# 第一章 基 础 知 识

## 知识框架

- 基础知识
  - 实数及其运算
    - 实数的分类
      - 有理数
      - 无理数
    - 实数的有关概念
      - 相反数
      - 绝对值
      - 倒数
      - 数轴
    - 实数的运算
      - 加、减法
      - 乘、除法
      - 混合运算
      - 实数的运算顺序
  - 代数式及其运算
    - 代数式的概念
    - 幂的运算
    - 多项式的因式分解
    - 分式的运算
    - 二次根式的运算
  - 方程与方程组
    - 方程的基本概念
    - 一元一次方程及其解法
    - 二元一次方程组
    - 一元二次方程及其解法
  - 平面几何常见知识
    - 三角形的分类
    - 三角形的面积公式
    - 四边形的面积公式
    - 圆的相关公式

# 1.1 实数及其运算

## 知识梳理

### 1. 实数的分类

(1)整数和分数统称为有理数.

(2)无限不循环小数称为无理数.

(3)有理数和无理数统称为实数.

### 2. 实数的有关概念

(1)相反数:只有符号不同的两个数叫做互为相反数.实数 $a$ 的相反数是 $-a$,即 $a+(-a)=0$. 0 的相反数是 0. $a$ 和 $-a$ 在数轴上到原点 $O$ 的距离相等.

(2)绝对值:数轴上表示数 $a$ 的点与原点的距离叫做数 $a$ 的绝对值,记作 $|a|$,即

$$|a|=\begin{cases}a, a>0,\\0, a=0,\\-a, a<0.\end{cases}$$

(3)倒数:乘积是 1 的两个数互为倒数.实数 $a$ 的倒数是 $\frac{1}{a}(a\neq0)$,0 没有倒数.

(4)数轴:规定了原点、正方向和单位长度的直线称为数轴.

### 3. 实数的运算

(1)加法法则:同号两数相加,取相同的符号,并把绝对值相加;绝对值不相等的异号两数相加,取绝对值较大的加数的符号,并用较大的绝对值减去较小的绝对值;互为相反数的两个数相加,和为 0;任何数与 0 相加,和仍然是该数.

(2)减法法则:减去一个数,等于加这个数的相反数.

(3)乘法法则:同号相乘得正(如果有偶数个负数为因数,则积为正数),异号相乘得负(如果有奇数个负数为因数,则积为负数);任何数与 0 相乘,积为 0.

(4)除法法则:除以一个不为 0 的数,等于乘这个数的倒数.

(5)混合运算:包含加、乘、除等多种运算符号.混合运算遵循交换律、结合律.

(6)实数的运算顺序:先乘方、开方,再乘、除,最后加、减,如果没有括号,在同一级运算中要从左到右依次运算,不同级的运算,先算高级的运算再算低级的运算.有括号的先算括号里的运算.有多重括号的先算小括号,再算中括号,最后算大括号,无论何种运算,都要注意先定符号后运算.

## 典例研析

### 【考点一】 数轴的几何意义

例 1　实数 $a$ 在数轴上的对应点的位置如图 1-1 所示.若实数 $b$ 满足 $-a<b<a$,则 $b$ 的值可以是(　　).

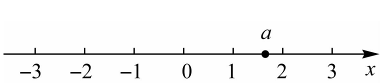


图 1-1

A. 2　　B. $-1$　　C. $-2$　　D. $-3$

【答案】B

【解析】由实数 $a$ 在数轴上的对应点的位置可知 $1<a<2$，即 $a$ 位于 1 和 2 之间，故 $-a$ 位于 $-2$ 和 $-1$ 之间，又实数 $b$ 满足 $-a<b<a$，结合选项可得 $b$ 的值可以是 $-1$，故选 B.

**变式训练 1**

如图 1-2，在数轴上，点 $A$，$B$ 分别表示数 $a$，$b$，且 $a+b=0$. 若 $ab=-4$，则点 $A$ 表示的数为(　　).

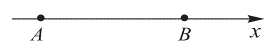


图 1-2

A. $-4$　　B. $-2$

C. 2　　D. 4

## 【考点二】　绝对值的运算

例 2　对于任何有理数 $a$，下列各式中一定为负数的是(　　).

A. $-(-3+a)$　　B. $-a$

C. $-|a+1|$　　D. $-|a|-1$

【答案】D

【解析】当 $a=3$ 时，$-(-3+a)=0$，故 A 错误；当 $a=-3$ 时，$-a=3>0$，故 B 错误；当 $a=-1$ 时，$-|a+1|=0$，故 C 错误；易得 $|a|\geqslant 0$，$-|a|\leqslant 0$，则 $-|a|-1\leqslant -1$，所以 D 正确. 故选 D.

**变式训练 2**

若 $|a-2|+\left(b+\frac{1}{2}\right)^2=0$，则 $(ab)^{2\,023}=$__________.

## 【考点三】　实数的运算

例 3　计算：$(-2)^0-\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=$__________.

【答案】$-1$

【解析】$(-2)^0-\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=1-2=-1$.

**变式训练 3**

计算：$2\,024^0+\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}=$______________.

## 达标训练

### 一、选择题

1. $-2\,023$ 的相反数是(　　).

A. $-2\,023$　　B. $2\,023$　　C. $-\frac{1}{2\,023}$　　D. $\frac{1}{2\,023}$

2. $-\frac{1}{3}$的倒数是(　　).

A. $-3$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $-\frac{1}{3}$　　D. $\pm\frac{1}{3}$

3. $-3$ 的相反数是(　　).

A. $-3$　　B. $-\frac{1}{3}$

C. $3$　　D. $\frac{1}{3}$

4. 在实数 $1,-1,0,\sqrt{2}$中,最大的数是(　　).

A. $1$　　B. $-1$

C. $0$　　D. $\sqrt{2}$

5. $\sqrt{2}$的倒数是(　　).

A. $-1$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $-\sqrt{2}$

6. 实数 $a,b$ 在数轴上的位置如图 1-3 所示,则 $a+b$ 是(　　).

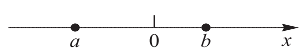


图 1-3

A. 正数　　B. 零

C. 负数　　D. 无理数

7. $|x+y-3|+(m-n+1)^2=0$,则 $n-m-2x-2y$ 的值为(　　).

A. $-7$　　B. $7$

C. $-5$　　D. $5$

8. 已知 $a=4,|b|=6,a<b$,则 $a-b=$(　　).

A. $-2$　　B. $10$

C. $2$　　D. $-10$

9. 已知 $x,y$ 互为相反数且均不为 0,$a,b$ 互为倒数,$|m|=2$,则代数式$\frac{x+y}{m}-2\,022ab+m^2$ 的值为(　　).

A. $-2\,018$　　B. $-2\,019$

C. $-2\,021$　　D. $-2\,022$

## 二、填空题

10. 2 024 的相反数是________.

11. 写出一个有理数,使这个数的绝对值等于它的倒数:________.

12. 若$|m-3|$与$(n-4)^2$ 互为相反数,则$(-m)^n$ 的值为________.

# 1.2 代数式及其运算

## 知识梳理

### 1. 代数式的概念

用加、减、乘、除以及乘方等基本运算符号把数或表示数的字母连接起来的式子称为代数式.

### 2. 幂的运算

(1)同底数的幂相乘,底数不变,指数相加,即

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$($m,n$ 均为正整数).

(2)幂的乘方,底数不变,指数相乘,即

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$($m,n$ 均为正整数).

(3)积的乘方等于把积的每一个因式分别乘方,再把所得的幂相乘,即

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$($n$ 为正整数).

(4)同底数幂相除,底数不变,指数相减,即

$a^m \div a^n = a^{m-n}$($m>n$,$m,n$ 为正整数).

### 3. 多项式的因式分解

(1)把一个多项式化为几个整式的积的形式,称为把这个多项式因式分解,也称为把这个多项式分解因式.

(2)因式分解常用的方法:提公因式法、公式法、分组分解法、十字相乘法等.

