策划编辑：刘桂君
责任编辑：谭宏微
封面设计：蒋碧君

•广西普通高等教育专升本考试•

专用教材	语文
	数学
	英语
考前冲刺卷	语文
	数学
	英语

ISBN 978-7-5635-7224-3
定价：52.00元

广西普通高等教育专升本考试专用教材·数学
华腾新思专升本考试研究中心　主编
北京邮电大学出版社

华腾新思　依据广西普通高等教育专升本考试大纲与说明（2025年版）编写

广西普通高等教育专升本考试专用教材

华腾新思专升本考试研究中心　主编

数学

北京邮电大学出版社
www. buptpress. com

依据广西普通高等教育专升本考试大纲与说明（2025年版）编写

广西

华腾新思专升本考试研究中心　主编

普通高等教育专升本考试专用教材

数学

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

PREFACE 前言

为了帮助参加广西普通高校专升本考试的考生系统、全面、精准、高效地复习备考，我们特组织省内具有丰富教研经验的教研员，以广西普通高等教育专科升本科招生考试相应科目的考试要求为依据，紧密结合考生的学习特点，精心编写了这套广西普通高校专升本考试复习丛书。

本书是该系列丛书之《广西普通高等教育专升本考试专用教材·数学》，专为参加广西普通高校专升本考试的考生编写。本书将基础知识考查与解题能力训练相结合，旨在建立完整的备考体系，提供科学的备考方案，帮助广大参加广西普通高校专升本考试的考生迅速掌握考点，突破重点，攻克难点，弄清疑点。

本书具有以下特色。

1. 紧扣考试要求，合理选取内容

本书编写时以《广西普通高等教育专科升本大纲与说明(数学)》为依据，分为“函数、极限与连续”“一元函数微分学”“一元函数积分学”“常微分方程”四章。本书内容编排合理，整体难易程度与《广西普通高等教育专科升本科招生考试考试要求》一致，考生可以利用本书更好地把握考情，强化对基础知识的理解与运用，学习必备的解题方法，切实提高应试能力。

2. 科学安排体例，全面覆盖考点

本书根据知识间的关系，每章又细分为不同的小节，每节设置了“知识脉络”“考纲要求”“知识精讲”“典型例题”“巩固练习”五个栏目。“知识脉络”栏目罗列了本节主要的知识内容及知识间的结构，可帮助考生梳理和记忆各知识间的逻辑顺序；“考纲要求”栏目详细分析了考试大纲对每一个知识点的要求；“知识精讲”栏目细致讲解了每一个考生应熟悉或掌握的知识内容，并设置“备考提示”小栏目，可帮助考生理解知识内容，正确把握考点，拓展解题思路；“典型例题”栏目对例题进行剖析，可帮助考生准确把握考点；“巩固练习”栏目根据本节知识内容，结合考试的高频考点，设置了有针对性的练习题，可帮助考生趁热打铁，巩固本节所学知识。此外，在每一章末尾还设有考点总结和复习题，主要包含题型训练和本章知识内容的综合性题目，可让考生在实战中运用所学技巧，磨练解题能力。

3. 解析详细精当，强化解题能力

本书采取了讲练结合的方式，在讲解内容时穿插了许多练习题，所有的试题都配备了详尽、精当的解析，可帮助考生明确答题误区，找到解题技巧，及时查漏补缺，做到学练结合，从而有步骤、

有计划地提高应试能力。

在编写本套丛书的过程中，编者广泛征求了在高等院校中长期从事专升本考试研究工作的一线教师的意见，秉承高效、实用的理念打造精品。我们相信，凝聚着众多名师智慧的本套丛书定能成为考生通向成功彼岸的金桥，帮助考生到达理想的殿堂！

