2.B 3.D 4.B 5.C 6.D 7.C

二、填空题

8.$(3,+\infty)$ **解析:**当 $0<a<1$ 时,函数 $y=a^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$内是减函数,所以 $x>3$.

9.$(-\infty,1)$ **解析:**$3^{x-1}<1=3^0$,故 $x-1<0$,$x<1$.

10.$(1,+\infty)$

三、解答题

11.**解:**因为函数 $f(x)=a^x$ 的图像过点$(2,9)$,所以 $a^2=9$,解得 $a=3$.

12.**解:**(1)设 $f(x)=0.7^x$,因为 $0<0.7<1$,所以函数 $f(x)=0.7^x$ 是减函数.
因为$-0.9>-1.2$,所以 $0.7^{-0.9}<0.7^{-1.2}$.
(2)设 $f(x)=3^x$,因为 $3>1$,所以函数 $f(x)=3^x$ 是增函数.
因为$\frac{1}{4}>\frac{1}{5}$,所以 $3^{\frac{1}{4}}>3^{\frac{1}{5}}$.

【能力提升】

1. y 轴　**解析**:画出图像判断.

2. **解**:(1)把点(3,8)代入 $f(x)=a^x$ 得 $8=a^3$,解得 $a=2$.

因此该函数解析式为 $f(x)=2^x$.

(2) 由 $a=2>1$ 得该函数为增函数.

(3) $f(-3)=2^{-3}=\frac{1}{8}$.

3. **解**:(1)使 $y=\sqrt{2^x-8}$ 有意义$\Leftrightarrow 2^x-8\geqslant 0\Leftrightarrow 2^x\geqslant 8\Leftrightarrow 2^x\geqslant 2^3\Leftrightarrow x\geqslant 3$.

因此函数的定义域为$[3,+\infty)$.

(2)使 $y=\frac{\sqrt{2x-4}}{\sqrt{2^x-1}}$ 有意义$\Leftrightarrow\begin{cases}2x-4\geqslant 0,\\2^x-1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x\geqslant 4,\\2^x>1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geqslant 2,\\x>0\end{cases}\Leftrightarrow x\geqslant 2$.

因此函数的定义域为$[2,+\infty)$.

5.3　对　　数

5.3.1　对数的概念

【基础巩固】

一、选择题

1. C　2. D　3. B　4. D　5. B

6. C　**解析**:$\log_3 9=2$ 应化为 $3^2=9$,所以选项 C 中互化不对.

7. C　**解析**:由对数的定义知$\begin{cases}5-a>0,\\a-2>0,\\a-2\neq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a<5,\\a>2,\\a\neq 3\end{cases}\Rightarrow$ $2<a<3$ 或 $3<a<5$.

二、填空题

8. 0　1　0　1

9. 4　-3

10. -1　3

三、解答题

11. **解**:(1)$\ln x=-2$.　(2)$\lg 5=x$.

(3)$\log_4\frac{1}{16}=-2$.　(4) $\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{9}=2$.

12. **解**:(1)$2^{-4}=\frac{1}{16}$.　(2)$5^{-1}=\frac{1}{5}$.

(3)$10^2=100$.　(4) $e^{-1}=\frac{1}{e}$.

【能力提升】

1. 8　**解析**:因为 $\log_7[\log_3(\log_2 x)]=0$,所以 $\log_3(\log_2 x)=1$,从而 $\log_2 x=3$,故 $x=8$.

2. **解**:(1)$x=\frac{1}{10}$.　(2)$x=e^2$.

5.3.2　积、商、幂的对数

【基础巩固】

一、选择题

1. D　2. B　3. A　4. D　5. D

6. C　**解析**:$\lg x=\lg a+2\lg b-3\lg c=\lg\frac{ab^2}{c^3}$,所以 $x=\frac{ab^2}{c^3}$,故选 C.

二、填空题

7. 0　-2　2　$\frac{2}{5}$　7　3　1　0　2

8. 1

9. 1

10. $2\sqrt{5}$　**解析**:原式$=2\cdot 2^{\log_2\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$.