(3)完全平方公式:$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$.

(4)平方差公式:$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

### 4. 分式的运算

加减法:$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$,$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$.

乘除法:$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$,$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$.

### 5. 二次根式的运算

(1)三个概念:最简二次根式、同类二次根式、有理化因式.

(2)三个性质:

$\sqrt{a} \geqslant 0 (a \geqslant 0)$;

$(\sqrt{a})^2 = a (a \geqslant 0)$;

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a, a>0, \\ 0, a=0, \\ -a, a<0. \end{cases}$$

(3)两个公式:

$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} (a \geqslant 0, b \geqslant 0)$;

$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} (a \geqslant 0, b > 0)$.

## 典例研析

### 【考点一】 指数幂运算

**例1** 下列运算正确的是(　　).

A. $3a+2b=5ab$　　　　B. $-8a^2\div4a=2a$

C. $(-2a^2)^3=-8a^6$　　　　D. $4a^3\cdot3a^2=12a^3$

【答案】C

【解析】$3a$ 与 $2b$ 不是同类项,不可合并,A 错;$-8a^2\div4a=-2a$,B 错;$(-2a^2)^3=(-2)^3(a^2)^3=-8a^6$,C 正确;$4a^3\cdot3a^2=12a^5$,D 错.故选 C.

**变式训练 1**

下列运算正确的是(　　).

A. $3x^2-2x^2=1$　　　　B. $2m\cdot(-2m)^2=8m^3$

C. $x^{10}\div x^{10}=0$　　　　D. $(2a^2b)^3=8a^5b^3$

### 【考点二】 因式分解

**例2** 把下列各式因式分解:

(1)$x^2+13x+36$;　　(2)$(x^2+x)^2-8(x^2+x)+12$;　　(3)$4xy+1-4x^2-y^2$.

【解】(1)$x^2+13x+36=(x+4)(x+9)$.

(2)$(x^2+x)^2-8(x^2+x)+12=[(x^2+x)-6][(x^2+x)-2]=(x+3)(x-2)(x+2)(x-1)$.

(3)$4xy+1-4x^2-y^2=1-(2x-y)^2=(1+2x-y)(1-2x+y)$.

**变式训练 2**

把下列各式因式分解:

(1)$x^2+6x+8$;　　(2)$3x^2+4xy+y^2$;　　(3)$b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$.

### 【考点三】 指数幂混合运算

**例3** 计算:$4^{-1}-\sqrt{\frac{1}{16}}+(3-\sqrt{2})^0=$__________.

【答案】1

【解析】$4^{-1}-\sqrt{\frac{1}{16}}+(3-\sqrt{2})^0=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1=1$.

**变式训练 3**

计算:$(3-\sqrt{2})^2=$______________.

## 达标训练

### 一、选择题

1. 下列运算中,正确的是(  ).

A. $a^2 \cdot a^5 = a^{10}$  B. $(a-b)^2 = a^2 - b^2$

C. $(-3a^3)^2 = 6a^6$  D. $-3a^2b + 2a^2b = -a^2b$

2. 若 $a+b=5$,则代数式$\frac{b^2-a^2}{a} \div \frac{a-b}{2a}$的值为(  ).

A. $-10$  B. $10$  C. $-\frac{2}{5}$  D. $-\frac{5}{2}$

3. 下列运算正确的是(  ).

A. $2a+3b=5ab$  B. $a^3 \cdot a^2 = a^5$  C. $(a+b)^2 = a^2 + b^2$  D. $(a^2b)^3 = a^6b$

4. $\sqrt{\frac{4}{9}}$的值等于(  ).

A. $\frac{2}{3}$  B. $-\frac{2}{3}$  C. $\pm\frac{2}{3}$  D. $\frac{16}{81}$

5. 把式子 $a\sqrt{-\frac{1}{a}}$根号外的字母移入根号内,则原式等于(  ).

A. $\sqrt{-a}$  B. $\sqrt{a}$  C. $-\sqrt{-a}$  D. $-\sqrt{a}$

6. 若 $a>1$,化简$|1-a|+\sqrt{(1+a)^2}$的结果为(  ).

A. $2a$  B. $2$  C. $-2a$  D. $-2$

7. 下列代数式的值总不为 0 的是(  ).

A. $x+2$  B. $x^2-2$  C. $\frac{1}{x+2}$  D. $(x+2)^2$

### 二、填空题

8. 因式分解:$a^3-9ab^2=$__________.

9. 因式分解:$4a^3-16a^2+16a=$________________.

10. 已知 $x^2+y^2=169$,$x-y=7$,那么 $xy$ 的值为_______________.

11. 因式分解:$a^3-6a^2+9a=$_____________.

### 三、解答题

12. 已知 $a,b$ 为实数,且满足$(a-2)^2+\sqrt{a-b+1}=0$,求 $a+b$ 的值.

13. 先化简，再求值：$\left(\dfrac{x^2-3}{x-1}-2\right)\div\dfrac{1}{x-1}$，其中 $x$ 满足 $x^2-2x-3=0$.

14. 已知 $a=2+\sqrt{3}$，$b=2-\sqrt{3}$，试求下列各式的值.

(1) $a^2-b^2$；

(2) $\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}+4$.

15. 按要求解答下列各题：

(1) 计算：$(a+b)(a-b)+(4ab^3-8a^2b^2)\div 4ab$；

(2) 因式分解：$a^2(m-n)+b^2(n-m)$.

# 1.3 方程与方程组

## 知识梳理

### 1. 方程的基本概念

含有未知数的等式称为方程.使得方程左右两边的值相等的未知数的值,称为方程的解.求方程的解的过程,称为解方程.

### 2. 一元一次方程及其解法

(1)只含有一个未知数,并且未知数的最高次数是 1 的整式方程,称为一元一次方程.

(2)解一元一次方程的步骤:

①去分母;②去括号;③移项;④合并同类项;⑤系数化为 1.

### 3. 二元一次方程组

(1)二元一次方程:含有两个未知数(元)并且未知数的最高次数是 1 的整式方程.

(2)二元一次方程组:由两个或两个以上的二元一次方程组成的方程组.

(3)解二元一次方程组的方法:消元是解二元一次方程组的基本思路,方法有代入消元法和加减消元法.

### 4. 一元二次方程及其解法

形如 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的方程,称为一元二次方程.

(1)利用求根公式 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 求方程的根.

(2)把 $b^2-4ac$ 称为方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的根的判别式,记作 $\Delta=b^2-4ac$.

①当 $\Delta>0$ 时,方程有两个不相等的实数根:$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$,$x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

②当 $\Delta=0$ 时,方程有两个相等的实数根:$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$.

③当 $\Delta<0$ 时,方程无实数根.

(3)根与系数的关系

若 $x_1,x_2$ 是方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的两个根,则 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$,$x_1x_2=\frac{c}{a}$;反之,若两个数 $x_1,x_2$ 满足 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$,$x_1x_2=\frac{c}{a}$,则 $x_1,x_2$ 是方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的两个根.

一元二次方程中根与系数的关系提供了由方程来讨论根的性质及由根的性质来确定方程系数的工具,在解一些特殊的方程中也起了很大的作用.

## 典例研析

### 【考点一】 解一元一次方程

**例 1** 解方程:$\frac{1}{5}(x+15)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}(x-7)$.

**【解】** 去分母得 $6(x+15)=15-10(x-7)$,去括号得 $6x+90=15-10x+70$,移项得 $6x+10x=15+70-90$,合并同类项得 $16x=-5$,两边同时除以 16 得 $x=-\frac{5}{16}$.

**变式训练 1**

解方程：$\frac{2x+1}{3}-\frac{5x-1}{6}=1$.

