数 学
同步提升与练习
拓展模块1・下

选题策划：胡志平
责任编辑：苏　莉
封面设计：刘文东

ISBN 978-7-5661-3747-0

定价：29.90元

中等职业学校公共基础课程辅导用书

数学 同步提升与练习 拓展模块1・下

主编 杨钧

哈尔滨工程大学出版社 Harbin Engineering University Press

中等职业学校公共基础课程辅导用书

数 学
同步提升与练习
拓展模块1・下

主　编　杨　钧

哈尔滨工程大学出版社
Harbin Engineering University Press

中等职业学校公共基础课程辅导用书

数学

同步提升与练习

拓展模块1·下

主　编　杨　钧

哈尔滨工程大学出版社
Harbin Engineering University Press

内 容 简 介

本书按照教材《数学 拓展模块一（下册）》的章节顺序进行编写。“知识脉络”模块对本章知识点进行了总结。“学习目标”模块参照考试大纲，使学生对知识要点的掌握程度有一个初步了解。“知识梳理”模块通过预习，培养学生的阅读能力、理解能力及总结能力。“典型例题”模块对经典例题进行详细讲解，使学生能更好地掌握课本知识。“巩固练习”模块分为基础巩固和能力提升两部分，通过自我检测，使学生做到及时查缺补漏，确保当堂内容当堂清。每章后配有章节测试题，既能强化学生对相应章节知识之间关系的认识，又能培养学生解决综合问题的能力，培养学生的数学思想及解题技巧。

本书可作为广大中等职业学校学生的学习用书，也可作为教师教学的参考资料。

图书在版编目(CIP)数据

数学同步提升与练习：拓展模块 1. 下 / 杨钧主编
. — 哈尔滨：哈尔滨工程大学出版社，2022.11(2023.9 重印)
ISBN 978 - 7 - 5661 - 3747 - 0

Ⅰ.①数… Ⅱ.①杨… Ⅲ.①数学课 - 中等专业学校 - 教学参考资料 Ⅳ.①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2022)第 198921 号

数学同步提升与练习(拓展模块 1·下)
SHUXUE TONGBU TISHENG YU LIANXI (TUOZHAN MOKUAI 1·XIA)

选题策划 胡志平
责任编辑 苏 莉
封面设计 刘文东

出版发行 哈尔滨工程大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区南通大街 145 号
邮政编码 150001
发行电话 0451-82519328
传 真 0451-82519699
经 销 新华书店
印 刷 三河市骏杰印刷有限公司
开 本 880 mm×1 230 mm 1/16
印 张 10
字 数 189 千字
版 次 2022 年 11 月第 1 版
印 次 2023 年 9 月第 2 次印刷
定 价 29.90 元
http://www.hrbeupress.com
E-mail:heupress@hrbeu.edu.cn

前言

PREFACE

职业教育是培养技术技能人才，促进就业创业创新，推动中国制造和服务上水平的重要基础。而中等职业教育的基础地位是国家经济发展的需要，是国家脱贫攻坚的需要，是国家社会稳定的需要。这就要求中等职业学校必须与时俱进，不断进行教育教学改革。本书以深化学校教育教学改革、提高课堂教学实效性为目标，以《中等职业学校数学课程标准》(2020 年版)为基础，充分落实学生的主体地位，从而激发学生的自信，挖掘学生的潜力。

本书是与中等职业教育课程改革规划新教材《数学　拓展模块一(下册)》相配套的学生指导用书，主要包含以下模块：

知识脉络——对本章知识点进行了总结。

学习目标——参照考试大纲，使学生对知识要点的掌握程度有一个初步了解。

知识梳理——通过预习，培养学生的阅读能力、理解能力及总结能力。

典型例题——对经典例题进行详细讲解，使学生能更好地掌握课本知识。

巩固练习——分为基础巩固和能力提升两部分，通过自我检测，使学生做到及时查缺补漏，确保当堂内容当堂清。

章节测试题——通过章节测试，既能强化学生对相应章节知识之间关系的认识，又能培养学生解决综合问题的能力，培养学生的数学思想及解题技巧。

由于编者学术水平有限，书中难免存在不足之处，敬请读者提出宝贵的意见和建议。

编　者

目录

CONTENTS

第 6 章　三角计算　1

6.1　和角公式 …… 2

6.1.1　两角和与差的余弦公式 …… 2

6.1.2　两角和与差的正弦公式 …… 5

6.1.3　两角和与差的正切公式 …… 8

6.2　二倍角公式 …… 11

6.3　正弦型函数的图像和性质 …… 15

6.4　解三角形 …… 21

6.4.1　三角形面积公式 …… 21

6.4.2　正弦定理 …… 22

6.4.3　余弦定理 …… 25

6.5　三角计算的应用 …… 29

第 6 章测试题 …… 34

第 7 章　数列　37

7.1　数列的概念 …… 38

7.2　等差数列 …… 41

7.2.1　等差数列的概念 …… 41

7.2.2　等差数列前 n 项和公式 …… 43

7.3　等比数列 …… 46

7.3.1　等比数列的概念 …… 46

7.3.2　等比数列前 n 项和公式 …… 48

7.4　等差数列与等比数列的应用 …… 51

第 7 章测试题 …… 55

第 8 章　排列组合　57

8.1　计数原理 …… 58
8.1.1　分类计数原理 …… 58
8.1.2　分步计数原理 …… 60
8.1.3　计数原理的应用 …… 62
8.2　排列与组合 …… 66
8.2.1　排列 …… 66
8.2.2　组合 …… 69
8.2.3　排列组合的应用 …… 72
8.3　二项式定理 …… 77
8.3.1　二项式定理 …… 77
8.3.2　二项式系数的性质 …… 80
第 8 章测试题 …… 83

第 9 章　随机变量及其分布　85

9.1　离散型随机变量及其分布 …… 86
9.1.1　离散型随机变量 …… 86
9.1.2　离散型随机变量的分布列及其数字特征 …… 89
9.1.3　二项分布 …… 93
9.2　正态分布 …… 98
第 9 章测试题 …… 102

第 10 章　统计　105

10.1　集中趋势与离散程度 …… 106
10.1.1　集中趋势 …… 106
10.1.2　离散程度 …… 110
10.2　一元线性回归 …… 113
第 10 章测试题 …… 117

期末测试题　120

第6章
三角计算

知识脉络

- 三角计算
  - 和角公式
    - 两角和与差的余弦公式
    - 两角和与差的正弦公式
    - 两角和与差的正切公式
  - 二倍角公式
  - 正弦型函数的图像和性质
  - 解三角形
    - 三角形面积公式
    - 正弦定理
    - 余弦定理
  - 三角计算的应用

6.1 和角公式

6.1.1 两角和与差的余弦公式

学习目标

1. 了解两角和与两角差的余弦公式的推导过程.
2. 理解两角和与两角差的余弦公式在求值、化简及证明等方面的应用.

知识梳理

两角和与差的余弦公式

$\cos(\alpha+\beta)=$________________________.

$\cos(\alpha-\beta)=$________________________.

(答案在本节末尾)

典型例题

例 1 不用计算器,求 $\cos 75°$的值.

解 将 $75°$看成是 $30°$与 $45°$的和,利用公式得

$$\begin{aligned}\cos 75°&=\cos(30°+45°)\\&=\cos 30°\cos 45°-\sin 30°\sin 45°\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

点拨 把一个大角分解成两个特殊角,用两角和的余弦公式计算.

例 2 设 $\cos\alpha=\frac{3}{5}$,$\cos\beta=\frac{4}{5}$,并且 α 和 β 都是锐角,求 $\cos(\alpha+\beta)$的值.

解 因为 $\cos\alpha=\frac{3}{5}$,$\cos\beta=\frac{4}{5}$,并且 α 和 β 都是锐角,所以由

$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$,$\cos^2\beta+\sin^2\beta=1$,得

$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{4}{5}$,$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\frac{3}{5}$,

因此,利用公式得

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$$=\frac{3}{5}\times\frac{4}{5}-\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}=0.$$

点拨 可利用两角和的余弦公式来进行求解，但首先应求出 $\sin\alpha$，$\sin\beta$ 的值，灵活运用公式 $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$ 即可解决.

例3 化简下列各式.

(1) $\cos 40^\circ\cos 20^\circ-\sin 40^\circ\sin 20^\circ$；

(2) $\cos(\alpha-\beta)\cos\beta-\sin(\alpha-\beta)\sin\beta$.

解 (1) $\cos 40^\circ\cos 20^\circ-\sin 40^\circ\sin 20^\circ=\cos(40^\circ+20^\circ)$

$$=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}.$$

(2) $\cos(\alpha-\beta)\cos\beta-\sin(\alpha-\beta)\sin\beta=\cos[(\alpha-\beta)+\beta]$

$$=\cos\alpha.$$

点拨 两角和与差的余弦公式把角 $\alpha+\beta$ 的三角函数转化成了 α，β 的三角函数式. 如果反过来，从右向左使用公式，我们就可以将上述的三角函数式化简.

巩固练习

基础巩固

一、选择题

1. $\cos 69^\circ\cos 9^\circ+\sin 69^\circ\sin 9^\circ=$ ( )

A. 0　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. 1

2. $\cos 16^\circ\cos 14^\circ-\sin 16^\circ\sin 14^\circ=$ ( )

A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. 已知 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$，则 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$ 等于 ( )

A. $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{6}}{6}$　　B. $1-\frac{\sqrt{6}}{6}$　　C. $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{6}}{6}$　　D. $\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}$

4. 在 $\triangle ABC$ 中，$\cos A=\frac{3}{5}$，$\cos B=\frac{5}{13}$，则 $\cos C=$ ( )

A. $\frac{63}{65}$　　B. $-\frac{33}{65}$　　C. $-\frac{63}{65}$　　D. $\frac{33}{65}$

二、填空题

5. $\cos 105^\circ=$__________.

6. 已知 $\sin\alpha=\dfrac{15}{17}$，$\alpha$ 为第二象限角，则 $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)=$____________.

三、解答题

7. 已知 $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$，$\cos\beta=-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，$\beta\in\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$，求 $\cos(\alpha+\beta)$ 的值.

8. 已知 α 和 β 都是锐角，且满足 $\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$，$\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{3}{5}$，求 $\cos\beta$ 的值.

能力提升

1. 设 $\alpha,\beta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin\beta=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，则 $\alpha+\beta$ 的大小为 （　　）

A. -135°　　B. 45°　　C. 135°　　D. 45° 或 135°

2. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $\cos A\cos B-\sin A\sin B=0$，则 $\triangle ABC$ 是____________三角形.

3. 化简：$\sqrt{3}\cos x-\sin x$.

知识梳理答案

$\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

6.1.2 两角和与差的正弦公式

学习目标

1. 了解两角和与两角差的正弦公式的推导过程.
2. 理解两角和与两角差的正弦公式在求值、化简及证明等方面的应用.

知识梳理

两角和与差的正弦公式

$\sin(\alpha+\beta)=$________________________.

$\sin(\alpha-\beta)=$________________________.

(答案在本节末尾)

典型例题

例 1 不用计算器,求 $\sin 75°$的值.

解 将 $75°$看成是 $30°$与 $45°$的和,利用两角和的正弦公式得

$$\sin 75°=\sin(30°+45°)=\sin 30°\cos 45°+\cos 30°\sin 45°$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.$$

点拨 把一个大角分解成两个特殊角,用两角和的正弦公式计算.

例 2 已知 $\cos\alpha=\frac{3}{5}$,$\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$,求 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$的值.

解 由于 $\cos\alpha=\frac{3}{5}$,$\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$,所以

$$\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=-\frac{4}{5},$$

则 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\alpha\cos\frac{\pi}{3}+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{3}$

$$=\left(-\frac{4}{5}\right)\times\frac{1}{2}+\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}-4}{10}.$$

点拨 可利用两角和的正弦公式来进行求解,但首先应求出 $\sin\alpha$ 的值,灵活运用公式 $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$ 即可求解.

例3 化简下列各式.

(1) $\sin 12°\cos 18°+\cos 12°\sin 18°$;

(2) $\sin\beta\cos(\alpha-\beta)+\cos\beta\sin(\alpha-\beta)$.

解 (1) $\sin 12°\cos 18°+\cos 12°\sin 18°=\sin(12°+18°)=\sin 30°=\frac{1}{2}$.

(2) $\sin\beta\cos(\alpha-\beta)+\cos\beta\sin(\alpha-\beta)=\sin[\beta+(\alpha-\beta)]=\sin\alpha$.

点拨 两角和与差的正弦公式把角 $\alpha+\beta$ 的三角函数转化成了 α,β 的三角函数式. 如果反过来,从右向左使用公式,我们就可以将上述的三角函数式化简.