三、解答题

11. **解**:(1) $\lg\sqrt{x}=\lg x^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\lg x$.

(2)$\lg\left(\frac{y}{x}\right)^2=2\lg\frac{y}{x}=2\lg y-2\lg x$.

(3)$\lg\frac{x^2\sqrt{y}}{z^3}=\lg x^2\sqrt{y}-\lg z^3=\lg x^2+\lg\sqrt{y}-3\lg z=2\lg x+\frac{1}{2}\lg y-3\lg z$.

12. **解**:(1)原式$=\log_2 4+\log_2 2^5=2+5=7$.

(2)原式$=0+2-2=0$.

(3)原式$=\lg\left(9\times 7\times\frac{25}{7}\div\frac{9}{4}\right)+0=\lg 100=2$.

【能力提升】

1. **解**:原式$=\frac{(\lg 2)^2+\lg 2\lg 5}{3\lg 2}=\frac{(\lg 2+\lg 5)\lg 2}{3\lg 2}=\frac{1}{3}$.

2. **解**:$\log_5 12=\frac{\lg 12}{\lg 5}=\frac{\lg(2^2\times 3)}{\lg\frac{10}{2}}=\frac{2\lg 2+\lg 3}{1-\lg 2}=\frac{2a+b}{1-a}$.

5.4　对数函数

【基础巩固】

一、选择题

1. C　2. B　3. B

4. D　**解析**:由$\frac{1}{1-3x}>0$得$x<\frac{1}{3}$.

5. A　**解析**:函数$y=\log_{\frac{1}{2}}x$的图像经过点(1,0)且在$(0,+\infty)$上是减函数.

6. C　**解析**:由定义域是$(0,+\infty)$,值域是$(-\infty,+\infty)$可得函数图像过第一、四象限.

二、填空题

7. 3

8. (1,0)　增

9. $<$　$>$　**解析**:当$a>1$时,函数$y=\log_a x$在$(0,+\infty)$内是增函数;当$0<a<1$时,函数$y=\log_a x$在$(0,+\infty)$内是减函数,根据此性质可以很容易比较大小.

10. $(6,+\infty)$　**解析**:$7>1$,故对数函数$y=\log_7 x$为增函数,所以$x>6$.

三、解答题

11. **解**:(1)把点(8,3)代入$f(x)=\log_a x$得$3=\log_a 8$,即$a^3=8=2^3$,解得$a=2$.

因此函数的解析式为$f(x)=\log_2 x(x>0)$.

(2)由$a=2>1$知该函数在$(0,+\infty)$内为增函数.

(3)$f(16)=\log_2 16=4$.

12. **解**:因为$\log_{\frac{1}{2}}(3x-2)>\log_{\frac{1}{2}}(x+4)$,所以$\begin{cases}3x-2>0,\\x+4>0,\\3x-2<x+4,\end{cases}$解得$\frac{2}{3}<x<3$,所以$x$的取值范围是$\left\{x\middle|\frac{2}{3}<x<3\right\}$.

【能力提升】

1. $(1,+\infty)$　**解析**:因为$\log_a 2<\log_a 3$且$2<3$,可知函数为增函数,故$a>1$.

2. $\log_{0.2}2<\log_2 1<\log_2 3$　**解析**:$\log_2 3>0$,$\log_2 1=0$,$\log_{0.2}2<0$,故$\log_{0.2}2<\log_2 1<\log_2 3$.

3. **解**:(1)由题意可知,$\begin{cases}\log_2(-x^2+4x-3)\neq 0,\\-x^2+4x-3>0,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x\neq 2,\\1<x<3.\end{cases}$所以函数的定义域为$(1,2)\cup(2,3)$.

(2)由题意得$\begin{cases}\log_{0.3}(x-3)\geqslant 0,\\x-3>0,\end{cases}$解得$3<x\leqslant 4$,所以函数的定义域为$(3,4]$.