衷心希望本套丛书能为广大考生的复习备考带来实质性的帮助。对于书中的不足之处，敬请各位读者不吝指正。

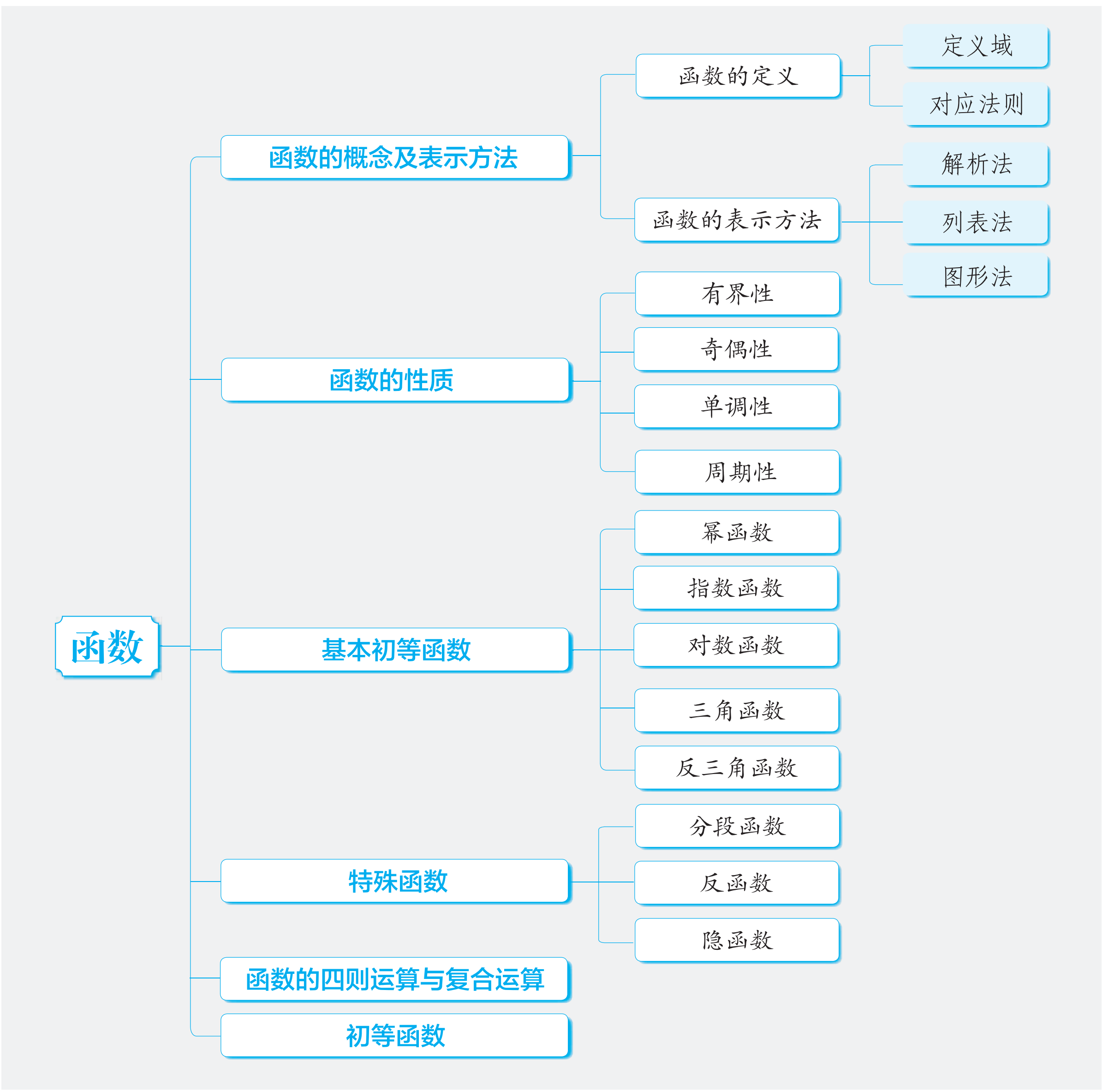
华腾新思专升本考试研究中心

CONTENTS 目录

第一章 函数、极限与连续

第一节 函数

知识脉络



考纲要求

1. 理解函数的概念,会求函数的定义域、表达式及函数值,会建立应用问题的函数关系.
2. 掌握函数的有界性、奇偶性、单调性和周期性.
3. 理解分段函数、反函数和复合函数的概念.
4. 掌握函数的四则运算与复合运算.
5. 掌握基本初等函数的性质及其图形,理解初等函数的概念.

知识精讲

一、函数的概念及表示方法

1. 函数的定义

(1)**定义 1** 设 D 是一个实数集. 如果存在一个对应法则 f,使得对 D 中的每一个数 x,在 $\mathbf{R}$ 中都有唯一确定的数 y 与之对应,那么称对应法则 f 为定义在 D 上的一个函数,记为

$$y=f(x),\quad x\in D.$$

其中 x 称为自变量,y 称为因变量,D 称为函数 f 的定义域.

注:函数的定义域通常由问题的实际背景确定,如果只给出解析式 $y=f(x)$,而没有指明它的定义域,那么函数的定义域就是指能使这个式子有意义的实数的集合.

例 1 求下列函数的定义域.

(1)$y=\sqrt{x+3}$; (2)$y=\dfrac{1}{x+2}$; (3)$y=\ln(x-1)$.

【解析】 (1)因为二次根式的被开方数不小于 0,所以 $x+3\geqslant 0$,解得 $x\geqslant -3$. 故 $y=\sqrt{x+3}$的定义域为 $[-3,+\infty)$.

(2)因为分式的分母不能为 0,所以 $x+2\neq 0$,即 $x\neq -2$. 故 $y=\dfrac{1}{x+2}$的定义域为 $(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)$.

(3)因为对数的真数大于 0,所以 $x-1>0$,解得 $x>1$. 故 $y=\ln(x-1)$的定义域为 $(1,+\infty)$.

备考提示

历年专升本考试,对函数的定义域考查的都是常考题型. 备考时,考生需要熟知基本初等函数的定义域与值域,并会解一些简单的不等式.

例 2 函数 $f(x)=\sqrt{x-3}+\arcsin\dfrac{1}{x}$的定义域是( ).

A. $(-\infty,+\infty)$ B. $[1,3]$

C. $(-\infty,0)\cup(0,3)$ D. $[3,+\infty)$

【答案】 D

【解析】 使根式$\sqrt{x-3}$有意义的实数 x 的集合是$\{x|x-3\geqslant 0\}=\{x|x\geqslant 3\}$，使 $\arcsin\frac{1}{x}$有意义的实数 x 的集合是$\left\{x\middle|-1\leqslant\frac{1}{x}\leqslant 1\right\}=\{x|x\geqslant 1$ 或 $x\leqslant -1\}$. 因此，函数 $f(x)$的定义域是$\{x|x\geqslant 3\}\cap\{x|x\geqslant 1$ 或 $x\leqslant -1\}=\{x|x\geqslant 3\}$，即$[3,+\infty)$. 故本题选 D.

(2)在函数定义中，对 D 中的每一个数 x，按照对应法则，总有唯一确定的值 y 与之对应，这个值称为函数在点 x 处的函数值，记作 $f(x)$. 当自变量 x 遍取 D 中所有数值时，对应的函数值 $f(x)$的全体构成的集合称为函数 f 的值域，记作 $f(D)$，即

$$f(D)=\{y|y=f(x),x\in D\}.$$

由函数的定义可以看出，函数的定义域与对应法则是确定函数的两个必不可少的要素. 也就是说，如果两个函数的对应法则和定义域都相同，那么这两个函数就是相同的函数.

例 3　下列各组函数中，表示同一函数的是(　　).

A. $f(x)=1$ 与 $g(x)=x^0$　　B. $f(x)=x$ 与 $g(x)=\sqrt{x^2}$

C. $f(x)=x$ 与 $g(x)=\sqrt[3]{x^3}$　　D. $f(x)=\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+1}$与 $g(x)=\sqrt{x^2-1}$

【答案】 C

【解析】 选项 A,D 的定义域不同，选项 B 的值域不同，故选 C.

2. 函数的表示方法

(1)解析法：用等式来表示两个变量间的函数关系.

(2)列表法：把两个变量之间的对应值列成表格来表示函数的关系.

(3)图形法：用图形来表示两个变量之间的函数关系.

例 4　某商品的进价为每件 50 元. 根据市场调查，如果商品售价为每件 50 元，每天可卖出 400 件；若商品的售价每上涨 1 元，则每天少卖 10 件. 设每件商品的售价定为 $x(x\geqslant 50,x\in\mathbf{N})$，求每天销售量与自变量 x 的函数关系式.

【解析】 设销售量为 y，则 $y=400-(x-50)\times 10=900-10x,x\in[50,90]$.

二、函数的性质

1. 有界性

定义 2　设函数 $f(x)$的定义域为 D，数集 $X\subset D$. 若存在一个正数 M，使得对任一 $x\in X$，恒有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$在 X 上有界，或称 $f(x)$是 X 上的有界函数. 若不存在这样的正数 M，则称 $f(x)$在 X 上无界.

例如，函数 $y=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$上有界，因为对任何实数 x，恒有$|\sin x|\leqslant 1$. 又如，函数 $y=\frac{1}{x}$在区间$(0,1)$上无界，在$[1,+\infty)$上有界.