巩固练习

基础巩固

一、选择题

1. $\sin 30°\cos 15°+\cos 30°\sin 15°=$ ( )

A. 1　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. $\sin 105°=$ ( )

A. $\frac{\sqrt{3}}{4}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$　　D. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

3. 已知 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,$\sin\alpha=\frac{1}{2}$,则 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=$ ( )

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$　　D. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

4. 已知 α 为锐角,且 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{3}$,则 $\sin\alpha=$ ( )

A. $\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{6}$　　B. $\frac{\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{6}$　　C. $\frac{1+2\sqrt{6}}{6}$　　D. $\frac{1-2\sqrt{6}}{6}$

二、填空题

5. 若 $\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{4}=\sin x$,请写出一个符合要求的 $x=$__________.

6. 化简:$\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x=$__________.

三、解答题

7. 已知 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$,$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,$\cos\beta=-\frac{2}{3}$,$\beta\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$,求 $\sin(\alpha+\beta)$,$\sin(\alpha-\beta)$的值.

8. 已知 $\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{5}{13}$，$\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$，$\alpha,\beta$ 均为锐角，求 $\sin\beta$ 的值.

能力提升

1. 已知 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\beta\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$，且 $\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{3}{5}$，$\sin\beta=-\dfrac{\sqrt{2}}{10}$，则 α 的值为 ( )

A. $\dfrac{2\pi}{3}$　　B. $\dfrac{3\pi}{4}$　　C. $\dfrac{\pi}{4}$　　D. $\dfrac{\pi}{3}$

2. 若 $\sin x-\sqrt{3}\cos x=2\sin(x+\theta)$，$\theta\in(-\pi,\pi)$，则 θ 的值为 ( )

A. $-\dfrac{\pi}{3}$　　B. $\dfrac{\pi}{3}$　　C. $\dfrac{2\pi}{3}$　　D. $-\dfrac{2\pi}{3}$

3. 已知角 α 的顶点与原点重合，始边与 x 轴的非负半轴重合，终边在直线 $y=3x$ 上，求 $\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

4. 已知 $\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{3}$，$\theta\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$，求 $\sin\theta$.

知识梳理答案

$\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

6.1.3 两角和与差的正切公式

学习目标

1. 了解两角和与两角差的正切公式的推导过程.
2. 理解两角和与两角差的正切公式在求值、化简及证明等方面的应用.

知识梳理

两角和与差的正切公式

$\tan(\alpha+\beta)=$______________.

$\tan(\alpha-\beta)=$______________.

（答案在本节末尾）

典型例题

例1 不用计算器，求下列式子的值.

(1)$\tan\dfrac{11\pi}{12}$；(2)$\tan 285°$.

解 (1)$\tan\dfrac{11\pi}{12}=-\tan\dfrac{\pi}{12}=-\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{\tan\dfrac{\pi}{4}-\tan\dfrac{\pi}{6}}{1+\tan\dfrac{\pi}{4}\tan\dfrac{\pi}{6}}$

$$=-\frac{1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}}{1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}}=-2+\sqrt{3}.$$

(2)$\tan 285°=\tan(360°-75°)=-\tan 75°=-\tan(45°+30°)$

$$=-\frac{\tan 45°+\tan 30°}{1-\tan 45°\tan 30°}=-2-\sqrt{3}.$$

例2 化简下列各式.

(1)$\dfrac{\sqrt{3}-\tan 15°}{1+\sqrt{3}\tan 15°}$；

(2)$\tan 15°+\tan 30°+\tan 15°\tan 30°$.

解 (1)$\dfrac{\sqrt{3}-\tan 15°}{1+\sqrt{3}\tan 15°}=\dfrac{\tan 60°-\tan 15°}{1+\tan 60°\tan 15°}=\tan(60°-15°)=1.$

(2)$\tan 15°+\tan 30°+\tan 15°\tan 30°=\tan(15°+30°)(1-\tan 15°\tan 30°)+\tan 15°\tan 30°=1.$

点拨 (1)题逆用两角差的正切公式；(2)题利用公式的变形进行转换.

巩固练习

基础巩固

一、选择题

1. 已知 $\tan\alpha=3$,则 $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=$ ( )

A. 1　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 2　　D. -2

2. $\frac{\tan 75^\circ-\tan 15^\circ}{1+\tan 75^\circ\tan 15^\circ}=$ ( )

A. 1　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2　　D. $-\sqrt{3}$

3. 若 $\tan\alpha=3$,$\tan\beta=\frac{4}{3}$,则 $\tan(\alpha-\beta)=$ ( )

A. -3　　B. $-\frac{1}{3}$　　C. 3　　D. $\frac{1}{3}$

4. 已知 $\tan\alpha=\frac{1}{2}$,则 $\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-1}{1+\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}$ 的值是 ( )

A. 2　　B. $\frac{1}{2}$　　C. -1　　D. -3

二、填空题

5. 已知 $\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=-7$,则 $\tan\alpha=$____________.

6. $\tan 10^\circ+\tan 50^\circ+\sqrt{3}\tan 10^\circ\tan 50^\circ=$____________.

三、解答题

7. 已知角 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,$\sin\alpha=\frac{3}{5}$.

(1)求 $\tan\alpha$ 的值;

(2)求 $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$ 的值.

8. 若 $\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\tan\alpha=\frac{4}{3}$，$\tan\beta=\frac{1}{7}$，求 $\alpha-\beta$ 的值.

能力提升

1. 已知 $\tan(\alpha+\beta)=7$，$\tan\alpha=\frac{3}{4}$，且 $\beta\in(0,\pi)$，则 β 的值为____________.

2. 设 $\tan\alpha$，$\tan\beta$ 是方程 $x^2-3x+2=0$ 的两根，求 $\tan(\alpha+\beta)$ 的值.

知识梳理答案

$\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

6.2　二倍角公式

学习目标

理解二倍角的正弦公式、余弦公式和正切公式的推导过程及在求值、化简与证明等方面的应用.

知识梳理

1. 二倍角公式

(1) $\sin 2\alpha=$______________.

(2) $\cos 2\alpha=$______________$=$______________$=$______________.

(3) $\tan 2\alpha=$______________.

2. 降次公式

(1) $\sin^2\alpha=$______________.

(2) $\cos^2\alpha=$______________.

3. 升幂公式

(1) $1-\cos 2\alpha=$______________.

(2) $1+\cos 2\alpha=$______________.

(答案在本节末尾)

典型例题

例1　已知 $\cos\alpha=-\frac{12}{13}$，且 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，求 $\sin 2\alpha$，$\cos 2\alpha$，$\tan 2\alpha$ 的值.

解　因为 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，

所以 $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(-\frac{12}{13}\right)^2}=\frac{5}{13}$.

利用公式可得

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\times\frac{5}{13}\times\left(-\frac{12}{13}\right)=-\frac{120}{169}$，

$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2\times\left(-\frac{12}{13}\right)^2-1=\frac{119}{169}$，

则 $\tan 2\alpha=\dfrac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=-\dfrac{120}{119}$.

点拨 应用二倍角公式解题，求 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 时要注意角所在的象限.

例 2 已知 $\cos\dfrac{\alpha}{2}=-\dfrac{3}{5}$，且 $\alpha\in(\pi,2\pi)$，求 $\sin\alpha$，$\cos\dfrac{\alpha}{4}$的值.

解 由 $\alpha\in(\pi,2\pi)$可知$\dfrac{\alpha}{2}\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$，所以

$\sin\dfrac{\alpha}{2}=\sqrt{1-\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}=\sqrt{1-\left(-\dfrac{3}{5}\right)^2}=\dfrac{4}{5}$，

故 $\sin\alpha=2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}=2\times\dfrac{4}{5}\times\left(-\dfrac{3}{5}\right)=-\dfrac{24}{25}$.

由$\dfrac{\alpha}{2}\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$可知$\dfrac{\alpha}{4}\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$，

所以 $\cos^2\dfrac{\alpha}{4}=\dfrac{1+\cos\dfrac{\alpha}{2}}{2}=\dfrac{1+\left(-\dfrac{3}{5}\right)}{2}=\dfrac{1}{5}$，

$\cos\dfrac{\alpha}{4}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

点拨 $\dfrac{\alpha}{2}$与 α，$\dfrac{\alpha}{2}$与$\dfrac{\alpha}{4}$之间都是具有二倍关系的角，故可以使用二倍角公式来计算.

例 3 已知 $\tan\alpha=2$，化简并求值：$\dfrac{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{1-\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}$.

解 $\dfrac{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{1-\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}=\dfrac{1+2\cos^2\alpha-1+2\sin\alpha\cos\alpha}{1-(1-2\sin^2\alpha)+2\sin\alpha\cos\alpha}=\dfrac{2\cos\alpha(\cos\alpha+\sin\alpha)}{2\sin\alpha(\cos\alpha+\sin\alpha)}=$
$\dfrac{1}{\tan\alpha}=\dfrac{1}{2}$.

点拨 利用倍角公式将 2α 化为 α，合理选择使用余弦二倍角公式.

巩固练习

基 础 巩 固

一、选择题

1. 计算 $1-2\sin^2 22.5°$的结果等于 （ ）

A. $\dfrac{1}{2}$ B. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

2. 已知 $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$，则 $\sin 2\alpha=$ （ ）

A. $\dfrac{1}{4}$ B. $-\dfrac{1}{4}$ C. $\dfrac{3}{4}$ D. $-\dfrac{3}{4}$

3. 如果 $x=\frac{\pi}{12}$,那么 $\cos^4 x-\sin^4 x=$ ( )

A. 0　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{1}{2}$

4. 已知 $\tan\alpha=2$,则 $\tan 2\alpha$ 的值为 ( )

A. $-\frac{4}{5}$　　B. $\frac{4}{5}$　　C. $-\frac{4}{3}$　　D. $\frac{4}{3}$

二、填空题

5. $\sin 15^\circ\cos 15^\circ=$____________.

6. 已知 $\sin\alpha=\frac{1}{2}$,则 $\cos 2\alpha$ 的值是____________.

三、解答题

7. 已知 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$,且 α 是第二象限角,求 $\sin 2\alpha$,$\cos 2\alpha$,$\tan 2\alpha$ 的值.

8. 证明:$\frac{\sin 2\alpha+2\sin^2\alpha}{\cos\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)}=2\tan\alpha$.

9. 已知 $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)=\frac{1}{3}$,求 $\sin 2\theta$.

10. 已知 $\tan\alpha=-\frac{3}{4}$，求$\frac{\sin^2\alpha-\sin 2\alpha}{\cos^2\alpha+\cos 2\alpha}$的值.

能力提升

1. 角 α 的顶点在坐标原点，始边与 x 轴非负半轴重合，终边过点 $P(-1,2)$，则 $\sin 2\alpha$ 等于（　　）

A. $-\frac{3}{5}$　　B. $\frac{3}{5}$　　C. $-\frac{4}{5}$　　D. $\frac{4}{5}$

2. 已知 $\sin\frac{x}{2}-2\cos\frac{x}{2}=0$.

(1)求 $\tan x$ 的值；

(2)求$\frac{\cos 2x}{\cos\left(\frac{5\pi}{4}+x\right)\sin(\pi+x)}$的值.

知识梳理答案

1. (1)$2\sin\alpha\cos\alpha$　(2)$\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$　$2\cos^2\alpha-1$　$1-2\sin^2\alpha$　(3)$\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

2. (1)$\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$　(2)$\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$

3. (1)$2\sin^2\alpha$　(2)$2\cos^2\alpha$

6.3 正弦型函数的图像和性质

学习目标

1. 了解正弦型函数与正弦函数之间的关系.
2. 初步掌握在一个周期上画正弦型函数简图的"五点法".
3. 理解正弦型函数的图像和性质.

知识梳理

1. 正弦型函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$ 主要有以下性质：

(1)定义域为____________；

(2)最小正周期为 $T=$____________；

(3)值域为____________,即最大值为____________,最小值为____________.

2. 一般地,为了作出正弦型函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$ 的图像,可令 $z=\omega x+\varphi$,然后求得一个周期内的正弦型曲线五个关键点的坐标,依次为__________,__________,__________,__________,__________.

3. 将三角函数式化为正弦型函数式

令 $\sin\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$,$\cos\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$,则

$$a\cos x+b\sin x=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right)=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi).$$

4. 函数的图像变换$(A>0,\omega>0)$

ω——周期变化:由 $y=\sin x$ 的图像,在保持纵坐标不变的情况下,将各点的横坐标压缩或伸长为原来的$\dfrac{1}{\omega}$倍,得到 $y=\sin\omega x$ 的图像,它的周期为 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$.

φ——左右平移变化:当 $\varphi>0$ 时,将函数 $y=\sin\omega x$ 的图像向左平移$\dfrac{\varphi}{\omega}$个单位;当 $\varphi<0$ 时,将函数 $y=\sin\omega x$ 的图像向右平移$\dfrac{|\varphi|}{\omega}$个单位,得到 $y=\sin(\omega x+\varphi)$ 的图像.

A——振幅变化:由 $y=\sin(\omega x+\varphi)$ 的图像,在保持横坐标不变的情况下,把所有点的纵坐标伸长或缩短到原来的 A 倍,得到 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图像.

(答案在本节末尾)

典型例题

例1 求函数 $y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的周期，并指出当角 x 取何值时函数取得最大值和最小值.

解 函数的周期为 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

设 $z=2x+\frac{\pi}{6}$，则 $x=\frac{z}{2}-\frac{\pi}{12}$.