4. **解**:因为$a=\log_2 3.6>\log_2 2=1$.又因为$y=\log_4 x$,$x\in(0,+\infty)$为单调递增函数,所以$\log_4 3.2<\log_4 3.6<\log_4 4=1$,所以$b<c<a$.

5.5　指数函数与对数函数的应用

【基础巩固】

一、选择题

1. B

2. C

二、解答题

3. **解**:设x小时后可分裂为y个.

由题意得$y=4^x$,当$x=3$时,$y=4^3=64$.

故这个细胞经过3小时后可分裂到64个.

4. **解**:设经过x年还有y万公顷荒地需要绿化.

由题意得$y=3(1-20\%)^x$,即$y=3\times0.8^x$,

当$x=4$时,$y=3\times0.8^4=1.228\ 8$.

故经过4年后还有1.228 8万公顷荒地需要绿化.

5. **解**:设x年后设备的价值为y万元.

由题意得$y=100\times(1-10\%)^x$,即$y=100\times0.9^x$.

令$50=100\times0.9^x$,即$0.9^x=0.5$,得$x=\log_{0.9}0.5\approx7$.

故经过7年后,设备的价值仅为原来的一半.

6. **解**:设x年后这个城市的人口可达y万.

由题意得$y=100\times(1+0.6\%)^x$,即$y=100\times1.006^x$,则$120=100\times1.006^x$,即$1.006^x=1.2$,得$x=\log_{1.006}1.2\approx30.48$.

答:31年后这个城市的人口可达120万.

【能力提升】

1. **解**:设经过x年后国民生产总值将达到y亿元.

由题意得:$y=25(1+7.8\%)^x$,即$y=25\times1.078^x$,

当$x=6$时,$y=25\times1.078^6\approx39.23$.

故到2026年该市的国民生产总值将达到39.23亿元.

2. **解**:设镭的衰减率为k,经过x年残留量为y.

由题意得$y=(1-k)^x$,$0.957\ 6=(1-k)^{100}$,解得$k\approx0.000\ 433\ 2$,因此$y=0.999\ 566\ 8^x$,于是$0.5=0.999\ 566\ 8^x$,得$x=\log_{0.999\ 566\ 8}0.5\approx1\ 600$.

故镭的半衰期大约是1 600年.

第 5 章测试题

一、选择题

1. B　**解析**:$a^3\cdot a^{-3}=a^{3-3}=a^0=1$.

2. A　**解析:**偶次根式下的数为正数,开四次方也为正数.

3. C　**解析:**根据指数函数的定义可得.

4. D　**解析:**$1-2x>0$,解得 $x<\frac{1}{2}$.

5. D　**解析:**对数函数 $y=\log_a x(a>0$,且 $a\neq1)$的图像都过点$(1,0)$.

6. A　**解析:**$\log_{\frac{1}{2}}x=-\log_2 x$,故关于 x 轴对称.

7. B　**解析:**因为函数在$(0,+\infty)$内为增函数,则 $a-1>1$,解得 $a>2$,选 B.

8. A　**解析:**$g(x)=a^x$ 的图像经过一、二象限,且过点$(0,1)$,$f(x)=a^x+b$ 的图像是将 $g(x)=a^x$ 的图像向下平移$|b|(b<-1)$个单位而得,因为 $0<a<1$,$b<-1$,所以当 $x>0$ 时,$f(x)=a^x+b<1+b<0$,从而函数 $f(x)$的图像不经过第一象限.

9. B　**解析:**函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 为减函数,故 $2a+1>3-2a$,解得 $a>\frac{1}{2}$.

10. D　**解析:**$a=\log_{\frac{1}{3}}2<0$,$b=\log_{\frac{1}{3}}3<0$,$c=\left(\frac{1}{2}\right)^{0.3}>0$,并且 $\log_{\frac{1}{3}}2>\log_{\frac{1}{3}}3$,所以 $c>a>b$.