例 5　判断下列函数在给定区间上是否有界.

(1)$y=x,x\in(-\infty,+\infty)$；　　(2)$y=\frac{1}{x^2+1},x\in(-\infty,+\infty)$；

(3) $y=e^x, x\in(-\infty,0)$；　　(4) $y=\arctan x, x\in(-\infty,+\infty)$.

【解析】 (1)显然，函数 $y=x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上无界.

(2)因为当 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时，$\left|\dfrac{1}{x^2+1}\right|\leqslant\dfrac{1}{1}=1$，所以函数 $y=\dfrac{1}{x^2+1}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界.

(3)因为当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$|e^x|<e^0=1$，所以函数 $y=e^x$ 在 $(-\infty,0)$ 上有界.

(4)因为当 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时，$|\arctan x|<\dfrac{\pi}{2}$，所以函数 $y=\arctan x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界.

2. 奇偶性

定义 3 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，且 D 关于原点对称，即对任一 $x\in D$，都有 $-x\in D$. 若

$$f(-x)=f(x)$$

对一切 $x\in D$ 成立，则称 $f(x)$ 为偶函数；若

$$f(-x)=-f(x)$$

对一切 $x\in D$ 成立，则称 $f(x)$ 为奇函数.

从函数图像上看，偶函数的图像关于 y 轴对称，奇函数的图像关于原点对称.

例 6 判断下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=x^2(1+x^2)$；

(2) $f(x)=x(x+1)(x-1)$.

【解析】 (1)因为函数 $f(x)=x^2(1+x^2)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且

$$f(-x)=(-x)^2[1+(-x)^2]=x^2(1+x^2)=f(x),$$

所以 $f(x)=x^2(1+x^2)$ 是偶函数.

(2)因为函数 $f(x)=x(x+1)(x-1)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且

$$f(-x)=(-x)[(-x)+1][(-x)-1]=-x(x+1)(x-1)=-f(x),$$

所以 $f(x)=x(x+1)(x-1)$ 是奇函数.

备考提示

在判断函数的奇偶性时，一定要先判断函数的定义域是否关于原点对称，再判断 $f(x)$ 与 $f(-x)$ 的关系.

3. 单调性

定义 4 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$. 若对于 I 上任意两点 x_1, x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称 $f(x)$ 在 I 上是单调增加的；若对于区间 I 上任意两点 x_1, x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)>f(x_2),$$

则称 $f(x)$ 在 I 上是单调减少的.

例 7 判断下列函数的单调性.

(1) $f(x)=\dfrac{1}{1-x}, x\in(-\infty,1)$；

(2) $f(x)=x^2-2x, x\in(1,+\infty)$.

【解析】(1)任取 $x_1, x_2\in(-\infty,1)$，且 $x_1<x_2$，则

$$1-x_1>1-x_2>0,$$

从而

$$\frac{1}{1-x_1}<\frac{1}{1-x_2},$$

即得

$$f(x_1)<f(x_2).$$

故 $f(x)=\frac{1}{1-x}$ 在$(-\infty,1)$上单调增加.

(2)任取 $x_1, x_2\in(1,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，则

$$x_1+x_2>2, x_2-x_1>0,$$

从而

$$f(x_2)-f(x_1)=x_2^2-x_1^2-2(x_2-x_1)=(x_2+x_1-2)(x_2-x_1)>0,$$

即得

$$f(x_1)<f(x_2).$$

故 $f(x)=x^2-2x$ 在$(1,+\infty)$上单调增加.

备考提示

作差与作商是判断函数单调性常用的方法.需要注意的是，作商判断单调性时，要考虑函数值的正负.

4. 周期性

定义 5　设函数 $f(x)$的定义域为 D.若存在一个正数 T，使得对任一 $x\in D$，有$(x+T)\in D$，且

$$f(x+T)=f(x)$$

恒成立，则称 $f(x)$为周期函数，同时称 T 为 $f(x)$的一个周期.如果函数 $f(x)$的所有周期中，存在一个最小的周期 T_0，那么称 T_0 为 $f(x)$的最小正周期.

注：并非所有的周期函数都有最小正周期.例如，对狄利克雷函数 $D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 是有理数},\\ 0, & x\text{ 是无理数},\end{cases}$ 任何正有理数都是它的周期，由于不存在最小的正有理数，所以它没有最小正周期.

例 8　判断下列函数的周期性，如果是周期函数，写出它们的最小正周期.

(1) $f(x)=\tan 2x$；

(2) $f(x)=x\tan x$；

(3) $f(x)=|\sin 2x|$.

【解析】(1)函数 $f(x)=\tan 2x$ 是周期函数，它的最小正周期是 $\frac{\pi}{2}$.

(2)函数 $f(x)=x\tan x$ 不是周期函数.

(3)函数 $f(x)=|\sin 2x|$ 是周期函数,它的最小正周期是 $\frac{\pi}{2}$.

备考提示

如果函数 $f(x)$ 的周期是 T,那么函数 $f(\omega x)(\omega>0)$ 的周期是 $\frac{T}{\omega}$.

三、基本初等函数

1. 幂函数

(1)形如 $y=x^a$(a 为常数)的函数称为幂函数. $a=1,2,3,\frac{1}{2},-1$ 时,幂函数 $y=x^a$ 的图像如图 1.1.1 所示.

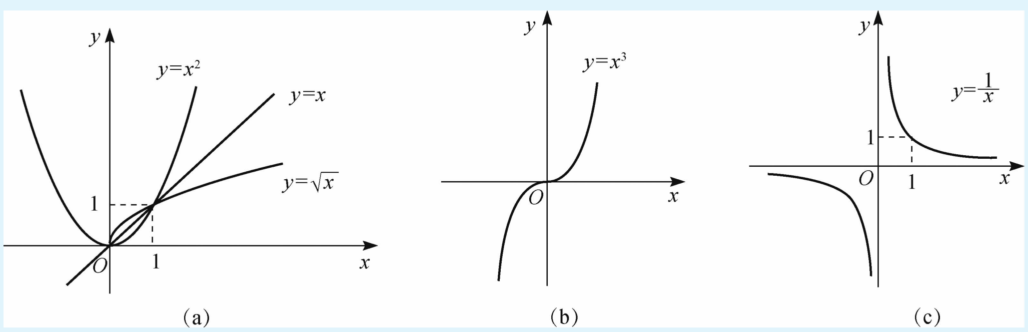


图 1.1.1

(2)幂函数 $y=x^a$ 的图像恒过点(1,1).