当 $z=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，即 $x=k\pi+\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$ 时，函数 $y=2\sin z$ 有最大值，最大值为 2；

当 $z=2k\pi+\frac{3\pi}{2}$，即 $x=k\pi+\frac{2\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$ 时，函数 $y=2\sin z$ 有最小值，最小值为 -2.

所以，当 $x=k\pi+\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$ 时，函数 $y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 取得最大值 2；当 $x=k\pi+\frac{2\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$ 时，函数 $y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 取得最小值 -2.

点拨 结合正弦函数的图像和性质可得取得最大、最小值时 x 的范围.

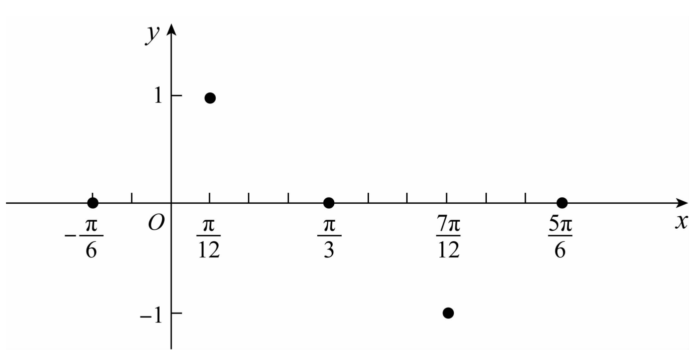
例2 利用“五点法”作出正弦型函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 在一个周期内的简图.

解 在函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 中，$\omega=2$，因此周期为 $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

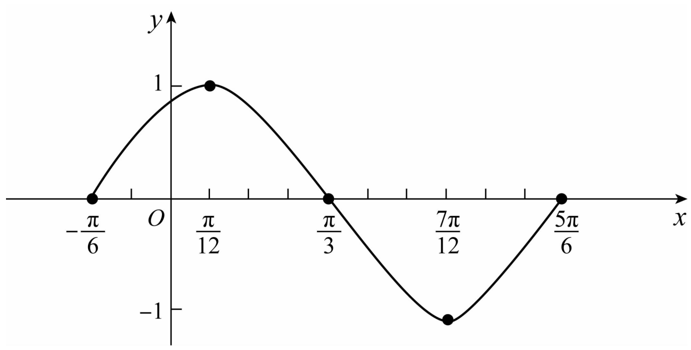
为求出图像上的五个关键点的横坐标，令 $z=2x+\frac{\pi}{3}$，分别取 $z=0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2},2\pi$，我们找出一个周期 π 内五个特殊的点，求出对应的 x 的值与函数 y 的值，如下表所示.

x	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{6}$
$z=2x+\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$	0	1	0	-1	0

以表中每组 (x,y) 为坐标描点，如图所示，在直角坐标系中比较精确地描出对应的五个关键点：$\left(-\frac{\pi}{6},0\right)$，$\left(\frac{\pi}{12},1\right)$，$\left(\frac{\pi}{3},0\right)$，$\left(\frac{7\pi}{12},-1\right)$，$\left(\frac{5\pi}{6},0\right)$.



用光滑的曲线连接各点，得到函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 在一个周期内的图像，如图所示.



点拨 由“五点法”的原则可知点的序号与式子的关系是：“第一点”为 $\omega x+\varphi=0$；“第二点”（即图像曲线的最高点）为 $\omega x+\varphi=\frac{\pi}{2}$；“第三点”为 $\omega x+\varphi=\pi$；“第四点”（即图像曲线的最低点）为 $\omega x+\varphi=\frac{3\pi}{2}$；“第五点”为 $\omega x+\varphi=2\pi$.

例 3 要得到 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图像，只需将函数 $y=\sin 2x$ 的图像 （ ）

A. 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位　　B. 向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位

C. 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位　　D. 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位

解析 根据“左加右减”的特点可知 D 正确.

点拨 一般地，函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$ 的图像可以看作是用下面的方法得到的：先把正弦曲线 $y=\sin x$ 上所有点向左（$\varphi>0$）或向右（$\varphi<0$）平移 $|\varphi|$ 个单位长度，再把所得各点的横坐标缩短（$\omega>1$）或伸长（$0<\omega<1$）到原来的 $\frac{1}{\omega}$ 倍（纵坐标不变），再把所得各点的纵坐标伸长（$A>1$）或缩短（$0<A<1$）到原来的 A 倍（横坐标不变）.

例 4 已知函数 $f(x)=\sin x-\sqrt{3}\cos x$，$x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，则 $f(x)$ 的最小正周期是________，最大值是________，最小值是________.

解析 因为 $f(x)=\sin x-\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$，所以 $f(x)$ 的最小正周期 $T=2\pi$. 因为 $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$，所以 $-\frac{5\pi}{6}\leqslant x-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{6}$，故当 $x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$，即 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，$f(x)_{\max}=1$，当 $x-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{2}$，即 $x=-\frac{\pi}{6}$ 时，$f(x)_{\min}=-2$.

点拨 求解此类问题，首先要掌握正弦型函数的值域，其次利用正弦、余弦函数取最值时 x 的取值范围列出等式，最后求解等式即可；同时可将函数 $y=a\sin\omega x+b\cos\omega x(a>0,b>0)$ 转

化为$y=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\omega x+\varphi)$，其中$\tan\varphi=\frac{b}{a}$.

巩固练习

基础巩固

一、选择题

1. 函数$y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$的最小正周期是（　　）

A. $\frac{\pi}{2}$　　B. π

C. 2π　　D. 5π

2. 要得到函数$y=\sin\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)$的图像，只需将函数$y=\sin 4x$的图像（　　）

A. 向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位　　B. 向右平移$\frac{\pi}{12}$个单位

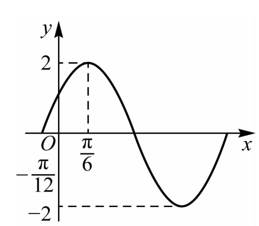
C. 向左平移$\frac{\pi}{3}$个单位　　D. 向右平移$\frac{\pi}{3}$个单位

3. 已知函数$f(x)=2\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)(\omega>0)$的最小正周期是$\frac{\pi}{3}$，则$\omega=$（　　）

A. $\frac{\pi}{3}$　　B. 6

C. 3　　D. 2

4. 已知函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$的部分图像如图所示，则该函数的解析式是（　　）



A. $y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$　　B. $y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$

C. $y=2\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}\right)$　　D. $y=2\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)$

二、填空题

5. 函数$y=4\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$的最小正周期是__________，最大值是__________，最小值是__________.

6. 函数$y=\sin x+2\cos x$的最大值是__________.

三、解答题

7. 已知函数$y=3\left(\sin 2x\cos\frac{\pi}{6}-\cos 2x\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

(1)求该函数的最小正周期；

(2)求该函数的单调递减区间；

(3)用“五点法”作出该函数在长度为一个周期的闭区间上的简图.

8. 已知函数 $y=2\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{3}\right)(\omega>0)$的最小正周期为 π. 求：

(1)ω 的值；

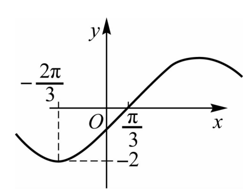
(2)函数的最大值及取得最大值时相应的 x 的值.

能 力 提 升

1. 函数 $y=\frac{1}{2}\sin x\cos x$ 的最小正周期是　　(　　)

A. 2π　　B. π　　C. $\frac{\pi}{2}$　　D. $\frac{\pi}{4}$

2. 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$的部分图像如图所示，则下列说法正确的是　　(　　)



A. 该函数为偶函数　　B. 该函数的最大值为 1

C. 该函数的最小正周期是 4π　　D. φ 的值是$-\frac{\pi}{3}$

3. 小明同学用“五点法”作某个正弦型函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$在一个周期内的图像时，列表如下：

x	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{6}$
$\omega x+\varphi$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$A\sin(\omega x+\varphi)$	0	3	0	-3	0

根据表中数据，求：

(1)实数 A,ω,φ 的值；

(2)该函数在区间$\left[\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$上的最大值和最小值.

知识梳理答案

1. **R** $\frac{2\pi}{\omega}$ $[-A,A]$ A $-A$

2. $\left(-\frac{\varphi}{\omega},0\right)$ $\left(-\frac{\varphi}{\omega}+\frac{T}{4},A\right)$ $\left(-\frac{\varphi}{\omega}+\frac{T}{2},0\right)$ $\left(-\frac{\varphi}{\omega}+\frac{3T}{4},-A\right)$ $\left(-\frac{\varphi}{\omega}+T,0\right)$

6.4 解三角形

6.4.1 三角形面积公式

学习目标

初步掌握用三角函数求三角形面积的方法.

知识梳理

在任意△ABC中,用∠A,∠B,∠C分别表示三角形的三个角,用a,b,c分别表示这三个角的对边,则可得:

三角形面积公式:$S=\frac{1}{2}ab\sin C=$____________$=$____________.

(答案在本节末尾)

典型例题

例　在△ABC中,∠$A=30°$,$b=4$,$c=3$,求$S_{\triangle ABC}$的值.

解　根据三角形的面积公式可得$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times4\times3\times\sin 30°=3$.

点拨　根据已知条件,先求出∠A的正弦值,再根据三角形的面积公式即可求解.

巩固练习

基 础 巩 固

一、选择题

1. 在△ABC中,已知$b=3$,$c=2$,$\sin A=\frac{2}{3}$,则△ABC的面积等于　　(　　)

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 6

2. 在△ABC中,已知$a=1$,$c=2$,∠$B=\frac{\pi}{3}$,则△ABC的面积等于　　(　　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. 1　　D. $\sqrt{3}$

3. 已知$\triangle ABC$的面积为$\frac{3}{2}$，且$b=2$，$c=\sqrt{3}$，则（　　）

A. $\angle A=30^\circ$　　B. $\angle A=60^\circ$

C. $\angle A=30^\circ$或150°　　D. $\angle A=60^\circ$或120°

二、填空题

4. 已知等边三角形的边长为4，则它的面积为__________.

5. 在▱$ABCD$中，$AB=8$，$AD=12$，$\angle A=60^\circ$，则▱$ABCD$的面积为__________.

三、解答题

6. 在$\triangle ABC$中，$\angle B=135^\circ$，$a=6$，$c=7$，求$S_{\triangle ABC}$的值.

能力提升

在$\triangle ABC$中，$\cos C=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$a=2\sqrt{3}$，$b=3$，求$S_{\triangle ABC}$的值.

知识梳理答案

$\frac{1}{2}ac\sin B$　$\frac{1}{2}bc\sin A$

6.4.2 正弦定理

学习目标

初步掌握用正弦定理解三角形的方法.

知识梳理

1. 正弦定理：在一个三角形中，各边与其所对角的正弦之比相等. 即在任意$\triangle ABC$中，用$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$分别表示三角形的三个角，用a,b,c分别表示这三个角的对边，则__________=__________=__________$=2R$（R为三角形外接圆的半径）.

2. 正弦定理的应用

(1)已知三角形的两角和一条边，求另一角和其他两条边.

(2)已知三角形的两边和其中一边的对角，求另一边和其他两角.

(3)判断三角形形状.

（答案在本节末尾）

典型例题

例 1　在$\triangle ABC$中，已知$b=14$，$\angle A=30°$，$\angle B=120°$，求a.

解　根据正弦定理有$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，所以

$$a=\frac{b\sin A}{\sin B}=\frac{14\sin 30°}{\sin 120°}=\frac{14\sqrt{3}}{3}.$$

例 2　已知在$\triangle ABC$中，$\angle A=30°$，$a=15\sqrt{2}$，$b=30$，求$\angle B$.

解　根据正弦定理有$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，所以

$$\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{30\times\sin 30°}{15\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

再由$b>a$知$\angle B>\angle A$，故$30°<\angle B<180°$，所以$\angle B=45°$或$\angle B=135°$.

点拨　已知三角形的两边和其中一边的对角，利用正弦定理求另一边的对角时，要讨论这个角的取值范围，避免发生错误.

例 3　在$\triangle ABC$中，已知$\angle B=60°$，$\angle C=15°$，$a=\sqrt{3}+1$，求b,c,$S_{\triangle ABC}$的值.

解　由三角形的内角和为180°可知$\angle A+\angle B+\angle C=180°$，则

$\angle A=180°-\angle B-\angle C=180°-60°-15°=105°$.

根据正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$可得

$$b=\frac{a\sin B}{\sin A}=\frac{(\sqrt{3}+1)\sin 60°}{\sin 105°}=\sqrt{6};$$

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{(\sqrt{3}+1)\sin 15°}{\sin 105°}=\sqrt{3}-1,$$

所以三角形的面积为

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times(\sqrt{3}+1)\times(\sqrt{3}-1)\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

点拨　本题考查三角形中的正弦定理和三角形面积公式等基础知识，主要考查基本运算能力.