## 【考点二】 解二元一次方程组

**例 2** 解方程组 $\begin{cases}x+y=10,\\2x+y=16.\end{cases}$

**【解】** 由 $\begin{cases}x+y=10,\\2x+y=16,\end{cases}$ 两式相减得 $\begin{cases}x=6,\\y=4.\end{cases}$

**变式训练 2**

解方程组 $\begin{cases}\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=2,\\4(x-y-1)=3(1-y)-2.\end{cases}$

## 【考点三】 解一元二次方程

**例 3** 解下列方程：

(1) $x^2-2x+1=0$;

(2) $2x^2+4x+3=0$.

**【解】** (1) 由 $x^2-2x+1=0$，得 $(x-1)^2=0$，可得 $x=1$.

(2) 由 $2x^2+4x+3=0$，$\Delta=4^2-4\times2\times3=16-24=-8<0$，该方程无解.

**变式训练 3**

解下列方程：

(1) $x^2-4x-12=0$;

(2) $x^2-6x-91=0$.

## 达标训练

### 一、选择题

1. 一元二次方程 $x^2-9x=0$ 的解为(　　).

A. $x=0$　　B. $x=3$

C. $x=9$　　D. $x_1=0, x_2=9$

2. 若 $2a^{3x}b^{y+5}$ 与 $5a^{2-4y}b^{2x}$ 是同类项,则(　　).

A. $\begin{cases}x=1,\\y=2\end{cases}$　　B. $\begin{cases}x=2,\\y=-1\end{cases}$

C. $\begin{cases}x=0,\\y=2\end{cases}$　　D. $\begin{cases}x=3,\\y=1\end{cases}$

3. 方程组 $\begin{cases}3x+5y=8,\\4x+ky=14\end{cases}$ 的解也是方程 $3x+y=4$ 的解,则 $k$ 的值是(　　).

A. 6　　B. 10

C. 9　　D. $\dfrac{1}{10}$

4. 已知二元一次方程组 $\begin{cases}a-2b=-11,\\2a-b=2,\end{cases}$ 则 $a-b$ 的值是(　　).

A. 3　　B. $-3$

C. 0　　D. 6

5. 关于 $x$ 的一元二次方程 $x^2-4x+m=1$ 有两个相等的实数根,则实数 $m$ 的值为(　　).

A. 5　　B. $-5$

C. 4　　D. $-4$

6. 若关于 $x$ 的方程 $ax^2-2x+1=0$ 只有一个实根,则 $a$ 的值为(　　).

A. 0　　B. 1

C. $-1$　　D. 0 或 1

7. 已知 $m,n$ 是一元二次方程 $x^2+2x-5=0$ 的两个根,则 $m^2+mn+2m$ 的值为(　　).

A. 0　　B. $-10$

C. 3　　D. 10

8. 2022 年北京冬奥会吉祥物“冰墩墩”寓意敦厚、健康、活泼、可爱,象征着冬奥会运动员强壮的身体、坚韧的意志和鼓舞人心的奥林匹克精神,据统计,某商店 2021 年第四季度的“冰墩墩”总销售量为 9.93 万件,其中 10 月的销售量为 3 万件,设 11,12 月销售量的平均增长率为 $x$,则可列方程为(　　).

A. $3(1+x)^2=9.93$　　B. $3+3(1+x)^2=9.93$

C. $3+3x+3(1+x)^2=9.93$　　D. $3+3(1+x)+3(1+x)^2=9.93$

### 二、填空题

9. 若关于 $x$ 的方程 $(k-2)x^{|k-1|}+5k=0$ 是一元一次方程,则 $k=$________.

10. 已知 $\begin{cases}x=1,\\y=-1\end{cases}$ 是关于 $x,y$ 的二元一次方程组 $\begin{cases}ax+by=-1,\\ax-by=5\end{cases}$ 的解,则 $a^b=$________.

11. 方程 $x^2=2x$ 的解是__________.

12. 若关于 $x$ 的方程 $x^2+(k^2-1)x+k+1=0$ 的两根互为相反数,则 $k$ 的值为__________.

## 三、解答题

13. 已知关于 $x,y$ 的方程组 $\begin{cases}x+2y=5m,\\x-2y=9m\end{cases}$ 的解满足 $3x+2y=19$，求 $m$ 的值.

14. 解方程：

(1) $3x+\dfrac{x-1}{2}=3-\dfrac{2x-1}{3}$；

(2) $\dfrac{0.3x-0.4}{0.2}+2=\dfrac{0.5x-0.2}{0.3}$.

15. 解方程：$(2x-1)^2=3x^2+6$.

# 1.4 平面几何常见知识

## 知识梳理

### 1. 三角形的分类

三角形按边的关系分类如下：

(1)不等腰三角形；

(2)等腰三角形：底和腰不相等的等腰三角形、等边三角形.

三角形按角的关系分类如下：

(1)直角三角形(有一个角为直角的三角形)；

(2)斜三角形：

锐角三角形(三个角都是锐角的三角形)；

钝角三角形(有一个角为钝角的三角形).

把边和角联系在一起，我们又有一种特殊的三角形：等腰直角三角形，它是两条直角边相等的直角三角形.

### 2. 三角形的面积公式

$S_{\triangle}=\frac{1}{2}\times$底$\times$高.

### 3. 四边形的面积公式

(1)$S_{平行四边形}=ah$.($a$ 为平行四边形的一边，$h$ 为 $a$ 边上的高)

(2)$S_{菱形}=\frac{1}{2}ab=ch$.($a$，$b$ 为菱形的对角线，$c$ 为菱形的边长，$h$ 为 $c$ 边上的高)

(3)$S_{梯形}=\frac{1}{2}(a+b)h=lh$.($a$，$b$ 为梯形的底，$h$ 为梯形的高，$l$ 为梯形的中位线)

### 4. 圆的相关公式

(1)周长：$C=2\pi r$.($r$ 为圆的半径)

(2)面积：$S=\pi r^2$.

(3)半圆周长：$C=\pi r+2r$.

(4)半圆面积：$S=\frac{1}{2}\pi r^2$.

## 典例研析

### 【考点一】 三角形的性质

**例 1** (多选)若长度分别是 $a$，2，4 的三条线段能组成一个三角形，则 $a$ 的值可以是(　　).

A. 1　　　　B. 2

C. 3　　　　D. 4

【答案】CD

【解析】由三角形三边关系知：$4-2<a<4+2$，即 $2<a<6$，$\therefore a$ 可能的取值为 3，4. 故选 CD.

**变式训练 1**

如图 1-4，已知直线 $a/\!/b$，$\angle BAC=90°$，$\angle 1=40°$，则$\angle 2$ 的度数为(　　).

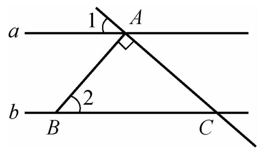


图 1-4

A. $40°$　　　　B. $50°$

C. $130°$　　　　D. $140°$

## 【考点二】　平行四边形的性质

**例 2**　如图 1-5，已知四边形 $ABCD$ 是平行四边形，下列结论：

①$AB=CD$；②$AB=AC$；③当 $AC\perp BD$ 时，它是菱形；④当$\angle ABC=90°$时，它是矩形，其中一定正确的共有(　　).

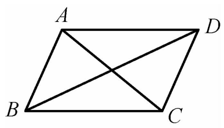


图 1-5

A. 一个　　B. 两个　　C. 三个　　D. 四个

【答案】C

【解析】因为 $AB$，$CD$ 是▱$ABCD$ 的一组对边，则 $AB=CD$，①正确；$AB$，$AC$ 分别是▱$ABCD$ 的一条边和一条对角线，它们不一定相等，②不正确；当 $AC\perp BD$ 时，即▱$ABCD$ 的两条对角线互相垂直，因此▱$ABCD$ 是菱形，③正确；当$\angle ABC=90°$时，即▱$ABCD$ 的一个内角是直角，因此▱$ABCD$ 是矩形，④正确，所以给定的 4 个命题中，一定正确的共有 3 个. 故选 C.