当 $a>0$ 时,幂函数 $y=x^a$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调增加;当 $a<0$ 时,幂函数 $y=x^a$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调减少.

当 $a\neq 0$ 时,函数 $y=x^a$ 是无界函数.

当 $a=2n,n\in\mathbf{Z}$ 时,函数 $y=x^a$ 是偶函数;当 $a=2n+1,n\in\mathbf{Z}$ 时,函数 $y=x^a$ 是奇函数.

2. 指数函数

(1)形如 $y=a^x(a>0,a\neq 1)$ 的函数称为指数函数. 指数函数的定义域为 $\mathbf{R}$,值域为 $(0,+\infty)$,它的图像如图 1.1.2 所示.

(2)指数函数 $y=a^x$ 的图像恒过点(0,1). 当 $a>1$ 时,指数函数 $y=a^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调增加;当 $0<a<1$ 时,指数函数 $y=a^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调减少.

不论 a 为何值,指数函数 $y=a^x$ 都是无界函数,且为非奇非偶函数.

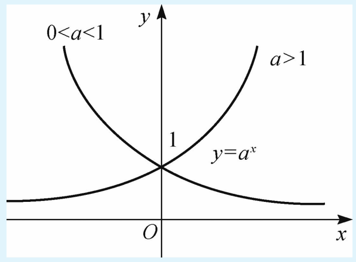


图 1.1.2

备考提示

指数幂及其运算性质：

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}；\ a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}；\ a^m a^n=a^{m+n}；\ (a^m)^n=a^{mn}；\ (ab)^m=a^m b^m.$$

其中 $a>0,b>0,m\in\mathbf{R},n\in\mathbf{R}$.

3. 对数函数

(1)形如 $y=\log_a x(a>0,a\neq1)$的函数称为对数函数. 对数函数的定义域为$(0,+\infty)$,值域为 $\mathbf{R}$,它的图像如图 1.1.3 所示.

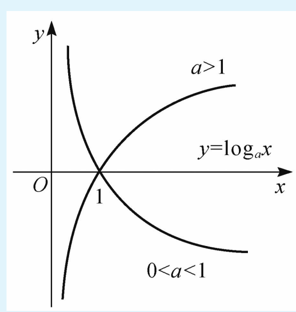


图 1.1.3

特别地,以 10 为底的对数函数称为常用对数函数,简记为 $y=\lg x$;以 e(e=2.718 28…是一个无理数)为底的对数函数称为自然对数函数,简记为 $y=\ln x$.

(2)对数函数 $y=\log_a x$ 的图像恒过点$(1,0)$. 当 $a>1$ 时,对数函数 $y=\log_a x$ 在$(0,+\infty)$上单调增加;当 $0<a<1$ 时,对数函数 $y=\log_a x$ 在$(0,+\infty)$上单调减少.

不论 a 为何值,对数函数 $y=\log_a x$ 都是无界函数,且为非奇非偶函数.

注:对于确定的实数 $a(a>0,a\neq1)$,指数函数 $y=a^x$ 与对数函数 $y=\log_a x$ 互为反函数,它们的图像关于直线 $y=x$ 对称.

备考提示

对数的运算性质：

$\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$；　　$\log_a\dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$；

$\log_a M^n=n\log_a M$；　　$\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$（换底公式）.

其中 $a>0$，且 $a\neq1$；$b>0$；$c>0$，且 $c\neq1$；$M>0$，$N>0$；$n\in\mathbf{R}$.

4. 三角函数

（1）正弦函数 $y=\sin x$、余弦函数 $y=\cos x$、正切函数 $y=\tan x$、余切函数 $y=\cot x$ 统称为三角函数，它们的图像如图 1.1.4 所示.

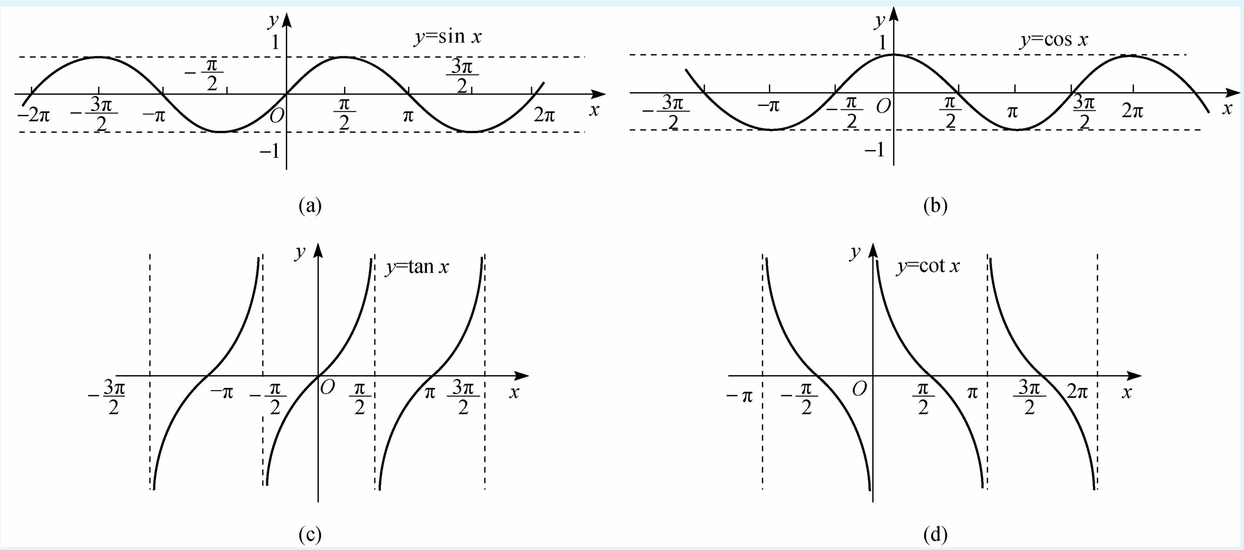


图 1.1.4

（2）正弦函数 $y=\sin x$ 和余弦函数 $y=\cos x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，值域为 $[-1,1]$；正切函数 $y=\tan x$ 的定义域为 $\left\{x\,\middle|\,x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$，值域为 $\mathbf{R}$；余切函数 $y=\cot x$ 的定义域为 $\{x\mid x\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$，值域为 $\mathbf{R}$.

（3）拓展：正割函数 $y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$，其定义域为 $\left\{x\,\middle|\,x\in\mathbf{R}，且\ x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$；余割函数 $y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$，其定义域为 $\{x\mid x\in\mathbf{R}，且\ x\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$.