巩固练习

基础巩固

一、选择题

1. 在△ABC中，已知$a=8$，$\angle B=60°$，$\angle C=75°$，则b等于　（　　）

A. $4\sqrt{2}$　　B. $4\sqrt{3}$　　C. $4\sqrt{6}$　　D. 16

2. 在△ABC中，已知$a=3$，$b=2$，$\angle A=60°$，则$\sin B=$　（　　）

A. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$　　B. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$　　C. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

3. 在△ABC中，若$\angle B=45°$，$\angle C=60°$，$c=1$，则最短边的边长是　（　　）

A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

4. 已知△ABC的三个内角之比为$\angle A∶\angle B∶\angle C=3∶2∶1$，那么，对应的三边之比$a∶b∶c$等于　（　　）

A. $3∶2∶1$　　B. $\sqrt{3}∶2∶1$　　C. $\sqrt{3}∶\sqrt{2}∶1$　　D. $2∶\sqrt{3}∶1$

二、填空题

5. 在△ABC中，已知$a=2$，$b=2\sqrt{2}$，$\angle A=30°$，则$\angle B=$__________.

6. △ABC中，$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$所对的边分别为a，b，c，且满足$c\sin A=a\cos C$，则$\angle C=$__________.

三、解答题

7. 在△ABC中，$a=\sqrt{3}$，$b=1$，$\angle B=30°$，解三角形.

8. 在△ABC中，$(a^2+b^2)\sin(A-B)=(a^2-b^2)\sin(A+B)$，试判断△$ABC$的形状.

能力提升

1. 在△ABC中,根据下列条件解三角形,其中有两解的是 ( )

A. $b=10$,$\angle A=45°$,$\angle C=70°$　　B. $a=30$,$b=25$,$\angle A=150°$

C. $a=7$,$b=8$,$\angle A=98°$　　D. $a=14$,$b=16$,$\angle A=45°$

2. 在△ABC中,$\angle A$,$\angle B$,$\angle C$的对边分别为a,b,c,$\angle B=\frac{\pi}{3}$,$\cos A=\frac{4}{5}$,$b=\sqrt{3}$.求:

(1)$\sin C$的值;(2)△ABC的面积.

知识梳理答案

1. $\frac{a}{\sin A}$　$\frac{b}{\sin B}$　$\frac{c}{\sin C}$

6.4.3 余弦定理

学习目标

初步掌握用余弦定理解三角形的方法.

知识梳理

1. 余弦定理:三角形任何一边的平方等于其他两边的平方和减去这两边与它们夹角的余弦乘积的两倍,即在任意△ABC中,用$\angle A$,$\angle B$,$\angle C$分别表示三角形的三个角,用a,b,c分别表示这三个角的对边,则

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A\Rightarrow$________;

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B\Rightarrow$________;

$c^2=b^2+a^2-2ba\cos C\Rightarrow$________;

2. 余弦定理的应用

(1)已知三角形的两边及其夹角(或一边的对角),求第三边和其余两角.

(2)已知三角形的三边,求三个角.

(3)判断三角形形状.

(答案在本节末尾)

典型例题

例1 已知在$\triangle ABC$中,$\angle B=60°$,$a=6$,$c=8$,求b的值.

解 由余弦定理可得

$$\begin{aligned}b^2&=a^2+c^2-2ac\cos B\\&=6^2+8^2-2\times6\times8\times\cos 60°\\&=100-48=52,\end{aligned}$$

所以$b=2\sqrt{13}$.

例2 在$\triangle ABC$中,$a=6$,$b=7$,$c=10$,求$\triangle ABC$中的最大角和最小角(精确到$1°$).

解 因为在三角形中大边对大角,小边对小角,由于$a<b<c$,所以$\angle C$最大,$\angle A$最小.可得

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{7^2+10^2-6^2}{2\times7\times10}\approx0.8071,$$

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{6^2+7^2-10^2}{2\times6\times7}\approx-0.1786,$$

所以$\angle A\approx36°$, $\angle C\approx100°$.

点拨 我们首先根据"大边对大角,小边对小角"的原理找到要计算的角α(最大角或最小角),然后利用余弦定理计算$\cos\alpha$,最后算出角的大小.

例3 在$\triangle ABC$中,已知$a=3$,$c=\sqrt{3}$, $\angle A=120°$,求b和$\angle C$的值.

解 由余弦定理得$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,且$a=3$,$c=\sqrt{3}$,$\angle A=120°$,代入得

$3^2=b^2+(\sqrt{3})^2-2b\times\sqrt{3}\cos 120°$,

即得$b^2+\sqrt{3}b-6=0$,解得$b_1=\sqrt{3}$,$b_2=-2\sqrt{3}$(舍).

又因为$c=\sqrt{3}$,所以$b=c$,即$\triangle ABC$为等腰三角形,$\angle A=120°$,所以$\angle B=\angle C=30°$.

点拨 解三角形时要看准条件是应用正弦定理还是余弦定理,熟练掌握公式.

巩固练习

基 础 巩 固

一、选择题

1. 在$\triangle ABC$中,已知$a=5$,$b=7$,$c=8$,则$\angle B$等于 ( )

A. $30°$　　B. $45°$　　C. $60°$　　D. $90°$

2. 在$\triangle ABC$中,已知$a=4$,$b=6$,$\angle C=120°$,则边c的值是 ( )

A. 8　　B. $2\sqrt{17}$　　C. $6\sqrt{2}$　　D. $2\sqrt{19}$

3. 在△ABC中，$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$的对边分别为a，b，c，若$a^2+c^2-b^2=\sqrt{3}ac$，则$\angle B$的值为 ( )

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{\pi}{6}$或$\frac{5\pi}{6}$　　D. $\frac{\pi}{3}$或$\frac{2\pi}{3}$

4. 在△ABC中，若$b\cos A=a\cos B$，则△ABC是 ( )

A. 等边三角形　　B. 等腰三角形　　C. 直角三角形　　D. 锐角三角形

二、填空题

5. 在△ABC中，已知$a=2$，$b=3$，$\cos C=\frac{1}{3}$，则边c长为____________.

6. 在△ABC中，$\sin A:\sin B:\sin C=3:2:3$，则$\cos C$的值为____________.

三、解答题

7. 在△ABC中，$BC=7$，$AB=3$，且$\frac{\sin C}{\sin B}=\frac{3}{5}$.

(1)求AC；

(2)求$\angle A$.

8. 已知$a=3\sqrt{3}$，$c=2$，$\angle B=150°$，求边b的长及$S_{\triangle ABC}$.

能力提升

1. 在△ABC中，若$a=8$，$b=7$，$\cos C=\frac{13}{14}$，则最大角的余弦值是 ( )

A. $-\frac{1}{5}$　　B. $-\frac{1}{6}$　　C. $-\frac{1}{7}$　　D. $-\frac{1}{8}$

2. 在$\triangle ABC$中，$\angle B=60°$，$b^2=ac$，则$\triangle ABC$的形状为____________.

3. 在$\triangle ABC$中，$BC=a$，$AC=b$，a，b是方程$x^2-2\sqrt{3}x+2=0$的两个根，且$2\cos(A+B)=1$，

(1)求$\angle C$的度数；

(2)求AB的长度.

4. 在$\triangle ABC$中，a，b，c分别为$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$所对的三边，$a^2-(b-c)^2=bc$，

(1)求$\angle A$；

(2)若$\dfrac{b}{\sin B}=c=2$，求b的值.

知识梳理答案

1. $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$　$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$　$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

6.5　三角计算的应用

学习目标

初步掌握用三角计算解决实际问题的方法.

知识梳理

1. 三角形中的几何计算的有关知识

(1)正弦定理：

________=________=________$=2R$(R为$\triangle ABC$的外接圆半径).

(2)余弦定理：

________________$\Rightarrow \cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

________________$\Rightarrow \cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

________________$\Rightarrow \cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

(3)三角形的面积公式：

$S=$____________=____________=____________.

(4)重要结论

①在$\triangle ABC$中,若$\angle A,\angle B,\angle C$所对的边分别是$a,b,c$,则$\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c$.

②在$\triangle ABC$中,若$\angle A,\angle B,\angle C$所对的边分别是$a,b,c$,且$\angle A>\angle B>\angle C$,则$a>b>c$.

③在$\triangle ABC$中,给定$\angle A,\angle B$的正弦或余弦值,则$\angle C$有解的充要条件是$\cos A+\cos B>0$.

④在$\triangle ABC$中,$\sin(A+B)=\sin(\pi-C)=\sin C$,$\sin\dfrac{A+B}{2}=\sin\left(\dfrac{\pi-C}{2}\right)=\cos\dfrac{C}{2}$.

2. 三角计算中正弦型函数知识的应用

(1)振动量：$y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$表示一个振动量.

其中,振幅为A,周期$T=\dfrac{2\pi}{\omega}$,频率$f=\dfrac{1}{T}=\dfrac{\omega}{2\pi}$,相位为$\omega x+\varphi$,初相为$\varphi$.

(2)正弦型函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)$的性质：定义域为$\mathbf{R}$,值域为$[-|A|,|A|]$;最大值为$|A|$;最小值为$-|A|$;最小正周期为$T=\dfrac{2\pi}{|\omega|}$.其图像可由“五点法”或“平移法”作出来.

(答案在本节末尾)

典型例题

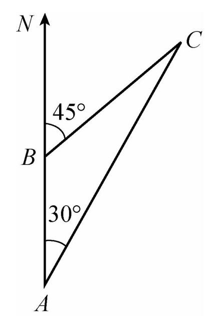
例1 弹簧上挂的小球做上下振动，它在时间 t(s)时离开平衡位置的距离 s(cm)满足 $s=2\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$，有如下三种说法：①小球开始在平衡位置上方$\sqrt{2}$ cm 处；②小球下降到最低点是离开平衡位置向下 2 cm 处；③经过 2π s 小球重复振动一次，其中正确的说法是 （　　）

A. ①②　　　　B. ②③

C. ①③　　　　D. ①②③

解析 当 $t=0$ 时，$s=2\sin\left(0+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$，故①正确；$s_{\min}=-2$，故②正确；$T=2\pi$，故③正确. 故选 D.

例2 一艘船以每小时 36 海里的速度向正北方向航行，在 A 处观察到灯塔C 在船的北偏东 30°方向，0.5 小时后船行驶到 B 处，此时灯塔 C 在船的北偏东 45°方向，如图所示，求 B 处到灯塔 C 的距离.



解 因为$\angle NBC=45°$，$\angle A=30°$，所以$\angle C=15°$. 由题意知

$AB=36\times0.5=18$(海里)，

利用两角差的正弦公式得出

$\sin 15°=\sin(45°-30°)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

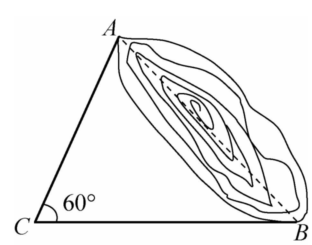
在$\triangle ABC$ 中，利用正弦定理可得

$BC=\frac{AB\cdot\sin A}{\sin C}=\frac{18\sin 30°}{\sin 15°}=9(\sqrt{6}+\sqrt{2})\approx34.8$(海里).

所以 B 处到灯塔 C 的距离约为 34.8 海里.

点拨 应用正弦定理解决实际问题时要找准所对应的边和角.

例3 修筑道路需挖掘隧道，在山的两侧是隧道口 A 和 B，在平地上选择适合测量的点 C，如图所示. 如果已知$\angle C=60°$，$AC=350$ m，$BC=450$ m，试计算隧道 AB 的长度(精确到 1 m).



解 在$\triangle ABC$ 中，利用余弦定理可得

$$\begin{aligned}AB^2&=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cdot\cos C\\&=350^2+450^2-2\times350\times450\times\cos 60°\\&=167\ 500.\end{aligned}$$

则得 $AB=\sqrt{167\ 500}\approx409$ (m).

所以隧道 AB 的长度约为 409 m.

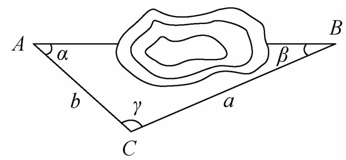
点拨 应用余弦定理解决实际问题时要找准所对应的边和角.