**变式训练 2**

如图 1-6，在平行四边形 $ABCD$ 中，对角线 $AC$，$BD$ 相交于点 $O$，点 $E$ 是边 $AB$ 的中点. 已知 $BC=10$，则 $OE=$__________.

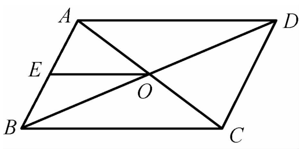


图 1-6

## 【考点三】　圆的性质

**例 3**　若直角三角形 $ABC$ 的三边长分别为 $a$，$b$，$c$，$\angle C=90°$，则其外接圆的半径为__________，内切圆的半径为__________.

【答案】$\dfrac{c}{2}$　$\dfrac{a+b-c}{2}$

【解析】由于直角三角形的斜边就是外接圆的直径，所以外接的圆半径为$\dfrac{c}{2}$；如图 1-7 所示，由切线长定理得 $a-r+b-r=c$，所以 $r=\dfrac{a+b-c}{2}$. 故内切圆的半径为$\dfrac{a+b-c}{2}$.

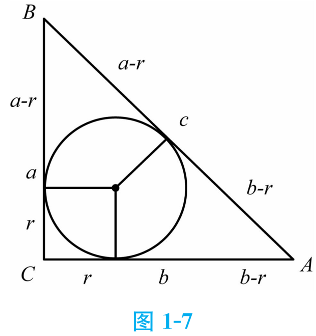


图 1-7

**变式训练 3**

（多选）如图 1-8 所示，$AB$ 是半圆 $O$ 的直径，$D$，$E$ 是半圆上任意两点，连接 $AD$，$DE$，$AE$ 与 $BD$ 相交于点 $C$，若添加一个条件使$\triangle ADC$ 与$\triangle BDA$ 相似，则可添加下列条件中的（　　）.

A. $\overset{\frown}{DE}=\overset{\frown}{BE}$　　B. $AD=DE$

C. $AB\parallel DE$　　D. $AD^2=BD\cdot CD$

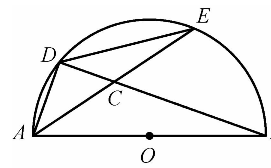

图 1-8

## 达标训练

### 一、选择题

1. 如图 1-9，平行四边形 $ABCD$ 中，点 $E$，$F$ 分别是 $AD$，$AB$ 的中点，$EF$ 交 $AC$ 于点 $G$，那么 $AG:GC$ 的值为（　　）.

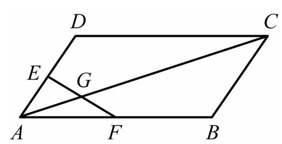

图 1-9

A. $1:2$　　B. $1:3$　　C. $1:4$　　D. $2:3$

2. 在平面直角坐标系中，点 $P(-20,-m)$与点 $Q(n,13)$关于 $x$ 轴对称，则 $m+n$ 的值为（　　）.

A. $-33$　　B. $33$　　C. $-7$　　D. $7$

3. 如图 1-10，菱形 $ABCD$ 的一边中点 $M$ 到对角线交点 $O$ 的距离为 5 cm，则菱形 $ABCD$ 的周长为（　　）.

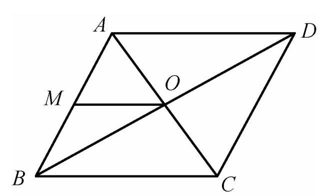

图 1-10

A. 5 cm　　B. 10 cm　　C. 20 cm　　D. 40 cm

4. 下列命题中，是真命题的是（　　）.

A. 对角线互相垂直的四边形是菱形　　B. 对角线互相垂直平分的四边形是正方形

C. 对角线相等的四边形是矩形　　D. 对角线互相平分的四边形是平行四边形

5. 如图 1-11，$\triangle ABC$ 中，$AD=DF=FB$，$AE=EG=GC$，$FG=4$，则（　　）.

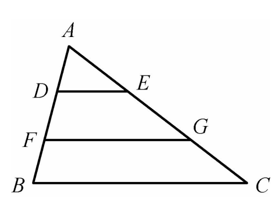

图 1-11

A. $DE=1$，$BC=7$　　B. $DE=2$，$BC=6$

C. $DE=3$，$BC=5$　　D. $DE=2$，$BC=8$

6. 一个直角三角形的一条直角边为 3，斜边上的高为 2.4，则这个直角三角形的面积为(　　).

A. 7.2　　B. 6　　C. 12　　D. 24

7. 如图 1-12，在$\triangle ABC$中，点 $D$，$E$ 分别是边 $AB$，$AC$ 的中点，点 $F$ 是线段 $DE$ 上一点. 连接 $AF$，$BF$，$\angle AFB=90^\circ$，且 $AB=8$，$BC=14$，则 $EF$ 的长是(　　).

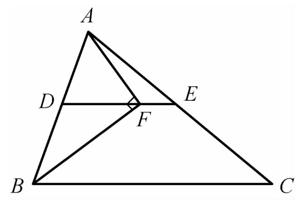


图 1-12

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

8. 五边形的内角和为(　　).

A. 360°　　B. 540°　　C. 720°　　D. 900°

## 二、填空题

9. 如图 1-13，菱形 $ABCD$ 中，对角线 $AC=8$，$BD=6$，则菱形的边长为 ____________.

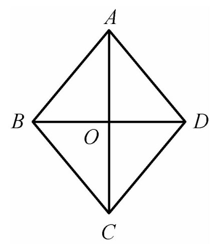


图 1-13

10. 如图 1-14，矩形纸片 $ABCD$ 的长 $AD=9$ cm，宽 $AB=3$ cm，将其折叠，使点 $D$ 与点 $B$ 重合，那么折叠后 $DE$ 的长为__________.

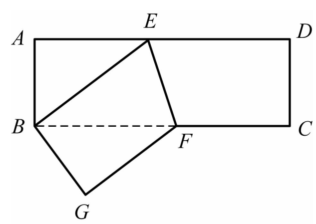


图 1-14

## 三、解答题

11. 如图 1-15，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle BCA=90^\circ$，中线 $CM$ 垂直于中线 $BN$，且 $BC=2$，求 $BN$ 的长.

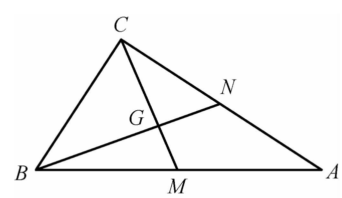


图 1-15

# 第一章单元小测

## 一、选择题

1. 若$|m-1|+(n+2)^2=0$,则 $m^2-n^2$ 的值为(　　).

A. 2　　B. 3　　C. $-2$　　D. $-3$

2. 代数式$\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$有意义时,$x$ 应满足的条件为(　　).

A. $x\neq1$　　B. $x\leqslant1$　　C. $x<1$　　D. $x>1$

3. 下列计算正确的是(　　).

A. $x+5x=5x$　　B. $5x-3x=2$

C. $(x^2)^3=x^5$　　D. $x^6\div x^3=x^3$

4. 已知关于 $x$ 的方程 $x^2+2x+m=0$ 有两个不相等的实数根,则 $m$ 的取值范围是(　　).

A. $m=1$　　B. $m\geqslant1$　　C. $m<1$　　D. $m\neq0$

5. 下列计算正确的是(　　).

A. $a^2+a^3=a^5$　　B. $2(a+1)=2a+1$

C. $a\cdot a^2=a^2$　　D. $(ab^2)^3=a^3b^6$

6. 将一副三角板按如图 1-16 所示放置,斜边平行,则$\angle1$ 的度数为(　　).

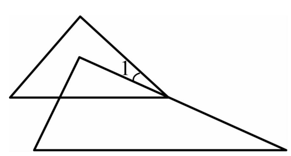


图 1-16

A. $5^\circ$　　B. $10^\circ$　　C. $15^\circ$　　D. $20^\circ$

7. 一个等腰三角形的底边长是 6,腰长是一元二次方程 $x^2-7x+12=0$ 的一根,则此三角形的周长是(　　).