备考提示

三角函数的常用公式：

$\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$；　　$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$；

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$；　　$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$；

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$；　　$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$；

$1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha$；　　$1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha$.

5. 反三角函数

(1)正弦函数 $y=\sin x$ 在区间$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上的反函数,称为反正弦函数,记作 $y=\arcsin x$,其定义域为$[-1,1]$,值域为$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,图像如图 1.1.5(a)所示.

(2)余弦函数 $y=\cos x$ 在区间$[0,\pi]$上的反函数,称为反余弦函数,记作 $y=\arccos x$,其定义域为$[-1,1]$,值域为$[0,\pi]$,图像如图 1.1.5(b)所示.

(3)正切函数 $y=\tan x$ 在区间$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$上的反函数,称为反正切函数,记作 $y=\arctan x$,其定义域为 **R**,值域为$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,图像如图 1.1.5(c)所示.

(4)余切函数 $y=\cot x$ 在区间$(0,\pi)$上的反函数,称为反余切函数,记作 $y=\operatorname{arccot} x$,其定义域为 **R**,值域为$(0,\pi)$,图像如图 1.1.5(d)所示.

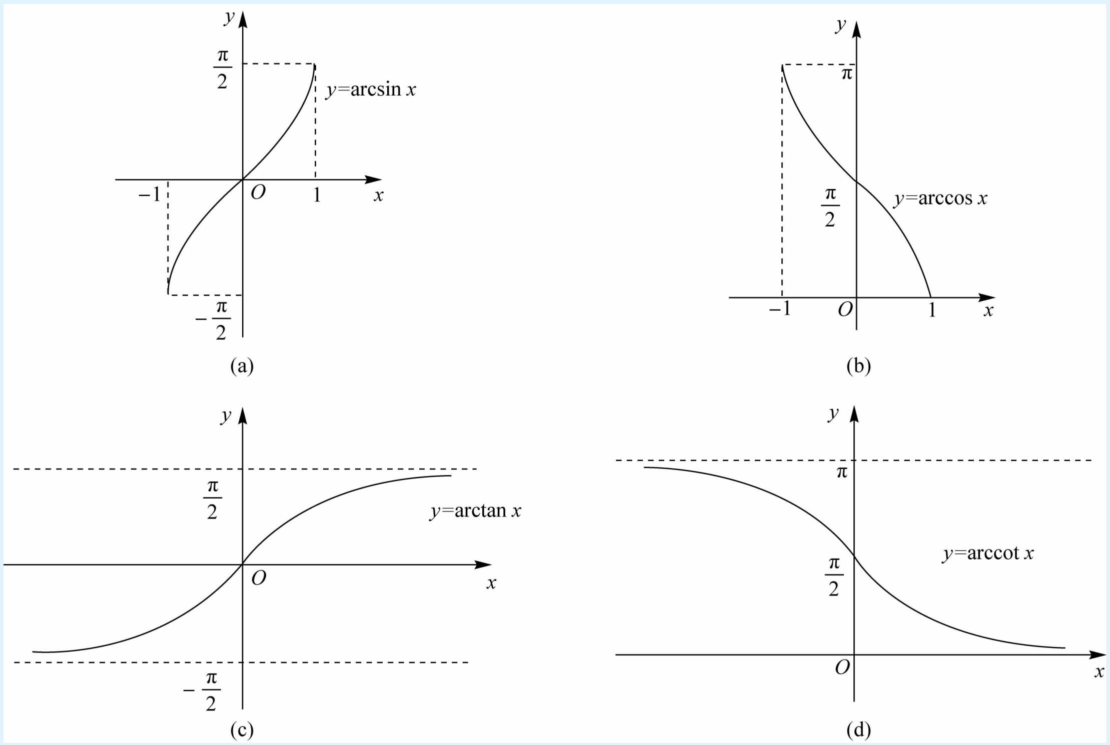


图 1.1.5

(5)反正弦函数 $y=\arcsin x$ 在定义域内单调增加,是有界函数,且在其定义域内是奇函数.

反余弦函数 $y=\arccos x$ 在定义域内单调减少,是有界函数,且在其定义域内是非奇非偶函数.

反正切函数 $y=\arctan x$ 在定义域内单调增加,是有界函数,且在其定义域内是奇函数.

反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$ 在定义域内单调减少,是有界函数,且在其定义域内是非奇非偶函数.

四、特殊函数

1. 分段函数

定义 6 在自变量的不同变化范围中，对应法则用不同式子来表示的函数，称为分段函数.

例如，分段函数 $f(x)=\begin{cases} x, & x\geqslant 0, \\ -x, & x<0, \end{cases}$ 它的定义域为 **R**. 当 $x\in(-\infty,0)$时，对应的函数值 $f(x)=-x$；当 $x\in[0,+\infty)$时，对应的函数值 $f(x)=x$.

例 9 设函数 $f(x)=\begin{cases} 1+\log_2(1-x), & x<1, \\ 2^{x-2}, & x\geqslant 1, \end{cases}$ 则 $f(-1)+f(\log_2 4)=$ ________.

【答案】 3

【解析】 由题意，得 $f(-1)=1+\log_2 2=2$，$f(\log_2 4)=f(2)=2^{2-2}=1$，所以 $f(-1)+f(\log_2 4)=3$.

2. 反函数

定义 7 设函数 $y=f(x)$的定义域为 D，值域为 $f(D)$. 如果对任一 $y\in f(D)$，都存在唯一的 $x\in D$，使得 $f(x)=y$，即确定了一个以 y 为自变量，x 为因变量的函数，那么称这个新确定的函数为 $y=f(x)$的反函数，记为 $x=f^{-1}(y)$. 由于习惯上用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，所以将反函数中的 x 与 y 互换位置，即记为 $y=f^{-1}(x)$，$x\in f(D)$.

注：从函数图像上来看，两个互为反函数的函数，它们的图像关于直线 $y=x$ 对称.

备考提示

求函数 $y=f(x)$的反函数，通常是把解析式 $y=f(x)$变形为 x 关于 y 的等式 $x=g(y)$，然后互换 x 与 y 的位置，得到 $y=g(x)$，函数 $y=g(x)$即函数 $y=f(x)$的反函数.

例 10 求函数 $y=\dfrac{3x-5}{2x+1}$的反函数.

【解析】 在 $y=\dfrac{3x-5}{2x+1}$两边同时乘 $2x+1$，移项整理得

$$x(3-2y)=5+y,$$

等号两边同时除以 $3-2y$，得

$$x=\frac{5+y}{3-2y}.$$

故函数 $y=\dfrac{3x-5}{2x+1}$的反函数为 $y=\dfrac{5+x}{3-2x}$.