巩固练习

基础巩固

一、选择题

1. 如图，为了测量隧道两口 A,B 之间的长度，对给出的四组数据，计算时要求最简便，测量时要求最容易，应当采用的一组是（　　）



A. a,b,γ　　B. a,b,α

C. a,b,β　　D. α,β,a

2. 已知某路边一树干被台风吹断后，树尖与地面成 $45°$ 角，树干也倾斜为与地面成 $75°$ 角，树干底部与树尖着地处相距 20 m，则折断点与树干底部的距离是（　　）

A. $\frac{20\sqrt{6}}{3}$ m　　B. $10\sqrt{6}$ m

C. $\frac{10\sqrt{6}}{3}$ m　　D. $20\sqrt{2}$ m

3. 已知一艘船以 4 km/h 的速度与水流方向成 $120°$ 的方向航行，已知河水流速为 2 km/h，则经过 $\sqrt{3}$ h，该船实际航程为（　　）

A. $2\sqrt{15}$ km　　B. 6 km

C. $2\sqrt{21}$ km　　D. 8 km

4. 一船自西向东匀速航行，上午 10 时到达一座灯塔 P 的南偏西 $75°$ 距塔 68 海里的 M 处，下午 2 时到达这座灯塔的东南方向的 N 处，则这只船的航行速度为（　　）

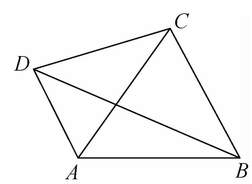
A. $\frac{17\sqrt{6}}{2}$海里/小时　　B. $34\sqrt{6}$海里/小时

C. $\frac{17\sqrt{2}}{2}$海里/小时　　D. $34\sqrt{2}$海里/小时

二、填空题

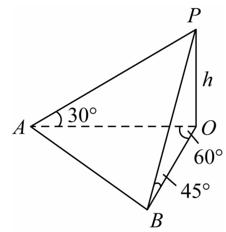
5. 一船以每小时 15 km 的速度向东航行，船在 A 处看到一个灯塔 B 在北偏东 $60°$，行驶 4 h 后，船到达 C 处，看到这个灯塔在北偏东 $15°$，这时船与灯塔的距离为__________ km.

6. 如图，CD 是京九铁路线上的一条穿山隧道，开凿前，在 CD 所在水平面上的山体外取点 A,B，并测得四边形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=\frac{\pi}{3}$，$\angle BAD=\frac{2\pi}{3}$，$AB=BC=400$ 米，$AD=250$ 米，则应开凿的隧道 CD 的长为__________米.

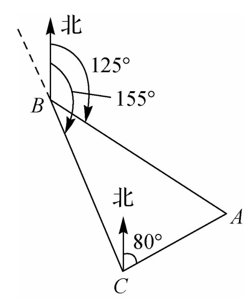


三、解答题

7. 如图,在地面上有一旗杆 OP,为测得它的高度 h,在地面上取一基线 AB,$AB=20$ m,在 A 处测得 P 点的仰角 $\angle OAP=30°$,在 B 处测得 P 点的仰角 $\angle OBP=45°$,又测得 $\angle AOB=60°$,求旗杆的高度 h(精确到 0.1 m).

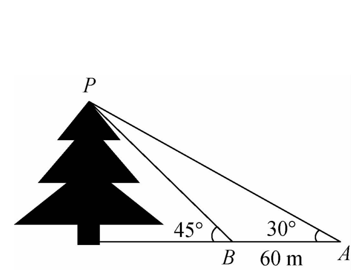


8. 如图,货轮在海上以 50 海里每小时的速度沿方位角(从正北方向顺时针转到目标方向线的水平角)为 155°的方向航行. 为了确定船位,在 B 点处观测到灯塔 A 的方位角为 125°. 半小时后,货轮到达 C 点处,观测到灯塔 A 的方位角为 80°. 求此时货轮与灯塔之间的距离(得数保留最简根号).



能力提升

1. 如图所示,为测一树的高度,在地面上选取 A,B 两点,从 A,B 两点分别测得树尖的仰角为 30°,45°,且 A,B 两点间的距离为 60 m,则树的高度为 ( )



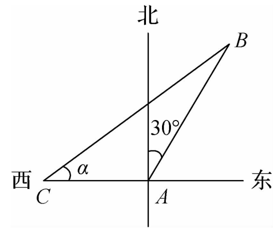
A. $(30+30\sqrt{3})$m　　B. $(30+15\sqrt{3})$m

C. $(15+30\sqrt{3})$m　　D. $(15+15\sqrt{3})$m

2. 如图，某军舰艇位于岛屿 A 的正西方 C 处，且与岛屿 A 相距 120 海里. 经过侦察发现，国际海盗船以 100 海里/小时的速度从岛屿 A 出发沿北偏东 30° 方向逃窜，同时，该军舰艇从 C 处出发沿北偏东 $90^\circ-\alpha$ 的方向匀速追赶国际海盗船，恰好用 2 小时追上.

(1)求该军舰艇的速度；

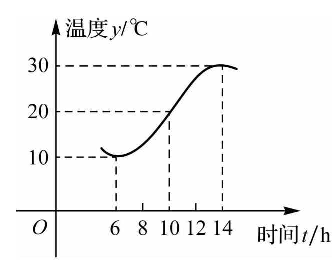
(2)求 $\sin\alpha$ 的值.



3. 如图是某地一天从 6 时至 14 时的温度变化曲线，近似地满足函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+b$ $(A>0,\omega>0,|\varphi|<\pi)$.

(1)求这段时间的最大温差；

(2)写出这段曲线的函数解析式.



知识梳理答案

1. (1)$\dfrac{a}{\sin A}$　$\dfrac{b}{\sin B}$　$\dfrac{c}{\sin C}$

(2)$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$　$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$　$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

(3)$\dfrac{1}{2}ab\sin C$　$\dfrac{1}{2}ac\sin B$　$\dfrac{1}{2}bc\sin A$

第 6 章测试题

一、选择题(本大题共 10 小题,每小题 4 分,共 40 分)

1. 化简 $\cos(x-y)\cos y-\sin(x-y)\sin y$ 可得 ( )

A. 1　　B. $\sin x$　　C. $\sin x\cos 2y$　　D. $\cos x$

2. 设 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,若 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$,则 $\sqrt{2}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=$ ( )

A. $\frac{7}{5}$　　B. $\frac{1}{5}$　　C. $-\frac{7}{5}$　　D. $-\frac{1}{5}$

3. 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $a=5,b=12,c=13$,则最大内角为 ( )

A. 60°　　B. 90°　　C. 120°　　D. 150°

4. 为得到函数 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图像,只需将函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图像 ( )

A. 向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度　　B. 向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度

C. 向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度　　D. 向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度

5. 在 $\triangle ABC$ 中,$\angle A,\angle B,\angle C$ 所对应的边分别为 a,b,c,$\angle A=30^\circ$,$\angle B=45^\circ$,$a=1$,则 $b=$ ( )

A. $\frac{\sqrt{2}}{4}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\sqrt{2}$　　D. $2\sqrt{2}$

6. 已知 $\sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{2}$,$\alpha\in(0,\pi)$,则 $\sin 2\alpha=$ ( )

A. -1　　B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. 1

7. 已知 α 是第二象限角,且 $\sin\alpha=\frac{5}{13}$,则 $\tan 2\alpha$ 的值是 ( )

A. $\frac{5}{12}$　　B. $-\frac{5}{12}$　　C. $\frac{120}{119}$　　D. $-\frac{120}{119}$

8. $\frac{2\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}\cdot\frac{\cos^2\alpha}{\cos 2\alpha}=$ ( )

A. $\tan\alpha$　　B. $\tan 2\alpha$　　C. 1　　D. $\frac{1}{2}$

9. 在 $\triangle ABC$ 中,$\angle A,\angle B,\angle C$ 的对边分别为 a,b,c,若 $(a^2+c^2-b^2)\tan B=\sqrt{3}ac$,则 $\angle B=$ ( )

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6}$　　D. $\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$

10. 飞机沿水平方向飞行，在 A 处测得正前下方地面目标 C 的俯角为 $30°$，向前飞行 10 000 m 到达 B 处，此时测得正前下方目标 C 的俯角为 $75°$，这时飞机与地面目标的水平距离为　(　　)

A. $2\,500(\sqrt{3}-1)$ m　B. $5\,000\sqrt{2}$ m　C. 4 000 m　D. $4\,000\sqrt{2}$ m

二、填空题(本大题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分)

11. $\sin 20°\cos 25°+\cos 20°\sin 25°=$__________.

12. 已知 $\tan x=\frac{1}{7}$，$\tan y=-3$，则 $\tan(x-y)=$__________.

13. 在△ABC 中，若 $a=\sqrt{5}$，$b=\sqrt{15}$，$\angle A=30°$，则边 $c=$__________.

14. 在△ABC 中，已知 $a=5$，$b=7$，$\angle B=120°$，则△ABC 的面积为__________.

15. 函数 $y=4\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)(\omega>0)$ 的最小正周期为 $\frac{3\pi}{2}$，则 $\omega=$__________.

16. 已知 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin(\alpha-\beta)=-\frac{\sqrt{10}}{10}$，$\alpha$，$\beta$ 均为锐角，则 β 等于__________.

三、解答题(本大题共 4 小题，每小题 9 分，共 36 分)

17. 已知 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，且 $\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

(1)求 $\cos\alpha$ 的值；

(2)若 $\sin(\alpha-\beta)=-\frac{3}{5}$，$\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，求 $\cos\beta$ 的值.

18. 在△ABC 中，$\angle A=\frac{\pi}{4}$，$AC=4$，$\cos B=\frac{1}{3}$.

(1)求 $\sin C$ 的值；

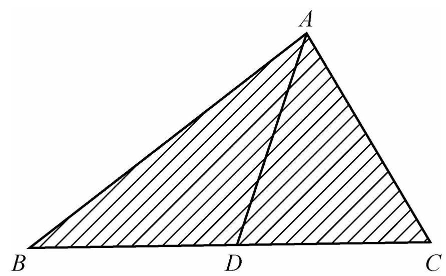
(2)求△ABC 的面积.

19. 已知函数 $f(x)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$，$x\in\mathbf{R}$.

(1)作出函数 $f(x)$在一个周期上的简图；

(2)根据图像求解不等式 $2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)>0$ 的解集.

20. 某公园有一块三角形的池塘，如图所示. 现在为了方便游客观赏池中景物，准备修建一架小桥，桥的两端要分别架在点 A 和 BC 边的中点 D 上. 已知 AB 长 60 m，BC 长 70 m，AC 长 50 m，试求出桥 AD 的长度(精确到 0.01 m).



数学同步提升与练习
（拓展模块1·下）

参考答案及解析

目　　录

第 6 章　三角计算 ······ 1

6.1　和角公式 ······ 1

6.2　二倍角公式 ······ 3

6.3　正弦型函数的图像和性质 ······ 4

6.4　解三角形 ······ 5

6.5　三角计算的应用 ······ 7

第 6 章测试题 ······ 8

第 7 章　数列 ······ 10

7.1　数列的概念 ······ 10

7.2　等差数列 ······ 10

7.3　等比数列 ······ 11

7.4　等差数列与等比数列的应用 ······ 12

第 7 章测试题 ······ 13

第 8 章　排列组合 ······ 14

8.1　计数原理 ······ 14

8.2　排列与组合 ······ 16

8.3　二项式定理 ······ 18

第 8 章测试题 ······ 19

第 9 章　随机变量及其分布 ······ 20

9.1　离散型随机变量及其分布 ······ 20

9.2　正态分布 ······ 23

第 9 章测试题 ······ 23

第 10 章　统计 ······ 25

10.1　集中趋势与离散程度 ······ 25

10.2　一元线性回归 ······ 26

第 10 章测试题 ······ 26

期末测试题 ······ 28

第 6 章　三 角 计 算

6.1　和 角 公 式

6.1.1　两角和与差的余弦公式

【基础巩固】

一、选择题

1. B　2. D

3. A　**解析:** 因为 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,$\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$,所以 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{6}}{3}$,所以 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\alpha\cos\frac{\pi}{6}-\sin\alpha\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{6}}{6}$. 故选 A.

4. D　**解析:** 易得 $\sin A=\frac{4}{5}$,$\sin B=\frac{12}{13}$,则 $\cos C=\cos[\pi-(A+B)]=-\cos(A+B)=\sin A\sin B-\cos A\cos B=\frac{33}{65}$.

二、填空题

5. $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

6. $\frac{15\sqrt{3}-8}{34}$　**解析:** 由题意可知 $\cos\alpha=-\frac{8}{17}$,所以 $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cos\alpha+\sin\frac{\pi}{3}\sin\alpha=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{8}{17}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{15}{17}=\frac{15\sqrt{3}-8}{34}$.

三、解答题

7. **解:** 由 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$,$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$可得

$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$,

由 $\cos\beta=-\frac{\sqrt{10}}{10}$,$\beta\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$可得

$\sin\beta=-\sqrt{1-\cos^2\beta}=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

因此,$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

8. **解:** 因为 $\cos\alpha=\frac{4}{5}$,α 是锐角,所以 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$. 因为 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$,$0<\beta<\frac{\pi}{2}$,所以 $0<\alpha+\beta<\pi$. 又因为 $\cos(\alpha+\beta)=\frac{3}{5}$,所以 $\sin(\alpha+\beta)=\frac{4}{5}$,所以 $\cos\beta=\cos[(\alpha+\beta)-\alpha]=\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha+\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha=\frac{24}{25}$.

【能力提升】

1. B　**解析:** 易得 $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,$\cos\beta=\frac{3\sqrt{10}}{10}$,则 $\cos(\alpha+\beta)=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 因为 $\alpha+\beta\in(0°,180°)$,所以 $\alpha+\beta=45°$.

2. 直角　**解析:** 由题意可知 $\cos A\cos B-\sin A\sin B=\cos(A+B)=0$. 又因为是在$\triangle ABC$ 中,所以 $A+B=\frac{\pi}{2}$,所以$\triangle ABC$ 是直角三角形.