A. 12　　B. 13

C. 14　　D. 12 或 14

8. 二次三项式 $a^2+8a+16$ 化为完全平方式为(　　).

A. $(a+1)^2$　　B. $(a+2)^2$　　C. $(a+3)^2$　　D. $(a+4)^2$

9. 如图 1-17,$\triangle ABC$ 与$\triangle DEF$ 是位似图形,点 $O$ 为位似中心,位似比为 2∶5,则$\triangle ABC$ 与$\triangle DEF$ 的面积之比为(　　).

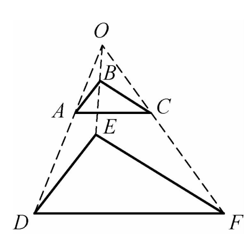


图 1-17

A. 25∶4　　B. 2∶5　　C. 4∶25　　D. 5∶2

10. 如图 1-18，直线 $a$，$b$ 被直线 $c$ 所截，若 $a//b$，$\angle 1=58°$，则$\angle 2$ 的度数为（　　）.

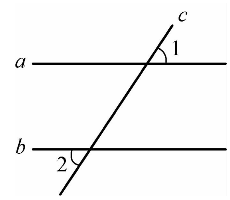


图 1-18

A. $32°$　　B. $42°$　　C. $58°$　　D. $122°$

## 二、填空题

11. $\dfrac{m}{m-n}+\dfrac{n}{n-m}=$__________.

12. 计算：$(\sqrt{3})^2-\dfrac{1}{4}\sqrt{(-6)^2}+\left|1-\sqrt{3}\right|=$__________.

13. 因式分解：$6a^2-2a=$__________.

14. 一个多边形的内角和是 $720°$，这个多边形的边数是__________.

## 三、解答题

15. 实数的计算：$(-1)^{2\,023}+\sqrt{25}-\left|2-\sqrt{3}\right|-(\sqrt{3})^2$.

16. 按要求解下列方程：

(1) $x^2-5x+6=0$（利用因式分解法）.

(2) $3x^2-4\sqrt{3}x+2=0$（利用公式法）.

17. 已知 $a+b=7$，$ab=12$. 分别求下列各式的值：

(1)$a^2+b^2$；

(2)$(a-b)^2$.

# 第二章 集合与逻辑用语

## 知识框架

- 集合与逻辑用语
  - 集合的概念
    - 集合的定义和元素
    - 元素
    - 集合的表示方法
      - 列举法
      - 描述法
      - 韦恩图法
      - 区间法
    - 集合的关系
      - 子集
      - 真子集
      - 集合相等
    - 常用数集
  - 集合的运算
    - 交集的定义
    - 并集的定义
    - 补集的定义
    - 集合运算的性质
  - 充要条件
    - 连接词
    - 命题及真值
    - 充分、必要条件
      - 充分不必要条件
      - 必要不充分条件
      - 充要条件
      - 既不充分也不必要条件

## 考情分析

<table>
<tr><th rowspan="2">考　点</th><th rowspan="2">考纲要求</th><th colspan="5">广东省近五年职教高考试题统计</th></tr>
<tr><th>年份</th><th>题号</th><th>考试内容</th><th>题型</th><th>分值</th></tr>
<tr><td rowspan="10">①集合及其运算；<br>②逻辑用语</td><td rowspan="10">①理解元素、集合及其关系；<br>②理解集合、子集、真子集、补集、交集、并集的概念，了解空集和全集的意义；<br>③理解属于、不属于，包含、不包含，集合相等的意义，掌握有关的符号和专业术语；<br>④掌握交集、并集、补集之间的关系与运算；<br>⑤掌握充分条件、必要条件、充要条件的定义</td><td rowspan="2">2024</td><td>第 1 题</td><td>集合的关系与运算</td><td>选择题</td><td>5</td></tr>
<tr><td>第 9 题</td><td>充要条件</td><td>选择题</td><td>5</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2023</td><td>第 1 题</td><td>集合的关系与运算</td><td>选择题</td><td>5</td></tr>
<tr><td>第 7 题</td><td>充要条件</td><td>选择题</td><td>5</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2022</td><td>第 1 题</td><td>集合的关系与运算</td><td>选择题</td><td>5</td></tr>
<tr><td>第 3 题</td><td>充要条件</td><td>选择题</td><td>5</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2021</td><td>第 1 题</td><td>集合的关系与运算</td><td>选择题</td><td>5</td></tr>
<tr><td>第 8 题</td><td>充要条件</td><td>选择题</td><td>5</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2020</td><td>第 1 题</td><td>集合的关系与运算</td><td>选择题</td><td>5</td></tr>
<tr><td>第 11 题</td><td>充要条件</td><td>选择题</td><td>5</td></tr>
</table>

# 2.1　集合的概念

## 知识梳理

### 1. 集合的定义

集合是由具有某种确定属性的对象构成的整体，集合有时也简称为集．一般用大写英文字母 $A,B,C,D,\cdots$ 表示．

### 2. 元素

构成集合的每个对象叫作集合的元素，一般用小写英文字母 $a,b,c,d,\cdots$ 表示．

【说明】(1)集合中的元素满足确定性、互异性和无序性．其中确定性指对任意一个元素 $a$ 和集合 $A$，$a$ 要么属于集合 $A$，记作 $a\in A$；要么不属于集合 $A$，记作 $a\notin A$．互异性指集合中的元素互不相同．无序性是指集合中的各元素没有先后顺序，即如集合 $\{1,2\}$ 和集合 $\{2,1\}$ 是同一个集合．

(2)我们把不含任何元素的集合叫作空集，记作 $\varnothing$．

### 3. 集合的表示方法

集合常用的表示方法有列举法、描述法、韦恩图法和区间法等．

(1)列举法：要求把集合的元素一一列举在大括号内，相邻元素之间用逗号隔开．

【注意】用列举法表示集合时，列出的元素要求不遗漏、不重复，但与元素的列出顺序无关．

(2)描述法：是将集合中所有元素的共同特征或性质，用文字或者符号语言来描述表示集合的方法，基本格式为 $\{x|P(x)\}$，其中 $x$ 表示元素的一般形式，$P(x)$ 表示元素满足的条件．

(3)韦恩图法：用一条封闭曲线直观地表示集合及其关系的图形(也叫文氏图)．

(4)区间法：用区间表示集合的方法．如不等式的解集及函数的定义域、值域等常用区间表示，但应注意的是包括端点时用中括号，不包括端点时用小括号．

【注意】$a$ 与 $\{a\}$；$\{1,2\}$ 与 $\{(1,2)\}$ 的区别.

### 4. 集合的关系

(1)子集：若集合 $A$ 中的任何一个元素都是集合 $B$ 的元素，则称集合 $A$ 是集合 $B$ 的子集，记作 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$，读作“$A$ 包含于 $B$”或“$B$ 包含 $A$”.

子集的性质：

①任何一个集合 $A$ 是它本身的子集，即 $A\subseteq A$.

②空集是任何一个集合 $A$ 的子集，即 $\varnothing\subseteq A$.

③传递性：若 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$.

(2)真子集：如果集合 $A$ 是集合 $B$ 的子集，且在集合 $B$ 中至少有一个元素不属于集合 $A$，则称集合 $A$ 是集合 $B$ 的真子集，记作 $A\subsetneqq B$ 或 $B\supsetneqq A$，读作“$A$ 真包含于 $B$”或“$B$ 真包含 $A$”.

真子集的性质：

①任何一个集合 $A$ 的真子集不包括本身.

②空集是任何一个非空集合 $A$ 的真子集，即 $\varnothing\subsetneqq A(A\neq\varnothing)$.

③传递性：若 $A\subsetneqq B$，$B\subsetneqq C$，则 $A\subsetneqq C$.

(3)集合相等：若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则称 $A$ 与 $B$ 相等，记作 $A=B$(事实上，当 $A$ 与 $B$ 所含元素完全相同时，$A$ 与 $B$ 相等).