例 11 求函数 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$的反函数.

【解析】 分别以 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$的两边为指数，e 为底数，得

$$e^y = x + \sqrt{x^2+1},$$

移项整理得

$$\sqrt{x^2+1} = e^y - x,$$

等号两边同时平方，整理得

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{2}.$$

故函数 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 的反函数为 $y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$.

3. 隐函数

定义 8　如果变量 x,y 满足方程 $F(x,y)=0$，且在一定条件下，当 x 取某区间内的任一值时，相应地总有满足这方程的唯一的 y 值存在，那么就说方程 $F(x,y)=0$ 在该区间确定了一个隐函数 $y=f(x)$.

例如，方程 $x^2+y^2=1$ 在 $[-1,1]$ 上确定了两个隐函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 和 $y=-\sqrt{1-x^2}$.

五、函数的四则运算与复合运算

1. 函数的四则运算

给定两个函数 $f(x)(x\in D_1)$ 和 $g(x)(x\in D_2)$，记 $D=D_1\cap D_2$，并设 $D\neq\varnothing$. 我们定义 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 D 上的和、差、积运算如下：

$F(x)=f(x)+g(x), x\in D$,

$G(x)=f(x)-g(x), x\in D$,

$H(x)=f(x)\,g(x), x\in D$.

若在 D 中剔除使 $g(x)=0$ 的 x 的值，即令 $D^*=D_1\cap\{x|g(x)\neq 0, x\in D_2\}\neq\varnothing$，可在 D^* 上定义 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的商的运算为 $L(x)=\frac{f(x)}{g(x)}, x\in D^*$.

注：若 $D=D_1\cap D_2=\varnothing$，则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不能进行四则运算. 例如，设 $f(x)=\sqrt{4-x^2}, x\in D_1=\{x||x|\leqslant 1\}$，$g(x)=\sqrt{x^2-9}, x\in D_2=\{x||x|\geqslant 3\}$，由于 $D=D_1\cap D_2=\varnothing$，故表达式 $f(x)+g(x)=\sqrt{4-x^2}+\sqrt{x^2-9}$ 是没有意义的.

2. 函数的复合运算

定义 9　设 $y=f(x)$ 和 $u=g(x)$ 是两个函数. 如果 $y=f(x)$ 的定义域包含函数 $u=g(x)$ 的值域，那么定义在 $u=g(x)$ 定义域上的函数 $y=f(g(x))$ 称为由 $u=g(x)$ 与 $y=f(x)$ 构成的复合函数，u 称为中间变量.

函数 g 与函数 f 构成的复合函数，即按"先 g 后 f"的次序复合的函数，通常记为 $f\circ g$，即

$$(f\circ g)(x)=f(g(x)).$$

例如，取 $f(x)=\sin x, g(x)=x^2$，则 $g(x)$ 与 $f(x)$ 构成的复合函数为 $f(g(x))=\sin x^2$，$f(x)$ 与 $g(x)$ 构成的复合函数为 $g(f(x))=\sin^2 x$.

注:(1)不是任何两个函数都可以构成复合函数,函数 $g(x)$ 与 $f(x)$ 能构成复合函数的条件是函数 $g(x)$ 的值域与函数 $f(x)$ 的定义域要有非空交集.例如,函数 $y=\arcsin u$ 与函数 $u=2+x^2$ 就不能构成复合函数.因为函数 $y=\arcsin u$ 的定义域为 $[-1,1]$,而 $u=2+x^2\geqslant 2$,所以两函数不满足复合函数的条件.

(2)复合函数可以由多个函数复合而成,即可以有多个中间变量,如 $y=e^u,u=\sqrt{v},v=x+1$ 复合成函数 $y=e^{\sqrt{x+1}}$,这里 u,v 都是中间变量.

例 12　设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|\leqslant 1,\\ 2, & |x|>1,\end{cases}$ 求 $f[g(x)]$,$g[f(x)]$.

【解析】 $f[g(x)]=\begin{cases}1, & |g(x)|\leqslant 1,\\ 0, & |g(x)|>1\end{cases}=\begin{cases}1, & |x|=1,\\ 0, & |x|\neq 1.\end{cases}$

$g[f(x)]=\begin{cases}2-[f(x)]^2, & |f(x)|\leqslant 1,\\ 2, & |f(x)|>1\end{cases}=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 2, & |x|>1.\end{cases}$

例 13　下列函数是由哪些较简单的函数复合而成的?

(1) $y=e^{-x}$;

(2) $y=\sin^2(1+2x)$;

(3) $y=\arccos\sqrt{\tan(a^2+x^2)}$.

【解析】 (1) $y=e^{-x}$ 是由 $y=e^u$ 与 $u=-x$ 复合而成的.

(2) $y=\sin^2(1+2x)$ 是由 $y=u^2,u=\sin w,w=1+2x$ 复合而成的.

(3) $y=\arccos\sqrt{\tan(a^2+x^2)}$ 是由 $y=\arccos u,u=\sqrt{v},v=\tan w,w=a^2+x^2$ 复合而成的.

六、初等函数

定义 10　由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合所构成的函数,称为初等函数.

典型例题

1. $\cos\sqrt{4-x^2}$ 的定义域为(　　).

A. $(-\infty,-2]$　　B. $[2,+\infty)$

C. $(-2,2)$　　D. $[-2,2]$

【答案】 D

【解析】 由 $4-x^2\geqslant 0$,解得 $-2\leqslant x\leqslant 2$,故定义域为 $[-2,2]$.

2. 以下函数是偶函数的是(　　).

A. $\dfrac{1}{x}$　　B. $-|x|$

C. $\ln x$　　D. $\tan x$

【答案】 B

【解析】 由偶函数的定义可知 $y=-|x|$ 是偶函数.

3. 已知 $f(x)=\begin{cases}3, & x\leqslant 2,\\ 0, & x>2,\end{cases}$ 则 $f[f(5)]=$__________.

【答案】 3

【解析】 $f(5)=0$,故 $f[f(5)]=f(0)=3$.

4. 函数 $f(x)=\ln(2-x)$ 的定义域为(　　).

A. $[2,+\infty)$　　B. $(2,+\infty)$

C. $(-\infty,2]$　　D. $(-\infty,2)$

【答案】 D

【解析】 要使函数有意义,自变量 x 应满足 $2-x>0$,即 $x<2$,故定义域为 $(-\infty,2)$.

5. 已知 $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$,$g(x)=e^x$,则 $f[g(0)]=$__________.