3. **解:** 原式$=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos x-\sin\frac{\pi}{6}\sin x\right)=2\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)$.

6.1.2　两角和与差的正弦公式

【基础巩固】

一、选择题

1. C　2. D

3. D　**解析:** 因为 $\sin\alpha=\frac{1}{2}$,$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,所以 $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4}+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, 故选 D.

4. A　**解析:** 由 α 为锐角,且 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{3}$,可求得 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

故 $\sin\alpha=\sin\left[\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{6}\right]$

$=\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{6}+\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\sin\frac{\pi}{6}$

$=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{6}$.

二、填空题

5. $\frac{\pi}{6}$(答案不唯一)　**解析:** 由两角差的正弦公式知,$\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{4}=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{12}\right)=$

$\sin\frac{\pi}{6}$，所以 $x=2k\pi+\frac{\pi}{6}$ 或 $2k\pi+\frac{5\pi}{6}, k\in\mathbf{Z}$. 故答案可为$\frac{\pi}{6}$(答案不唯一).

6. $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ **解析**：$f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x=\sin 2x\cos\frac{\pi}{3}+\cos 2x\sin\frac{\pi}{3}=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

三、解答题

7. **解**：由 $\sin\alpha=\frac{3}{5}, \alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，得

$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\frac{4}{5}$.

又由 $\cos\beta=-\frac{2}{3}, \beta\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$，得

$\sin\beta=-\sqrt{1-\cos^2\beta}=-\frac{\sqrt{5}}{3}$.

所以 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$=\frac{3}{5}\times\left(-\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{4}{5}\right)\times\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)=\frac{4\sqrt{5}-6}{15}$.

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$=\frac{3}{5}\times\left(-\frac{2}{3}\right)-\left(-\frac{4}{5}\right)\times\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)=-\frac{4\sqrt{5}+6}{15}$.

8. **解**：由 α,β 均为锐角，可知 $0°<\alpha+\beta<180°$，$\cos\alpha>0$，$\sin(\alpha+\beta)>0$，

由 $\cos(\alpha+\beta)=\frac{5}{13}$ 得

$\sin(\alpha+\beta)=\sqrt{1-\cos^2(\alpha+\beta)}=\frac{12}{13}$.

由 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$ 得 $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{3}{5}$.

所以 $\sin\beta=\sin[(\alpha+\beta)-\alpha]=\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha-\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha=\frac{12}{13}\times\frac{3}{5}-\frac{5}{13}\times\frac{4}{5}=\frac{16}{65}$.

【能力提升】

1. C **解析**：因为 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right), \beta\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$，

所以 $\alpha-\beta\in(0,\pi)$.

因为 $\cos(\alpha-\beta)=\frac{3}{5}$，所以 $\sin(\alpha-\beta)=\frac{4}{5}$.

因为 $\beta\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$，$\sin\beta=-\frac{\sqrt{2}}{10}$，所以 $\cos\beta=\frac{7\sqrt{2}}{10}$.

所以 $\sin\alpha=\sin[(\alpha-\beta)+\beta]$

$=\sin(\alpha-\beta)\cos\beta+\cos(\alpha-\beta)\sin\beta$

$=\frac{4}{5}\times\frac{7\sqrt{2}}{10}+\frac{3}{5}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{10}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以 $\alpha=\frac{\pi}{4}$.

2. A **解析**：$\sin x-\sqrt{3}\cos x=2\left(\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)=2\left(\sin x\cos\frac{\pi}{3}-\cos x\sin\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$，故 θ 的值为$-\frac{\pi}{3}$.

3. **解**：(1)当 α 为第一象限角时，由题意，得 $\sin\alpha=\frac{3}{\sqrt{10}}$，$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{10}}$，所以 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{4}{\sqrt{10}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

(2)当 α 为第三象限角时，由题意，得 $\sin\alpha=-\frac{3}{\sqrt{10}}$，$\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{10}}$，所以 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{4}{\sqrt{10}}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

4. **解**：由 $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{3}$，得$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta=\frac{1}{3}$，即 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{3}$，联立 $\begin{cases}\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{3},\\ \sin^2\theta+\cos^2\theta=1,\end{cases}$ 得 $\sin^2\theta+\left(\frac{\sqrt{2}}{3}-\sin\theta\right)^2=1$，即 $2\sin^2\theta-\frac{2\sqrt{2}}{3}\sin\theta-\frac{7}{9}=0$，解得 $\sin\theta=\frac{\sqrt{2}\pm4}{6}$，又因为 $\theta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，所以 $\sin\theta=\frac{4+\sqrt{2}}{6}$.

6.1.3 两角和与差的正切公式

【基础巩固】

一、选择题

1. D **解析**：$\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\alpha+1}{1-\tan\alpha}=-2$.

2. B **解析**：原式$=\tan(75°-15°)=\tan 60°=\sqrt{3}$.

3. D **解析**：$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

$$=\frac{3-\frac{4}{3}}{1+3\times\frac{4}{3}}$$

$$=\frac{1}{3}.$$

4. B　**解析:** 因为 $\tan\alpha=\frac{1}{2}$，所以 $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\alpha+1}{1-\tan\alpha}=3$，所以 $\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-1}{1+\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}=\frac{3-1}{1+3}=\frac{1}{2}$. 故选 B.

二、填空题

5. $-\frac{3}{4}$　**解析:** $\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\alpha-1}{1+\tan\alpha}=-7$，解得 $\tan\alpha=-\frac{3}{4}$. 故答案为 $-\frac{3}{4}$.

6. $\sqrt{3}$　**解析:** 因为 $\tan 60°=\tan(10°+50°)=\frac{\tan 10°+\tan 50°}{1-\tan 10°\tan 50°}=\sqrt{3}$，所以 $\tan 10°+\tan 50°+\sqrt{3}\tan 10°\tan 50°=\sqrt{3}$.

三、解答题

7. **解:** (1) 因为角 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，$\sin\alpha=\frac{3}{5}$，

所以 $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\frac{4}{5}$，

所以 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{3}{4}$.

(2) $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\alpha}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\alpha}=\frac{1-\frac{3}{4}}{1+\frac{3}{4}}=\frac{1}{7}$.

8. **解:** 由题意可得 $\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{4}{3}-\frac{1}{7}}{1+\frac{4}{3}\times\frac{1}{7}}=1$，由 $\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 得 $\alpha-\beta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，故 $\alpha-\beta=\frac{\pi}{4}$.

【能力提升】

1. $\frac{\pi}{4}$　**解析:** $\tan\beta=\tan[(\alpha+\beta)-\alpha]=\frac{\tan(\alpha+\beta)-\tan\alpha}{1+\tan(\alpha+\beta)\tan\alpha}=\frac{7-\frac{3}{4}}{1+7\times\frac{3}{4}}=1$，又 $\beta\in(0,\pi)$，所以 $\beta=\frac{\pi}{4}$.

2. **解:** 因为 $\tan\alpha,\tan\beta$ 是方程 $x^2-3x+2=0$ 的两个根，所以 $\tan\alpha+\tan\beta=3$，$\tan\alpha\tan\beta=2$，则 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{3}{1-2}=-3$.

6.2　二倍角公式

【基础巩固】

一、选择题

1. B　2. D

3. B　**解析:** $\cos^4 x-\sin^4 x=(\cos^2 x+\sin^2 x)(\cos^2 x-\sin^2 x)=\cos 2x=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. C

二、填空题

5. $\frac{1}{4}$　**解析:** $\sin 15°\cos 15°=\frac{1}{2}\times 2\sin 15°\cos 15°=\frac{1}{2}\sin 30°=\frac{1}{4}$.

6. $\frac{1}{2}$　**解析:** 由二倍角公式可得 $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=1-2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.

三、解答题

7. **解:** 因为 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$，且 α 是第二象限角，所以

$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=-\frac{4}{5}$.

利用公式可得

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\times\frac{3}{5}\times\left(-\frac{4}{5}\right)=-\frac{24}{25}$,

$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2\times\left(-\frac{4}{5}\right)^2-1=\frac{7}{25}$,

则 $\tan 2\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=-\frac{24}{7}$.

8. **证明:** 左边 $=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha+2\sin^2\alpha}{\cos\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)}$

$=\frac{2\sin\alpha(\cos\alpha+\sin\alpha)}{\cos\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)}$

$=2\tan\alpha=$ 右边.

9. **解:** 由 $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)=\frac{1}{3}$，得 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{3}$，两边平方得 $1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{2}{9}$，所以 $\sin 2\theta=-\frac{7}{9}$.

10. **解:** $\frac{\sin^2\alpha-\sin 2\alpha}{\cos^2\alpha+\cos 2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$

$=\frac{\tan^2\alpha-2\tan\alpha}{2-\tan^2\alpha}=\frac{33}{23}$.

【能力提升】

1. C　**解析:** 因为角 α 的终边过点 $P(-1,2)$，所以

$\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}$. 由二倍角公式 $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$，得 $\sin 2\alpha=2\times\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)=-\frac{4}{5}$.

2. **解**：(1)由 $\sin\frac{x}{2}-2\cos\frac{x}{2}=0$，得 $\tan\frac{x}{2}=2$，所以

$$\tan x=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{2\times 2}{1-2^2}=-\frac{4}{3}.$$

(2)原式 $=\dfrac{\cos^2 x-\sin^2 x}{-\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)(-\sin x)}$

$$=\frac{(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x-\sin x)\sin x},$$

由(1)知 $\cos x-\sin x\neq 0$，

所以上式 $=\sqrt{2}\times\frac{\cos x+\sin x}{\sin x}=\sqrt{2}\times\frac{1+\tan x}{\tan x}=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

6.3 正弦型函数的图像和性质

【基础巩固】

一、选择题

1. B
2. B **解析**：根据图像“左加右减”的性质即可获得.
3. B
4. A **解析**：如题图所示，可得 $A=2$，又 $\frac{\pi}{6}-\left(-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{T}{4}$，$T=\frac{2\pi}{\omega}$，可得 $\omega=2$，故原函数解析式为 $y=2\sin(2x+\varphi)\left(|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$. 又 $2\sin\left(2\times\frac{\pi}{6}+\varphi\right)=2$，得 $\frac{\pi}{3}+\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，故 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，故所求的解析式为 $y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.

二、填空题

5. π；4；-4　6. $\sqrt{5}$

三、解答题

7. **解**：(1) $y=3\left(\sin 2x\cos\frac{\pi}{6}-\cos 2x\sin\frac{\pi}{6}\right)$

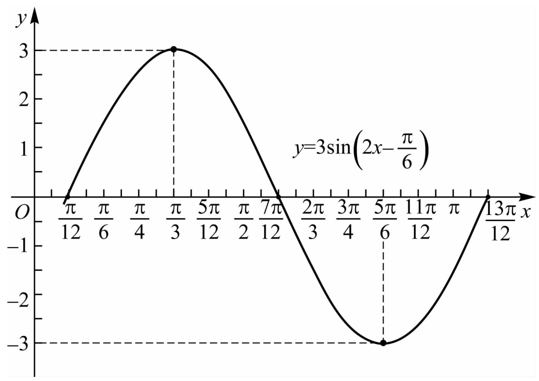
$=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，故函数的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

(2)令 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant 2x-\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\frac{3\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，解得：$k\pi+\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{5\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$，故函数的单调递减区间为：$\left[k\pi+\frac{\pi}{3},k\pi+\frac{5\pi}{6}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$.

(3)列表：

x	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{13\pi}{12}$
$2x-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	0	3	0	-3	0

描点、连线如图所示：



8. **解**：(1)由 $T=\frac{2\pi}{|\omega|}=\pi$ 且 $\omega>0$，得 $\omega=2$.

(2)当 $2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$，即 $x=k\pi+\frac{5}{12}\pi(k\in\mathbf{Z})$ 时函数取得最大值，最大值为 2.

【能力提升】

1. B
2. C **解析**：由图像可知，该函数不关于原点、y 轴对称，为非奇非偶函数，最大值为 2.

$\frac{T}{4}=\frac{\pi}{3}-\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=\pi$，所以最小正周期是 4π. 因为 $\frac{2\pi}{\omega}=4\pi$，所以 $\omega=\frac{1}{2}$. 令 $\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{3}+\varphi=0$，得 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$.

3. **解**：(1)由表可知 $A=3$，

$T=\frac{5\pi}{6}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\pi$，因为 $T=\frac{2\pi}{\omega}$，故 $\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，

解得 $\omega=2$，

所以 $y=3\sin(2x+\varphi)$.

因为函数图像过点 $\left(\frac{\pi}{12},3\right)$，

则 $3=3\sin\left(2\times\frac{\pi}{12}+\varphi\right)$，即 $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\varphi\right)=1$，

所以 $\frac{\pi}{6}+\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{3}$，

$k\in\mathbf{Z}$,

又因为$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}$.