【注意】$\in$ 与 $\subseteq$ 的区别，$\varnothing$ 与 $\{0\}$、$\{\varnothing\}$ 的区别.

(4)子集个数：集合 $A$ 中有 $n$ 个元素，则它有 $2^n$ 个子集，有 $2^n-1$ 个真子集，有 $2^n-2$ 个非空真子集.

### 5. 常用数集

| 集合名称 | 正整数集 | 自然数集 | 整数集 | 有理数集 | 实数集 |
|---|---|---|---|---|---|
| 表示符号 | $\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$ | $\mathbf{N}$ | $\mathbf{Z}$ | $\mathbf{Q}$ | $\mathbf{R}$ |

## 典例研析

### 【考点一】 根据集合的概念辨析集合

例 1 已知 $A=\{a,b,c\}$，则以正实数 $a,b,c$ 为边长的△$ABC$ 不可能是(　　).

A. 直角三角形　　B. 锐角三角形

C. 等腰三角形　　D. 钝角三角形

【答案】C

【解析】集合的三个性质：确定性、互异性和无序性，因此 $a,b,c$ 互不相等，所以△$ABC$ 不可能是等腰三角形.

例 2 设集合 $M=\{0,1\}$，集合 $P=\{1\}$，下列关系式正确的是(　　).

A. $M\subseteq P$　　B. $M\supseteq P$　　C. $M=P$　　D. $P\in M$

【答案】B

【解析】集合 $P$ 中的元素 1 在集合 $M$ 中能够找到，集合 $M$ 中的元素 0 不在集合 $P$ 中，因此 $M\supseteq P$.

**变式训练 1**

下列选项正确的是(　　).

A. $\pi\in\mathbf{Z}$　　B. $\pi\in\mathbf{N}$

C. $\pi\in\mathbf{Q}$　　D. $\pi\in\mathbf{R}$

## 【考点二】 常见数集及符号的运用

**例 3** 下列关系不正确的是(　　).

A. $\{1,2\}\subseteq\{1,2,3\}$　　B. $\{1,2\}\subsetneqq\{1,2,3\}$　　C. $\mathbf{Z}\subsetneqq\mathbf{R}$

D. $\{1\}=\{x|x=1\}$　　E. $\{x|x>0\}\subseteq\{x|x>1\}$　　F. $\{x|x<0\}\subsetneqq\{x|x<1\}$

【答案】E

【解析】$x>0$ 包含的实数比 $x>1$ 包含的实数要多，故 $\{x|x>0\}\supseteq\{x|x>1\}$，所以 E 错误.

**变式训练 2**

下列选项正确的是(　　).

A. $0=\varnothing$　　B. $0\in\varnothing$　　C. $\{0\}=\varnothing$　　D. $\varnothing\subseteq\{0\}$

## 【考点三】 集合的表示方法

**例 4** 请分别用列举法、描述法表示下列集合：

(1)由方程 $x^2-4=0$ 的实数解组成的集合；

(2)由大于 0 且小于 10 的整数组成的集合.

【解】(1)$x^2-4=0$ 的解为 $x=\pm2$，

则列举法：$\{-2,2\}$，描述法：$\{x|x^2-4=0\}$.

(2)列举法：$\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，描述法：$\{x\in\mathbf{Z}|0<x<10\}$.

**例 5** $\{(x,y)|y=x^2+1\}$与$\{y|y\geqslant1\}$是同一个集合吗？请用图形把它们表示出来.

【分析】用描述法表示集合关键要先看元素的一般形式，了解元素的类型；再分析限制条件，了解元素的范围.

【解】不是. 因为前一个集合是点集，表示抛物线 $y=x^2+1$ 上的点集，如图 2-1；后一个集合是数集，是函数 $y=x^2+1$ 的值域，即$\{y|y\geqslant1\}$，如图 2-2.

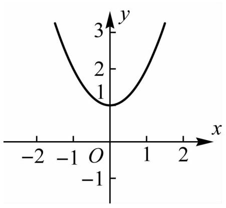

图 2-1

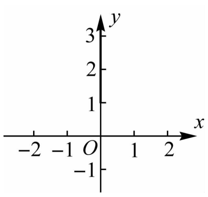

图 2-2

【点拨】用描述法表示集合，元素的一般形式书写要规范，常用小写英文字母表示数，用有序数对$(x,y)$表示点或方程组的解集. 另外元素满足的特定条件描述要准确.

**例 6** 已知 $A=\{x|-2\leqslant x\leqslant7\}$，$B=\{x|x<a\}$，且 $A\subseteq B$，求实数 $a$ 的取值范围.

【分析】集合 $B$ 包含集合 $A$，可以通过数轴来观察.

【解】如图 2-3，易得 $a>7$.

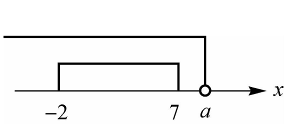

图 2-3

【点拨】判断连续型数集的关系通常可通过数轴来观察.

**变式训练 3**

已知集合 $A=\{x|x^2\leqslant4\}$，集合 $B=\{x|x\in\mathbf{N}$ 且 $x\in A\}$，则 $B=$(　　).

A. $\{0,1,2\}$　　B. $\{1,2\}$

C. $\{-2,-1,0,1,2\}$　　D. $\{0,1,2,3,4\}$

## 【考点四】　集合与其他知识点的结合

**例 7**　(1)集合 $M=\{1,2,3,4\}$,$P=\{x|x=a+b,a,b\in M$ 且 $a\neq b\}$,$P$ 的真子集个数是(　　).

A. 8　　B. 15　　C. 31　　D. 32

(2)满足$\{a,b\}\subseteq A\subsetneqq\{a,b,c,d\}$的集合 $A$ 共有(　　).

A. 2 个　　B. 3 个　　C. 4 个　　D. 5 个

【分析】(1)集合 $P$ 是由集合 $M$ 中两个不同元素之和构成的集合,最小值为 $1+2=3$,最大值为 $3+4=7$.(2)集合 $A$ 中至少包含 $a,b$ 两个元素,$c,d$ 中最多取一个元素.

【答案】(1)C　(2)B

【解析】(1)集合 $P=\{3,4,5,6,7\}$,则集合 $P$ 的真子集个数是 $2^5-1=31$. 故选 C.

(2)本题等价于求集合$\{c,d\}$的真子集个数,则有 $2^2-1=3$(个),故选 B.

【点拨】求集合的子集或真子集个数,关键在于求集合的元素个数.

**例 8**　已知集合 $A=\{x|x^2+ax+2=0\}$,$B=\{-1,2\}$,且 $A\subseteq B$,求实数 $a$ 的取值范围.

【分析】$\because A\subseteq B$,$\therefore$集合 $A$ 可以是空集,也可能包含有$-1$,2.

【解】当 $A=\varnothing$ 时,有 $a^2-8<0$,$\therefore -2\sqrt{2}<a<2\sqrt{2}$.

当$-1\in A$ 时,有$(-1)^2-a+2=0$,$\therefore a=3$,此时 $A=\{-1,-2\}$与已知矛盾;

当 $2\in A$ 时,有 $2^2+2a+2=0$,$\therefore a=-3$,此时 $A=\{1,2\}$也与已知矛盾.

$\therefore$实数 $a$ 的取值范围是$(-2\sqrt{2},2\sqrt{2})$.

**变式训练 4**

已知集合 $A=\{(x,y)|x+y\leqslant 3,x\in\mathbf{N},y\in\mathbf{N}\}$,则集合 $A$ 中的元素个数为(　　).

A. 8　　B. 9　　C. 10　　D. 12

## 达标训练

### 一、选择题

1. 下列语句中,可以表示集合的有(　　).

(1)方程 $x^2+1=0$ 的解集;

(2)所有非负数;

(3)某班身高接近 180 cm 的学生;

(4)某班所有的女学生.