二、填空题

11. a^2b^9　**解析:**$(a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{3}{4}})^{12}=a^{\frac{1}{6}\times12}b^{\frac{3}{4}\times12}=a^2b^9$.

12. $\{x|x<4\}$　**解析:**要使函数有意义,需令 $4-x>0$,即 $x<4$,所以函数的定义域为$\{x|x<4\}$.

13. 2　**解析:**$4=a^2$,解得 $a=2$.

14. 2　**解析:**因为 $\log_{100}25=\frac{\lg 25}{\lg 100}=\frac{\lg 5^2}{\lg 10^2}=\lg 5$,所以 $\lg 20+\log_{100}25=\lg 20+\lg 5=\lg 100=2$. 此外,本题也可直接使用换底公式的推论求解.
$\lg 20+\log_{100}25=\lg 20+\log_{10^2}5^2=\lg 20+\frac{2}{2}\log_{10}5=\lg 20+\lg 5=\lg 100=2$.

15. $a-2$　**解析:**因为 $3^a=2$,所以 $a=\log_3 2$.
所以 $\log_3 8-2\log_3 6=\log_3 2^3-2\log_3(2\times3)=3\log_3 2-2(1+\log_3 2)=\log_3 2-2=a-2$.

16. $\frac{1}{9}$　**解析:**$2^{\log_3 x}=\frac{1}{4}$,则 $\log_3 x=-2$,解得 $x=\frac{1}{9}$.

三、解答题

17. **解:**(1)原式$=1+\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\left(\frac{3}{2}\right)^{3\times\frac{2}{3}}+3^{2\times\frac{3}{2}}=1+1+27=29$.
(2)原式$=0+2-2+2\lg 2+2\lg 5-4=0+2-2+2(\lg 2+\lg 5)-4=0+2-4=-2$.

18. **解:**(1)由题意得 $2^x-16\geqslant0$,解得 $x\geqslant4$,故定义域为$[4,+\infty)$.
(2)由题意得
$\begin{cases}\log_{0.5}(4x-3)>0,\\4x-3>0,\end{cases}$解得$\frac{3}{4}<x<1$.
因此定义域为$\left(\frac{3}{4},1\right)$.

19. **解:**(1)把点$(16,2)$代入函数解析式得 $2=\log_a 16$,解得 $a=4$,故函数的解析式为 $f(x)=\log_4 x$.
(2) $f(64)=\log_4 64=3$.

20. **解:**设至少过滤 x 次,则$(1-20\%)^x\leqslant5\%$,即 $0.8^x\leqslant0.05$.
两边取对数得 $x\lg 0.8\leqslant\lg 0.05$,所以 $x\geqslant\frac{\lg 0.05}{\lg 0.8}=\frac{\lg 5-\lg 100}{\lg 8-\lg 10}=\frac{1-\lg 2-2}{-1+3\lg 2}\approx\frac{-1.301\,0}{-1+3\times0.301\,0}\approx13.4$.
故至少需要过滤 14 次.

第 6 章　直线与圆的方程

6.1　两点间距离公式和线段的中点坐标公式

【基础巩固】

一、选择题

1. C

2. B　**解析:**$|P_1P_2|=\sqrt{(1+2)^2+(4-6)^2}=\sqrt{13}$.

3. D　**解析:**由条件知 $\sqrt{a^2+8^2}=10$,所以 $a^2=36$,所以$a=\pm6$.

4. B　**解析:**关于原点对称相当于以原点为中点.

5. C　**解析:**设点 A 关于点 B 的对称点为 C,则点 B 为线段 AC 的中点,令 $C(x,y)$,代入中点坐标公式容易求得 $C(3,-5)$.

6. B　**解析:**设点 N 的坐标为$(x,0)$,则 $|MN|=\sqrt{(x+2)^2+(-3)^2}=5$,解得 $x=2$ 或$x=-6$. 故点 N 的坐标为$(2,0)$或$(-6,0)$.