(2)由(1)可知 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

因为$\frac{3\pi}{4}\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{4}$,所以$\frac{11\pi}{6}\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{17\pi}{6}$,

因此,当 $2x+\frac{\pi}{3}=\frac{11\pi}{6}$时,即 $x=\frac{3\pi}{4}$时,$y=-\frac{3}{2}$,

当 $2x+\frac{\pi}{3}=\frac{17\pi}{6}$时,即 $x=\frac{5\pi}{4}$时,$y=\frac{3}{2}$,

当 $2x+\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{2}$时,即 $x=\frac{13\pi}{12}$时,$y=3$,

所以该函数在区间$\left[\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$上的最大值是 3,最小值是$-\frac{3}{2}$.

6.4　解 三 角 形

6.4.1　三角形面积公式

【基础巩固】

一、选择题

1. A

2. B　**解析:**根据三角形面积公式得 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times1\times2\times\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. D　**解析:**因为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{3}{2}$,所以$\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{3}\sin A=\frac{3}{2}$,所以 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 所以$\angle A=60^\circ$或 120°. 故选 D.

二、填空题

4. $4\sqrt{3}$　5. $48\sqrt{3}$

三、解答题

6. **解:**根据三角形的面积公式可得 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times6\times7\times\sin135^\circ=\frac{21\sqrt{2}}{2}$.

【能力提升】

解:由 $\cos C=\frac{\sqrt{3}}{3}$,可求得 $\sin C=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

根据三角形的面积公式可得 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times3\times2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{6}}{3}=3\sqrt{2}$.

6.4.2　正 弦 定 理

【基础巩固】

一、选择题

1. C　**解析:**在$\triangle ABC$中,$\angle A=180^\circ-(\angle B+\angle C)=45^\circ$,由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$,得 $b=4\sqrt{6}$.

2. D

3. A　**解析:**由已知得$\angle A=75^\circ$,所以$\angle B$最小,故最短边是 b.

　由 $\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}$,得 $b=\frac{c\sin B}{\sin C}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

4. D　**解析:**因为$\angle A:\angle B:\angle C=3:2:1$,$A+B+C=180^\circ$,所以$\angle A=90^\circ$,$\angle B=60^\circ$,$\angle C=30^\circ$,所以 $a:b:c=\sin90^\circ:\sin60^\circ:\sin30^\circ=1:\frac{\sqrt{3}}{2}:\frac{1}{2}=2:\sqrt{3}:1$.

二、填空题

5. 45°或 135°　**解析:**由正弦定理,可得 $\sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 因为 $b>a$,所以$\angle B>\angle A=30^\circ$,所以$\angle B=45^\circ$或 135°.

6. $\frac{\pi}{4}$　**解析:**由 $c\sin A=a\cos C$ 结合正弦定理可得 $\sin C\sin A=\sin A\cos C$,且 $\sin A\neq0$,所以 $\tan C=1$,$\angle C\in(0,\pi)$,故$\angle C=\frac{\pi}{4}$.

三、解答题

7. **解:**由正弦定理,得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$,

　故 $\sin A=\frac{a\sin B}{b}=\sqrt{3}\sin30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

　故$\angle A=60^\circ$或$\angle A=120^\circ$.

　当$\angle A=60^\circ$时,$\angle C=90^\circ$,$c=\sqrt{a^2+b^2}=2$.

　当$\angle A=120^\circ$时,$\angle C=30^\circ$,$c=b=1$.

8. **解:**由$(a^2+b^2)\sin(A-B)=(a^2-b^2)\sin(A+B)$,得 $a^2[\sin(A+B)-\sin(A-B)]=b^2[\sin(A+B)+\sin(A-B)]$,所以 $a^2\cos A\sin B=b^2\sin A\cos B$. 由正弦定理,得 $\sin^2A\cos A\sin B=\sin^2B\sin A\cos B$.

　因为 $0<\angle A<\pi$,$0<\angle B<\pi$,所以 $\sin A>0$,$\sin B>0$,$0<2\angle A<2\pi$,$0<2\angle B<2\pi$,

　所以 $\sin A\cos A=\sin B\cos B$,即 $\sin2A=\sin2B$.

所以 $2\angle A=2\angle B$ 或 $2\angle A+2\angle B=\pi$,即 $\angle A=\angle B$ 或 $\angle A+\angle B=\frac{\pi}{2}$.

所以 $\triangle ABC$ 为等腰三角形或直角三角形.

【能力提升】

1. D **解析:** 对于 A 项,$\angle B=180^\circ-\angle A-\angle C=65^\circ$,由正弦定理知只有一解;

对于 B 项,因为 $a>b$,所以 $\angle A>\angle B$,又 $\angle A=150^\circ$,所以只有一解;

对于 C 项,因为 $a<b$,所以 $\angle A<\angle B$,而 $\angle A=98^\circ$,所以无解;

对于 D 项,$\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{16\sin 45^\circ}{14}=\frac{4\sqrt{2}}{7}<1$,且 $b\sin A<a<b$,所以有两解.

2. **解:** (1) $\angle A,\angle B,\angle C$ 为 $\triangle ABC$ 的内角,且 $\angle B=\frac{\pi}{3}$,$\cos A=\frac{4}{5}$,

可得

$\angle C=\frac{2\pi}{3}-\angle A$,$\sin A=\frac{3}{5}$,

则

$\sin C=\sin\left(\frac{2\pi}{3}-A\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A+\frac{1}{2}\sin A=\frac{3+4\sqrt{3}}{10}$.

(2) 由(1)知 $\sin A=\frac{3}{5}$,$\sin C=\frac{3+4\sqrt{3}}{10}$,且 $\angle B=\frac{\pi}{3}$,$b=\sqrt{3}$,

因此在 $\triangle ABC$ 中,由正弦定理得

$a=\frac{b\sin A}{\sin B}=\frac{6}{5}$.

则 $\triangle ABC$ 的面积

$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times\frac{6}{5}\times\sqrt{3}\times\frac{3+4\sqrt{3}}{10}=\frac{36+9\sqrt{3}}{50}$.

6.4.3 余弦定理

【基础巩固】

一、选择题

1. C **解析:** 因为 $\cos B=\frac{5^2+8^2-7^2}{2\times5\times8}=\frac{1}{2}$,所以 $\angle B=60^\circ$.

2. D **解析:** 由余弦定理得:$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=16+36-2\times4\times6\cos 120^\circ=76$,所以 $c=2\sqrt{19}$,故选 D.

3. A **解析:** 因为 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{\sqrt{3}ac}{2ac}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以 $\angle B=\frac{\pi}{6}$.

4. B **解析:** 因为 $b\cos A=a\cos B$,

所以 $b\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=a\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$.

所以 $b^2+c^2-a^2=a^2+c^2-b^2$.

所以 $a^2=b^2$.

所以 $a=b$. 故此三角形是等腰三角形.

二、填空题

5. 3 **解析:** 因为 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=2^2+3^2-2\times2\times3\times\frac{1}{3}=9$,所以 $c=3$.

6. $\frac{1}{3}$ **解析:** 由正弦定理得 $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=3:2:3$,

设 $a=3x,b=2x,c=3x$,则 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{9x^2+4x^2-9x^2}{2\times3x\times2x}=\frac{1}{3}$.

三、解答题

7. **解:** (1) 根据正弦定理 $\frac{AC}{\sin B}=\frac{AB}{\sin C}$,得 $\frac{AB}{AC}=\frac{\sin C}{\sin B}=\frac{3}{5}$. 又 $AB=3$,所以 $AC=\frac{5\times3}{3}=5$.

(2) 由余弦定理得 $\cos A=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=\frac{9+25-49}{2\times3\times5}=-\frac{1}{2}$,所以 $\angle A=120^\circ$.

8. **解:** 由 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=(3\sqrt{3})^2+2^2-2\times3\sqrt{3}\times2\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=49$,

得 $b=7$,

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times3\sqrt{3}\times2\times\frac{1}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

【能力提升】

1. C **解析:** 由余弦定理,得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=8^2+7^2-2\times8\times7\times\frac{13}{14}=9$,所以 $c=3$,故 a 最大,所以最大角的余弦值为 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{7^2+3^2-8^2}{2\times7\times3}=-\frac{1}{7}$.

2. 等边三角形　**解析:** 由余弦定理得，$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=a^2+c^2-ac$.

又因为 $b^2=ac$，所以 $ac=a^2+c^2-ac$.

即 $(a-c)^2=0$，所以 $a=c$.

又因为 $\angle B=60^\circ$，所以 $\triangle ABC$ 为等边三角形.

3. **解:** (1) 由题结合内角和为 180° 可知，

$\cos C=\cos[\pi-(A+B)]=-\cos(A+B)=-\dfrac{1}{2}$，

所以 $\angle C=120^\circ$.

(2) 因为 a,b 是方程 $x^2-2\sqrt{3}x+2=0$ 的两个根，

所以 $\begin{cases} a+b=2\sqrt{3}, \\ ab=2. \end{cases}$ 由余弦定理可得，

$$\begin{aligned} AB^2&=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cdot\cos C \\ &=b^2+a^2-2ab\cos 120^\circ=a^2+b^2+ab \\ &=(a+b)^2-ab=(2\sqrt{3})^2-2=10, \end{aligned}$$

所以 $AB=\sqrt{10}$.

4. **解:** (1) 由 $a^2-(b-c)^2=bc$，得 $b^2+c^2-a^2=bc$，

则 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{1}{2}$.

又 $0<\angle A<\pi$，所以 $\angle A=\dfrac{\pi}{3}$.

(2) 因为 $\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{b}{\sin B}=c$，则 $\sin C=1$，得 $\angle C=\dfrac{\pi}{2}$，

所以 $\angle B=\dfrac{\pi}{6}$.

因为 $\dfrac{b}{\sin B}=c=2$，

则 $b=2\sin B=2\sin\dfrac{\pi}{6}=1$.

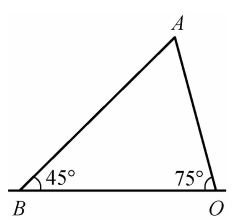
6.5　三角计算的应用

【基础巩固】

一、选择题

1. A　**解析:** 根据实际情况，α,β 都是不易测量的数据，在 $\triangle ABC$ 中，a,b 可以测得，角 γ 也可测得，根据余弦定理能直接求出 AB 的长.

2. A　**解析:** 如图，设树干底部为 O，树尖着地处为 B，折断点为 A，则 $\angle ABO=45^\circ$，$\angle AOB=75^\circ$，所以 $\angle OAB=60^\circ$.

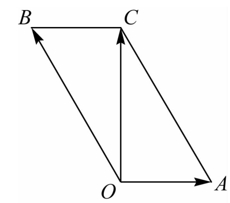


由正弦定理知，$\dfrac{AO}{\sin 45^\circ}=\dfrac{20}{\sin 60^\circ}$，

解得 $AO=\dfrac{20\sqrt{6}}{3}$(m).

3. B　**解析:** 如图，因为 $OA=2\sqrt{3}$ km，$OB=4\sqrt{3}$ km，$\angle AOB=120^\circ$，所以 $\angle OAC=60^\circ$，

$OC=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+(4\sqrt{3})^2-2\times2\sqrt{3}\times4\sqrt{3}\cos 60^\circ}=6$(km).

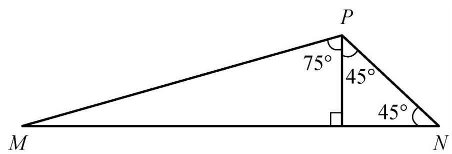


4. A　**解析:** 如图所示，在 $\triangle PMN$ 中，

$\dfrac{PM}{\sin 45^\circ}=\dfrac{MN}{\sin 120^\circ}$，

所以 $MN=\dfrac{68\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=34\sqrt{6}$(海里)，

所以 $v=\dfrac{MN}{4}=\dfrac{17\sqrt{6}}{2}$(海里/小时).

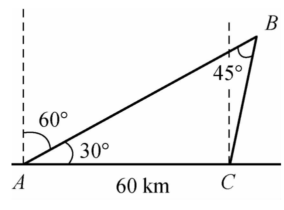


二、填空题

5. $30\sqrt{2}$　**解析:** 如图，由已知 $AC=60$ km，$\angle B=45^\circ$，$\angle BAC=30^\circ$，

所以由正弦定理得，$\dfrac{BC}{\sin 30^\circ}=\dfrac{60}{\sin 45^\circ}$，

所以 $BC=30\sqrt{2}$(km).



6. 350　**解析:** 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=BC=400$ 米，$\angle ABC=\dfrac{\pi}{3}$，

所以 $AC=AB=400$ 米，$\angle BAC=\dfrac{\pi}{3}$，

所以 $\angle CAD=\angle BAD-\angle BAC=\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{3}$.

所以在$\triangle CAD$中,由余弦定理,得

$CD^2=AC^2+AD^2-2AC\cdot AD\cdot\cos\angle CAD$

$=400^2+250^2-2\times400\times250\times\cos\frac{\pi}{3}$

$=122\ 500$,

所以$CD=350$(米).

三、解答题

7.**解:**在$Rt\triangle PAO$中,$AO=\frac{h}{\tan 30^\circ}=\sqrt{3}h$.

在$Rt\triangle PBO$中,$BO=\frac{h}{\tan 45^\circ}=h$.