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

2. 下列集合为无限集的是(　　).

A. $\{x|x<100,x\in\mathbf{N}\}$　　B. $\{x|x<100,x\in\mathbf{Q}\}$

C. $\{x|0<x<100,x\in\mathbf{Z}\}$　　D. $\{x|x<100,x\in\mathbf{N}^*\}$

3. 下列说法正确的是(　　).

A. $\{a,b,c\}$ 和$\{c,b,a\}$表示两个不同的集合　　B. $\{a,b,c\}$ 和$\{(a,b,c)\}$表示同一个集合

C. $\varnothing$ 和$\{0\}$表示两个不同的集合　　D. 任何一个集合都可以用列举法表示

4. 下列关系正确的是(　　).

A. $\sqrt{3}\in\mathbf{Z}$　　B. $\sqrt{3}\in\mathbf{N}$　　C. $\sqrt{3}\in\mathbf{Q}$　　D. $\sqrt{3}\in\mathbf{R}$

5. 设集合 $N=\{(a,b)\}$,则下列关系成立的是(　　).

A. $a\in N$　　B. $b\in N$　　C. $(a,b)\in N$　　D. $(a,b)=N$

6. 用列举法表示集合$\{x|x^2-9=0\}$，结果是(　　).

A. $\{3\}$　　B. $\{-3\}$　　C. $\{-3,3\}$　　D. $\{(-3,3)\}$

7. 已知$M=\{x|x-1<0\}$，则有(　　).

A. $-1\in M$　　B. $-1\notin M$　　C. $0\notin M$　　D. $2\in M$

8. 绝对值小于 2 的所有整数组成的集合是(　　).

A. $\{0,1\}$　　B. $\{-1,0,1\}$　　C. $\{-1,1\}$　　D. $\{-1,0\}$

9. 下列关系正确的是(　　).

A. $0\in\varnothing$　　B. $\varnothing\in\{0\}$　　C. $\varnothing\subseteq\{0\}$　　D. $\varnothing=\{0\}$

10. 满足$\{1,2\}\subsetneqq A\subseteq\{1,2,3,4,5\}$的集合 $A$ 共有(　　)个.

A. 2　　B. 7　　C. 15　　D. 16

## 二、填空题

11. 用列举法表示集合$\{(x,y)|x+y=0,x\in\mathbf{N}^*$ 且 $x<4\}$为__________.

12. 用区间表示集合$\{x|x\geqslant 1$ 且 $x\neq 2\}$为__________.

13. 方程 $x^2-2x-3=0$ 的解集用列举法表示为__________.

14. 不等式 $3x-2>4$ 的解集用描述法表示为__________.

15. 已知 $A=\{x|-1\leqslant x\leqslant 1\}$，$B=\{x|x>a+1\}$，则满足 $A\subseteq B$ 的实数 $a$ 的取值范围是__________.

## 三、解答题

16. 已知 $a,b\in\mathbf{R}$，且$\{1,a,a+b\}=\left\{0,b,\dfrac{b}{a}\right\}$，求 $a,b$ 的值.

17. 已知 $A=\{x|2<x<5\}$，$B=\{x|2a\leqslant x<a+3\}$，且 $B\subseteq A$，求 $a$ 的取值范围.

18. 已知集合 $M=\{a+2,(a+1)^2,a^2+3a+1\}$，且 $1\in M$，求实数 $a$ 的值.

# 2.2　集合的运算

## 知识梳理

### 1. 交集的定义

一般地，对于两个给定的集合 $A$，$B$，由所有属于集合 $A$ 且属于集合 $B$ 的元素组成的集合叫作集合 $A$，$B$ 的交集，记为 $A\cap B$，读作 $A$ 交 $B$. 即 $A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$. 其关系如图 2-4 所示.

### 2. 并集的定义

一般地，对于两个给定的集合 $A$，$B$，由所有属于集合 $A$ 或属于集合 $B$ 的元素组成的集合叫作集合 $A$，$B$ 的并集，记为 $A\cup B$，读作 $A$ 并 $B$. 即 $A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$. 其关系如图 2-5 所示.

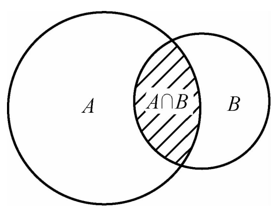


图 2-4

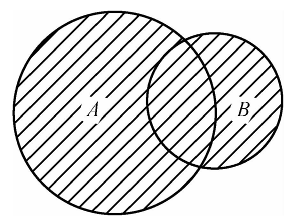


图 2-5

### 3. 补集的定义

我们在研究集合与集合之间的关系时，如果一些集合都是某一给定集合的子集，那么称这个给定的集合为这些集合的全集，通常用 $U$ 表示. 如果没有特别说明，我们把实数集 $\mathbf{R}$ 看作全集.

一般地，设 $U$ 是全集，$A$ 是 $U$ 的一个子集（即 $A\subseteq U$），属于集合 $U$ 但不属于集合 $A$ 的所有元素组成的集合，叫作集合 $A$ 在 $U$ 中的补集（或余集），记作 $\complement_U A$，即 $\complement_U A=\{x|x\in U$ 且 $x\notin A\}$. 其关系如图 2-6 所示.

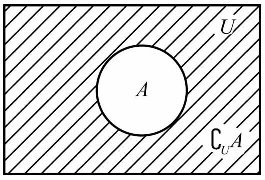


图 2-6

### 4. 集合运算的性质

(1) $A\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=A\Leftrightarrow A\cup B=B$.

(2) $A\cup(\complement_U A)=U$，$A\cap(\complement_U A)=\varnothing$，$\complement(\complement_U A)=A$.

(3) 德摩根法则：$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\complement_U(A\cup B)$，$(\complement_U A)\cup(\complement_U B)=\complement_U(A\cap B)$.

## 典例研析

### 【考点一】　集合的交集运算

**例 1**　已知集合 $M=\{x|0<x<2\}$，$N=\{x|1<x<5\}$，求集合 $M\cap N$.

【分析】集合 $M$ 与集合 $N$ 都是描述法表示，因此解决题目选择的方法为图像法.

【解】$M\cap N=\{x|1<x<2\}$.

【点拨】连续型数集的运算可以通过数轴来观察，如图 2-7 所示.

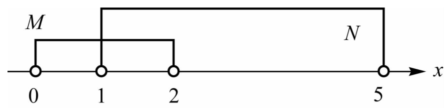


图 2-7

**变式训练 1**

设集合 $A=\{(x,y)\mid x+2y=2\}$，$B=\{(x,y)\mid 3x-y=13\}$，求 $A\cap B$.

## 【考点二】 集合的并集运算

**例 2** 设 $A=\{(x,y)\mid y=x+3\}$，$B=\{(x,y)\mid y=-2x+6\}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$.

【解】$A\cap B=\left\{(x,y)\left|\begin{cases}y=x+3,\\ y=-2x+6\end{cases}\right.\right\}=\{(1,4)\}$.

$A\cup B=\{(x,y)\mid y=x+3$ 或 $y=-2x+6\}$.

**变式训练 2**

已知 $A=\{1,2,4\}$，$B=\{2,3,5\}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$.

## 【考点三】 集合的补集运算

**例 3** 已知全集 $U=\{1,2,3,4,5,6\}$，集合 $M=\{1,2,3,4\}$，集合 $N=\{2,4,6\}$，则 $N\cap(\complement_U M)=($　　$)$.

A. $\{1,3\}$　　　　B. $\{1,2,3,4,5\}$

C. $\{6\}$　　　　D. $\{1,2,3,4,6\}$

【分析】先求 $\complement_U M$，再求与 $N$ 的交集.

【答案】C

【解析】$\complement_U M=\{5,6\}$，$N\cap(\complement_U M)=\{6\}$，故选 C.

**例 4** 已知全集 $U=\mathbf{R}$，$A=\{x||x|<3\}$，$B=\{x|x<0$ 或 $2x-1\geqslant 3\}$，求 $(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$.