【答案】 $\dfrac{1}{2}$

【解析】 $g(0)=e^0=1$,$f[g(0)]=f(1)=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$.

6. 以下区间是函数 $y=\sin x$ 的单调增加区间的是(　　).

A. $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$　　B. $[0,\pi]$

C. $\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$　　D. $\left[\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right]$

【答案】 A

【解析】 根据 $y=\sin x$ 的图像可得其在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上是单调增加的,在 $\left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right]$ 上是单调减少的.

7. 函数 $y=\sqrt{x-3}$ 的定义域为__________.

【答案】 $[3,+\infty)$

【解析】 由题意知自变量 x 需满足 $x-3\geqslant 0$,解得 $x\geqslant 3$,所以函数定义域为 $[3,+\infty)$.

8. 已知函数 $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$,$x\in(1,+\infty)$,求复合函数 $f[f(x)]$.

【解析】 $f[f(x)]=\dfrac{f(x)+1}{f(x)-1}=\dfrac{\dfrac{x+1}{x-1}+1}{\dfrac{x+1}{x-1}-1}=x$.

9. 函数 $f(x)=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{1}{\ln\cos x}$ 的定义域为__________.

【答案】 $\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$

【解析】 由题意得 $\begin{cases}4-x^2\geqslant 0,\\ \cos x>0,\\ \cos x\neq 1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}-2\leqslant x\leqslant 2,\\ 2k\pi-\dfrac{\pi}{2}<x<2k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z},\\ x\neq 2k\pi,k\in\mathbf{Z},\end{cases}$ 故 $-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$ 且 $x\neq 0$,故定义域

为$\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

10. 函数 $y=\arcsin(1-x)+\frac{1}{2}\lg\frac{1+x}{1-x}$的定义域是(　　).

A. $(0,1)$　　　　B. $[0,1)$

C. $(0,1]$　　　　D. $[0,1]$

【答案】 B

【解析】 联立$\begin{cases}-1\leqslant 1-x\leqslant 1,\\ \frac{1+x}{1-x}>0,\\ 1-x\neq 0,\end{cases}$ 可解得$\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 2,\\ -1<x<1,\\ x\neq 1,\end{cases}$取交集得函数定义域为$[0,1)$.

11. 函数 $f(x)=x\frac{a^x-1}{a^x+1}$的图像关于__________对称.

【答案】 直线 $x=0$(或 y 轴)

【解析】 因为 $f(-x)=-x\frac{a^{-x}-1}{a^{-x}+1}=-x\frac{1-a^x}{1+a^x}=x\frac{a^x-1}{a^x+1}=f(x)$,所以函数 $f(x)$为偶函数,故函数关于直线 $x=0$ 或 y 轴对称.

12. 函数 $y=\sqrt{2x-x^2}-\arcsin\frac{2x-1}{7}$的定义域为(　　).

A. $[-3,4]$　　　　B. $(-3,4)$

C. $[0,2]$　　　　D. $(0,2)$

【答案】 C

【解析】 由$\begin{cases}2x-x^2\geqslant 0,\\ -1\leqslant\frac{2x-1}{7}\leqslant 1\end{cases}$ 可得$\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 2,\\ -3\leqslant x\leqslant 4,\end{cases}$ 取二者交集可得函数的定义域为$[0,2]$,故选 C.

13. 函数 $y=\sqrt{2-x^2}+\arcsin\frac{x-2}{3}$的定义域是(　　).

A. $(-1,\sqrt{2})$　　　　B. $[-1,\sqrt{2}]$

C. $(-1,\sqrt{2}]$　　　　D. $[-1,\sqrt{2})$

【答案】 B

【解析】 要使函数有意义,则$\begin{cases}2-x^2\geqslant 0,\\ -1\leqslant\frac{x-2}{3}\leqslant 1,\end{cases}$ 解得$-1\leqslant x\leqslant\sqrt{2}$.

14. 函数 $f(x)=\ln\sin(\cos^2 x)$的图像关于__________对称.

【答案】 直线 $x=0$(或 y 轴)

【解析】 由于函数 $f(x)$的定义域为 $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$,关于原点对称,且 $f(-x)=\ln\sin[\cos^2(-x)]=\ln\sin(\cos^2 x)=f(x)$,故函数 $f(x)$为偶函数,图像关于直线 $x=0$(或 y 轴)对称.

15. 设 $f(x)$的定义域是$[0,1]$,则 $f(9x^2)$的定义域是__________.

【答案】 $\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$

【解析】 由题意知 $0\leqslant 9x^2\leqslant 1$，即 $0\leqslant x^2\leqslant \frac{1}{9}$，则 $-\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant \frac{1}{3}$.

巩固练习

1. 下列函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相等的是(　　).

A. $f(x)=x^2, g(x)=\sqrt{x^4}$　　B. $f(x)=x, g(x)=(\sqrt{x})^2$

C. $f(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}, g(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$　　D. $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}, g(x)=x+1$

2. 函数 $f(x)=\sin\frac{1}{\sqrt{x}}$的定义域为(　　).

A. $(-\infty,0)$　　B. $(-\infty,0]$

C. $(0,+\infty)$　　D. $[0,+\infty)$

3. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\leqslant 1, \\ x+\frac{6}{x}-6, & x>1, \end{cases}$ 则 $f[f(-3)]=$(　　).

A. $\frac{11}{3}$　　B. 9

C. $\frac{2}{3}$　　D. 6

4. 设函数 $y=1+\ln(x+3)$，则此函数的反函数是(　　).

A. $y=e^{x+3}-3$　　B. $y=e^{x-1}-3$

C. $x=\ln(y-1)-3$　　D. $y=\ln(x-1)-3$

5. 函数 $y=\sqrt{x-2}+1(x\geqslant 2)$ 的反函数是(　　).

A. $y=2-(x-1)^2(x\geqslant 2)$　　B. $y=2+(x-1)^2(x\geqslant 2)$

C. $y=2-(x-1)^2(x\geqslant 1)$　　D. $y=2+(x-1)^2(x\geqslant 1)$

6. 函数 $f(x)=\frac{1}{1+x}$在其定义域内是(　　).

A. 有界函数　　B. 无界函数

C. 奇函数　　D. 偶函数

7. 下列函数中为奇函数的是(　　).

A. $f(x)=\frac{\sin x}{x^2}$　　B. $f(x)=xe^{-\frac{2}{x}}$

C. $f(x)=\frac{2^x-2^{-x}}{2}\sin x$　　D. $f(x)=x^2\cos x+x\sin x$

8. 已知函数 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数. 若 $f(x)$的最小正周期为 4，且 $f(1)>0$，$f(3)=\frac{m-3}{m+1}$，则 m 的取值范围是(　　).