又在$\triangle ABO$中,由余弦定理,得

$20^2=(\sqrt{3}h)^2+h^2-2\sqrt{3}h\cdot h\cos 60^\circ$,

由上式解得$h=\frac{20}{\sqrt{4-\sqrt{3}}}\approx13.3$(m).

故旗杆的高度约为13.3 m.

8.**解:**在$\triangle ABC$中,$\angle ABC=155^\circ-125^\circ=30^\circ$,

$\angle BCA=180^\circ-155^\circ+80^\circ=105^\circ$,

$\angle BAC=180^\circ-30^\circ-105^\circ=45^\circ$,

$BC=\frac{1}{2}\times50=25$(海里),

由正弦定理,得$\frac{AC}{\sin 30^\circ}=\frac{BC}{\sin 45^\circ}$,

解得$AC=\frac{25\sqrt{2}}{2}$(海里).

即此时货轮与灯塔间的距离为$\frac{25\sqrt{2}}{2}$海里.

【能力提升】

1.A **解析:**在$\triangle PAB$中,$\angle PAB=30^\circ$,$\angle APB=15^\circ$,$AB=60$ m,$\sin 15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)=\sin 45^\circ\cos 30^\circ-\cos 45^\circ\sin 30^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.由正弦定理得$\frac{PB}{\sin 30^\circ}=\frac{AB}{\sin 15^\circ}$,所以$PB=30(\sqrt{6}+\sqrt{2})$(m),所以树的高度为$PB\sin 45^\circ=30(\sqrt{6}+\sqrt{2})\times\frac{\sqrt{2}}{2}=(30+30\sqrt{3})$ m.

2.**解:**(1)依题意知,$\angle CAB=120^\circ$,$AB=100\times2=200$(海里),$AC=120$(海里),$\angle ACB=\alpha$,

在$\triangle ABC$中,由余弦定理,得

$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos\angle CAB$

$=200^2+120^2-2\times200\times120\cos 120^\circ$

$=78\ 400$,解得$BC=280$(海里).

所以该军舰艇的速度为$280\div2=140$(海里/小时).

(2)在$\triangle ABC$中,由正弦定理,得$\frac{AB}{\sin\alpha}=\frac{BC}{\sin 120^\circ}$,即

$\sin\alpha=\frac{AB\sin 120^\circ}{BC}=\frac{200\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{280}=\frac{5\sqrt{3}}{14}$.

3.**解:**(1)由图知,这段时间的最大温差是$30-10=20$(℃).

(2)图中从6时到14时的图像是函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)+b$的半个周期的图像,所以$T=2\times(14-6)=16$,$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{8}$.又$A=\frac{30-10}{2}=10$,$b=\frac{30+10}{2}=20$,

所以$y=10\sin\left(\frac{\pi}{8}x+\varphi\right)+20$.

当$x=6$时,y取到最小值,又由$|\varphi|<\pi$知,$\frac{\pi}{8}\times6+\varphi=\frac{3\pi}{2}$,

所以$\varphi=\frac{3\pi}{4}$,

所以所求函数解析式为$y=10\sin\left(\frac{\pi}{8}x+\frac{3\pi}{4}\right)+20$,$x\in[6,14]$.

第6章测试题

一、选择题

1.D **解析:**原式$=\cos[(x-y)+y]=\cos x$.

2.B **解析:**由已知可得$\cos\alpha=\frac{4}{5}$,故$\sqrt{2}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\alpha\cos\frac{\pi}{4}-\sin\alpha\sin\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{5}$.

3.B **解析:**$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{5^2+12^2-13^2}{2\times5\times12}=0$,$\angle C=90^\circ$.

4.B **解析:**根据平移的规律"左加右减"可得.

5.C **解析:**因为$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$,所以$b=\frac{1\times\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ}=\sqrt{2}$.

6.A **解析:**将$\sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{2}$两端同时平方得$(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2$,整理得$1-2\sin\alpha\cos\alpha=2$,于是$2\sin\alpha\cos\alpha=\sin 2\alpha=-1$.故选A.

7.D **解析:**因为角α是第二象限角,利用同角关系式可知$\cos\alpha=-\frac{12}{13}$,所以$\tan\alpha=-\frac{5}{12}$.所以$\tan 2\alpha=-\frac{120}{119}$,故选D.

8.B **解析:**原式$=\frac{2\sin 2\alpha}{2-2\sin^2\alpha}\cdot\frac{1-\sin^2\alpha}{\cos 2\alpha}=\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=$

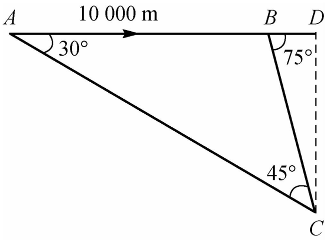
$\tan 2\alpha$. 故选 B.

9. D　**解析**：由$(a^2+c^2-b^2)\tan B=\sqrt{3}ac$ 得$(a^2+c^2-b^2)\cdot\dfrac{\sin B}{\cos B}=\sqrt{3}ac$，

利用余弦定理 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，

得$\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，则$\angle B=\dfrac{\pi}{3}$或$\dfrac{2\pi}{3}$. 故选 D.

10. A　**解析**：如图，$\angle BAC=30°$，$\angle DBC=75°$，$AB=10\ 000$ m，



所以$\angle ACB=45°$.

由正弦定理，得$\dfrac{10\ 000}{\sin 45°}=\dfrac{BC}{\sin 30°}$，

又 $\cos 75°=\dfrac{BD}{BC}$，

所以 $BD=\dfrac{10\ 000\cdot\sin 30°}{\sin 45°}\cdot\cos 75°=2\ 500(\sqrt{3}-1)$(m).

二、填空题

11. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　**解析**：$\sin 20°\cos 25°+\cos 20°\sin 25°=\sin 45°=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

12. $\dfrac{11}{2}$　**解析**：因为 $\tan x=\dfrac{1}{7}$，$\tan y=-3$，

所以 $\tan(x-y)=\dfrac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\tan y}=\dfrac{\dfrac{1}{7}+3}{1-\dfrac{3}{7}}=\dfrac{11}{2}$.

13. $2\sqrt{5}$或$\sqrt{5}$　**解析**：由余弦定理，得 $a^2=c^2+b^2-2cb\cdot\cos A$，代入整理得 $c^2-3\sqrt{5}c+10=0$，

所以 $c=2\sqrt{5}$或$\sqrt{5}$.

14. $\dfrac{15\sqrt{3}}{4}$　**解析**：由余弦定理 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，

得 $c^2+5c-24=0$，

解得 $c=3$ 或 $c=-8$(舍去).

所以 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}\times5\times3\sin 120°=\dfrac{15\sqrt{3}}{4}$.

15. $\dfrac{4}{3}$　**解析**：根据题意得$\dfrac{2\pi}{\omega}=\dfrac{3\pi}{2}$，解得 $\omega=\dfrac{4}{3}$.

16. $\dfrac{\pi}{4}$　**解析**：由条件知 $\cos\alpha=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$，所以 $\sin\beta=\sin[\alpha-(\alpha-\beta)]=\sin\alpha\cos(\alpha-\beta)-\cos\alpha\sin(\alpha-\beta)=\dfrac{\sqrt{5}}{5}\times\dfrac{3\sqrt{10}}{10}-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\times\left(-\dfrac{\sqrt{10}}{10}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，又 β 为锐角，所以 $\beta=\dfrac{\pi}{4}$.

三、解答题

17. **解**：(1)因为$\left(\sin\dfrac{\alpha}{2}+\cos\dfrac{\alpha}{2}\right)^2=1+2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{3}{2}$，

所以 $\sin\alpha=2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{3}{2}-1=\dfrac{1}{2}$.

又因为 $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$，所以 $\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

(2) 因为 $-\dfrac{\pi}{2}<\alpha-\beta<\dfrac{\pi}{2}$，$\cos(\alpha-\beta)=\sqrt{1-\sin^2(\alpha-\beta)}=\dfrac{4}{5}$，

所以

$$\begin{aligned}\cos\beta&=\cos[\alpha-(\alpha-\beta)]\\&=\cos\alpha\cos(\alpha-\beta)+\sin\alpha\sin(\alpha-\beta)\\&=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{4}{5}+\dfrac{1}{2}\times\left(-\dfrac{3}{5}\right)\\&=-\dfrac{4\sqrt{3}+3}{10}.\end{aligned}$$

18. **解**：(1)根据 $\cos B=\dfrac{1}{3}$ 及 $\cos^2B+\sin^2B=1$ 解得 $\sin B=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

所以

$$\begin{aligned}\sin C&=\sin(180°-A-B)=\sin(A+B)\\&=\sin A\cos B+\cos A\sin B\\&=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{2\sqrt{2}}{3}=\dfrac{4+\sqrt{2}}{6}.\end{aligned}$$

(2)由正弦定理得$\dfrac{AC}{\sin B}=\dfrac{AB}{\sin C}$，

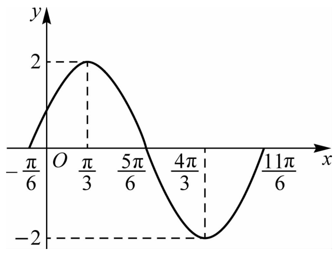
解得 $AB=2\sqrt{2}+1$，

所以 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times4\times(2\sqrt{2}+1)=4+\sqrt{2}$.

19. **解**：(1)列出表格.

$x+\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$
y	0	2	0	-2	0

描点：$\left(-\frac{\pi}{6},0\right)$，$\left(\frac{\pi}{3},2\right)$，$\left(\frac{5\pi}{6},0\right)$，$\left(\frac{4\pi}{3},-2\right)$，$\left(\frac{11}{6}\pi,0\right)$，连线，作出图像如图所示.



(2)由 $2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)>0$，得 $-\frac{\pi}{6}+2k\pi<x<\frac{5\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，故原不等式的解集为 $\left(-\frac{\pi}{6}+2k\pi,\frac{5\pi}{6}+2k\pi\right),k\in\mathbf{Z}$.

20. **解**：在△ABC 中，根据余弦定理得

$\cos B=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}=\frac{60^2+70^2-50^2}{2\times60\times70}=\frac{5}{7}$.

由于点 D 是 BC 边的中点，所以 $BD=\frac{1}{2}BC=35$.

在△ABD 中，利用余弦定理得

$$AD^2=AB^2+BD^2-2AB\cdot BD\cdot\cos B=60^2+35^2-2\times60\times35\times\frac{5}{7}=1\ 825,$$

则 $AD=\sqrt{1\ 825}\approx42.72$ (m).

所以桥 AD 的长度约为 42.72 m.

第7章　数　　列

7.1　数列的概念

【基础巩固】

一、选择题

1.B　2.B　3.D　4.B　5.B　6.D

二、填空题

7.不是；是

8.$-(2n-1)$

9.$\frac{1}{12}$　**解析**：$a_4+a_5=\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{12}$.

10.$2n+5$　**解析**：由 $a_n=2n+3$，得 $a_{n+1}=2(n+1)+3=2n+5$.

三、解答题

11.**解**：由 $a_n=\frac{(n-1)^3}{2}$ 可得

$a_1=\frac{(1-1)^3}{2}=0$，$a_2=\frac{(2-1)^3}{2}=\frac{1}{2}$，$a_3=\frac{(3-1)^3}{2}=4$，$a_4=\frac{(4-1)^3}{2}=\frac{27}{2}$.

12.**解**：令 $n^2+n-1=11$，解得 $n=3$ 或 $n=-4$(舍去)，所以 11 是数列$\{a_n\}$的第 3 项.

【能力提升】

1.B　**解析**：$a_3=\frac{a_2}{5}=25$，$a_4=\frac{a_3}{5}=5$.

2.**解**：根据题意，$a_1=2$，$a_2=a_1+2=2+2=4$，$a_3=a_2+2=4+2=6$，$a_4=a_3+2=6+2=8$，所以 $a_n=2n$.

3.**解**：根据题意，$a_1=2$，$a_2=2a_1=2\times2=4$，$a_3=2a_2=2\times4=8$，$a_4=2a_3=2\times8=16$，所以 $a_n=2^n$.

7.2　等差数列

7.2.1　等差数列的概念

【基础巩固】

一、选择题

1.C　**解析**：题中数列是首项为 0、公差为 2 的等差数列，其通项公式为 $a_n=2(n-1)+0=2n-2$.

2.C

3.B　**解析**：由 $a_n=4n-1$，得 $a_1=4\times1-1=3$，$d=a_{n+1}-a_n=[4(n+1)-1]-(4n-1)=4$，所以数列$\{a_n\}$是首项为 3、公差为 4 的等差数列.

4.B

二、填空题

5.(1)-4；(2)8；(3)3；(4)5

6.$3n-2$

7.6

三、解答题

8.**解**：因为 $a_{10}=a_6+4d$，所以 $d=\frac{a_{10}-a_6}{4}=5$，从而 $a_{20}=a_{10}+10d=62$.

9.**解**：数列$-1,3,7,11,\cdots$是首项为-1、公差为 4 的等