【分析】可先求 $\complement_U A$，$\complement_U B$，再求它们的并集；也可以根据德摩根法则，先求 $A\cap B$，再求 $\complement_U(A\cap B)$.

【解】方法一：$\because A=\{x|-3<x<3\}$，$B=\{x|x<0$ 或 $x\geqslant 2\}$，

$\therefore \complement_U A=\{x|x\leqslant -3$ 或 $x\geqslant 3\}$，$\complement_U B=\{x|0\leqslant x<2\}$，

$\therefore (\complement_U A)\cup(\complement_U B)=\{x|x\leqslant -3$ 或 $0\leqslant x<2$ 或 $x\geqslant 3\}$.

方法二：$\because A=\{x|-3<x<3\}$，$B=\{x|x<0$ 或 $x\geqslant 2\}$，

$\therefore A\cap B=\{x|-3<x<0$ 或 $2\leqslant x<3\}$，

$\therefore (\complement_U A)\cup(\complement_U B)=\complement_U(A\cap B)=\{x|x\leqslant -3$ 或 $0\leqslant x<2$ 或 $x\geqslant 3\}$.

【点拨】从不同的角度理解交集、并集、补集的含义：

| 形　式 | 用列举法表示 | 用描述法表示 | 用韦恩图或区间表示 |
|---|---|---|---|
| $A\cap B$ | 找公共元素 | 同时满足两个集合的限制条件 | 找公共部分 |
| $A\cup B$ | 找所有元素 | 至少满足两个集合的限制条件之一 | 找所有部分 |
| $\complement_U A$ | 找剩余元素 | 满足全集条件，但不满足 $A$ 的限制条件 | 找剩余部分 |

**变式训练 3**

(1)若 $U=\{$小于 8 的正整数$\}$，$A=\{2,3,4\}$，求 $\complement_U A$.

(2)设 $U=\mathbf{R}$，$A=\{x|x<1\}$，求 $\complement_U A$.

## 题型四　根据集合的运算求参数的值或取值范围

**例 5** (1)已知 $A=[-1,2)$，$B=[a,+\infty)$，且 $A\cup B=B$，求 $a$ 的取值范围.

(2)已知 $A=\{1,4,x\}$，$B=\{1,x^2\}$，且 $A\cap B=B$，求 $x$ 的值.

【解】(1)如图 2-8，$\because A\cup B=B$，

$\therefore A\subseteq B$，有 $a\leqslant -1$.

图 2-8

(2)$\because A\cap B=B$，

$\therefore B\subseteq A$.

当 $x^2=4$ 时，$x=-2$ 或 $x=2$.

若 $x=-2$，则 $A=\{1,4,-2\}$，$B=\{1,4\}$，有 $B\subseteq A$.

若 $x=2$，则 $A=\{1,4,2\}$，$B=\{1,4\}$，有 $B\subseteq A$.

当 $x^2=x$ 时，$x=0$ 或 $x=1$.

若 $x=0$，则 $A=\{1,4,0\}$，$B=\{1,0\}$，有 $B\subseteq A$.

若 $x=1$，则 $A=\{1,4,1\}$，$B=\{1,1\}$，与集合的互异性相矛盾.

$\therefore x=-2$ 或 $x=0$ 或 $x=2$.

**变式训练 4**

已知方程 $x^2+px+3=0$ 的所有解组成的集合为 $A$，方程 $x^2+x+q=0$ 的所有解组成的集合为 $B$，且 $A\cap B=\{1\}$.

(1)求实数 $p,q$ 的值；

(2)求集合 $A\cup B$.

## 达标训练

### 一、选择题

1. 已知集合 $A=\{3,4,5\}$，$B=\{4,5,6\}$，则 $A\cup B=$(　　).

A. $\{3,4,5,6\}$　　B. $\{4,5\}$　　C. $\{3,6\}$　　D. $\varnothing$

2. 已知集合 $A=\{1,4\}$，$B=\{4,5,6\}$，则 $A\cap B=$(　　).

A. $\{4,5,6\}$　　B. $\{1,4,5,6\}$　　C. $\{1,4\}$　　D. $\{4\}$

3. 已知集合 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{3,4,5\}$，则 $A\cup B=$(　　).

A. $\{1,2\}$　　B. $\{3,4\}$

C. $\{5\}$　　D. $\{1,2,3,4,5\}$

4. 已知全集 $U=\{a,b,c,d,e,f,g\}$，集合 $M=\{a,e,f\}$，集合 $N=\{b,d,e,f\}$，则 $\complement_U(M\cap N)=$(　　).

A. $\{e,f\}$　　B. $\{c,g\}$

C. $\{a,b,d\}$　　D. $\{a,b,c,d,g\}$

5. 已知全集 $U=\{1,2,3,4,5,6\}$，集合 $M=\{1,2,3,4\}$，集合 $N=\{2,4,6\}$，则 $\complement_U(M\cup N)=$(　　).

A. $\{5\}$　　B. $\{1,3,5\}$

C. $\{2,4\}$　　D. $\{1,2,3,4,6\}$

6. 设集合 $A=\{x|x>2\}$，$B=\{x|0<x<2\}$，则 $A\cup B=$(　　).

A. $\{x|x>0\}$　　B. $\{x|x\neq 2\}$

C. $\{x|x>0$ 或 $x\neq 2\}$　　D. $\{x|x>0$ 且 $x\neq 2\}$

7. 已知集合 $A=\{x|x^2=1\}$，集合 $B=\{-1,0,1\}$，则 $A\cap B=$(　　).

A. $\varnothing$　　B. $\{-1\}$

C. $\{1\}$　　D. $\{-1,1\}$

8. 已知集合 $M=\{0,1\}$，$N=\{0,2,4\}$，则 $M\cup N=$(　　).

A. $\varnothing$　　B. $\{0\}$　　C. $\{0,2,4\}$　　D. $\{0,1,2,4\}$

9. 已知集合 $M=\{0,1,2\}$，$N=\{x|x<2\}$，则 $M\cap N=$(　　).

A. $\{0\}$　　B. $\{0,1\}$

C. $\{x|0<x<2\}$　　D. $\{0,1,2\}$

10. 已知集合 $M=\{0,1,2\}$，$N=\{x|x\leqslant 2\}$，则下列结论中正确的是(　　).

A. $M\subseteq N$　　B. $N\subseteq M$

C. $M\cap N=\{2\}$　　D. $M\cup N=\{0,1,2\}$

## 二、填空题

11. 设集合 $M=\{x|x^2=1\}$，$N=\{0,1\}$，则 $M\cup N=$__________.

12. 已知全集 $U=\{x|-5<x<5\}$，$\complement_U A=\{x|2<x<5\}$，则 $A=$__________.

13. 已知 $A=\{x|x<1$ 或 $x>3\}$，$B=\{x|2<x<4$ 或 $x>5\}$，则 $A\cap B=$__________.

14. 已知集合 $M=\{x|-1\leqslant x\leqslant 1\}$，$N=\{x|x>0\}$，则 $M\cap N=$__________.

15. 已知集合 $A=\{4,6,9\}$，$B=\{5,|a-5|\}$，且 $A\cap B=\{4\}$，则 $a=$__________.

## 三、解答题

16. 已知 $A=\{(x,y)|x+y-1=0\}$，$B=\{(x,y)|2x-y=2\}$，且 $M\subseteq(A\cap B)$，求集合 $M$.

17. 已知全集 $U=\mathbf{R}$，$A=\{x|x^2-4<0\}$，$B=\{x|1\leqslant x\leqslant 3\}$，求 $(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$.

18. 设集合 $A=\{x|a\leqslant x\leqslant a+2\}$，集合 $B=\{x|x<-2$ 或 $x>6\}$.

(1)若 $A\cap B\neq\varnothing$，求实数 $a$ 的取值范围；

(2)若 $A\cap B=A$，求实数 $a$ 的取值范围.