A. $-3<m<1$　　B. $m>1$ 或 $m<-3$

C. $-1<m<3$　　D. $m>3$ 或 $m<-1$

9. 求下列函数的定义域.

(1) $f(x)=\sqrt{3-x}+\ln(x-2)$;

(2) $f(x)=\arcsin\dfrac{x+1}{2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$;

(3) $y=\arcsin|x-2|+\dfrac{1}{\sqrt{e^x-1}}$;

(4) $f(x)=\dfrac{x-1}{\ln x}+\sqrt{16-x^2}$.

10. 设函数 $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$, $g(x)=\sqrt{x+2}$, 求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$.

11. 设函数 $f(x)=\sqrt{1+\ln x}$, 求 $f(x)$ 及 $f(x+3)$ 的定义域.

广西普通高等教育专升本考试专用教材

数学

参考答案及解析

目　　录

参考答案及解析

第一章　函数、极限与连续

第一节　函　　数

1. A　**解析:** B,C,D 中的两个函数定义域不同,故不相等.

2. C　**解析:** 要使 $f(x)=\sin\frac{1}{\sqrt{x}}$有意义,需令$\begin{cases}x\geqslant 0,\\ \sqrt{x}\neq 0,\end{cases}$解得 $x>0$. 故函数 $f(x)=\sin\frac{1}{\sqrt{x}}$的定义域为$(0,+\infty)$.

3. A　**解析:** $f(-3)=(-3)^2=9$,$f[f(-3)]=f(9)=9+\frac{6}{9}-6=\frac{11}{3}$.

4. B　**解析:** 由 $y=1+\ln(x+3)$得,$x=e^{y-1}-3$,交换 x,y 得,$y=e^{x-1}-3$. 故函数 $y=1+\ln(x+3)$的反函数为 $y=e^{x-1}-3$.

5. D　**解析:** 因为函数 $y=\sqrt{x-2}+1$ 的值域为$[1,+\infty)$,而由 $y=\sqrt{x-2}+1$,得 $x=2+(y-1)^2$,所以反函数为 $y=2+(x-1)^2(x\geqslant 1)$.

6. B　**解析:** 因为函数 $f(x)$的定义域为$(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$,不关于原点对称,所以 $f(x)$是非奇非偶函数,又由 $f(x)$的图像可知,$f(x)$是无界函数.

7. A　**解析:** 根据奇函数和偶函数的定义判断. A 中 $f(-x)=\frac{\sin(-x)}{(-x)^2}=\frac{-\sin x}{x^2}=-f(x)$,为奇函数;B 中 $f(-x)=-xe^{\frac{2}{x}}\neq -f(x)=-xe^{-\frac{2}{x}}$,为非奇非偶函数;C 中 $f(-x)=\frac{2^{-x}-2^{x}}{2}\sin(-x)=\frac{2^{x}-2^{-x}}{2}\sin x=f(x)$,为偶函数;D 中 $f(-x)=(-x)^2\cos(-x)+(-x)\sin(-x)=x^2\cos x+x\sin x=f(x)$,为偶函数,故选 A.

8. C　**解析:** 因为函数 $f(x)$的最小正周期为 4,所以 $f(-1)=f(3)=\frac{m-3}{m+1}$. 又函数$f(x)$

是定义在 **R** 上的奇函数，所以 $f(1)=-f(-1)=\dfrac{3-m}{m+1}$，于是$\dfrac{3-m}{m+1}>0$，解得$-1<m<3$.

9. **解**：(1)要使 $f(x)=\sqrt{3-x}+\ln(x-2)$有意义，需令$\begin{cases}3-x\geqslant 0,\\x-2>0,\end{cases}$解得 $2<x\leqslant 3$. 故函数 $f(x)=\sqrt{3-x}+\ln(x-2)$的定义域为$(2,3]$.

(2)要使 $f(x)=\arcsin\dfrac{x+1}{2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$有意义，需令$\begin{cases}-1\leqslant\dfrac{x+1}{2}\leqslant 1,\\x^2-1>0,\end{cases}$解得$-3\leqslant x<-1$. 故函数 $f(x)=\arcsin\dfrac{x+1}{2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$的定义域为$[-3,-1)$.

(3)使 $\arcsin|x-2|$有意义的 x 的取值范围是$-1\leqslant|x-2|\leqslant 1$，解得 $1\leqslant x\leqslant 3$；使$\dfrac{1}{\sqrt{e^x-1}}$有意义的 x 的取值范围是 $e^x-1>0$，解得 $x>0$. 故函数 $y=\arcsin|x-2|+\dfrac{1}{\sqrt{e^x-1}}$的定义域为$\{x|1\leqslant x\leqslant 3$ 且 $x>0\}=\{x|1\leqslant x\leqslant 3\}$，即$[1,3]$.

(4)使$\dfrac{x-1}{\ln x}$有意义的 x 的取值范围是 $\ln x\neq 0$ 且 $x>0$，解得 $0<x<1$ 或 $x>1$；使$\sqrt{16-x^2}$有意义的 x 的取值范围是 $16-x^2\geqslant 0$，解得$-4\leqslant x\leqslant 4$. 故函数 $f(x)$的定义域为$(0,1)\cup(1,4]$.

10. **解**：$f[g(x)]=\dfrac{1}{g(x)-1}=\dfrac{1}{\sqrt{x+2}-1}$，$g[f(x)]=\sqrt{f(x)+2}=\sqrt{\dfrac{1}{x-1}+2}$.

11. **解**：由$\begin{cases}x>0,\\1+\ln x\geqslant 0,\end{cases}$得函数 $f(x)$的定义域为$\left\{x\,\middle|\,x\geqslant\dfrac{1}{e}\right\}$，

故函数 $f(x+3)$的定义域为$\left\{x\,\middle|\,x+3\geqslant\dfrac{1}{e}\right\}$，即$\left\{x\,\middle|\,x\geqslant\dfrac{1}{e}-3\right\}$.

第二节　极　　限

1. B　**解析**：$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$.

2. D　**解析**：$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\sqrt{x}-x}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 1}x}{\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x}+1}=\dfrac{1}{2}$.

3. C　**解析**：因为当 $x\to 0$ 时，$\tan x\sim x$，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，$\sqrt{1+x}-1\sim\dfrac{1}{2}x$，所以$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-x}{\tan x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(x-1)=-1$；$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\tan x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2}=0$；$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+\sin x}{\tan x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+\sin x}{x}=$