巍巍交大 百年书香
www.jiaodapress.com.cn
bookinfo@sjtu.edu.cn

策划编辑 王晓军
责任编辑 胡思佳 柳卫清
封面设计 蒋碧君

• 辽宁省普通高校专升本考试 •

专用教材	高等数学
	思想道德与法治
	英语
	计算机应用基础
考前冲刺试卷及历年真题	高等数学
	思想道德与法治
	英语
	计算机应用基础

扫描二维码
关注上海交通大学出版社
官方微信

ISBN 978-7-313-30158-1
定价：69.00元

辽宁省普通高校专升本考试专用教材·高等数学

华腾新思专升本考试研究中心 编

上海交通大学出版社

华腾新思

依据辽宁省普通高校专升本考试大纲编写

辽宁省

华腾新思专升本考试研究中心 编

普通高校专升本考试专用教材

高等数学

赠册 参考答案及解析

上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

依据辽宁省普通高校专升本考试大纲编写

辽宁省

华腾新思专升本考试研究中心　编

普通高校专升本考试专用教材

高等数学

上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书分为“函数与极限”“一元函数微分学”“一元函数积分学”“向量代数与空间解析几何”“多元函数微积分学”五章内容。根据知识间的关系，每章又细分为不同的小节，每一节设置了“知识脉络”“考纲要求”“知识清单”“真题链接”“巩固练习”五个栏目。“知识脉络”栏目罗列了本节主要的知识内容以及知识间的结构，可帮助考生梳理和记忆各知识间的逻辑顺序；“考纲要求”栏目详细分析了考试大纲对每一个知识点的要求；“知识清单”栏目细致讲解了每一个考生应熟悉或掌握的知识内容，并设置“备考提示”小栏目，能够帮助考生理解知识内容，夯实基础；“真题链接”栏目对真题进行解析，可使考生准确把握考点；“巩固练习”栏目根据本节知识内容，结合考试要求和考试真题中的高频考点，设置了有针对性的练习题，可帮助考生趁热打铁，巩固本节所学知识。此外，在每章末尾还设置了“考点总结”“复习题”两个栏目。“考点总结”栏目对本章的主要考点进行梳理总结，并设置了相关的练习题，能够帮助考生正确把握考点，拓展解题思路。“复习题”栏目设置了一些包含本章知识内容的综合性题目，让考生在实战中运用所学技巧，提高解题能力。

本书既可作为参加辽宁省普通高校专升本考试的考生的复习资料，也可作为广大专科学校学生的学习资料。

图书在版编目(CIP)数据

辽宁省普通高校专升本考试专用教材・高等数学
LIAONING SHENG PUTONG GAOXIAO ZHUANSHENGBEN KAOSHI ZHUANYONG JIAOCAI・GAODENG SHUXUE

华腾新思专升本考试研究中心　编

出版发行：上海交通大学出版社　　地　　址：上海市番禺路 951 号
邮政编码：200030　　电　　话：021-64071208
印　　制：三河市骏杰印刷有限公司　　经　　销：全国新华书店
开　　本：880 mm×1 230 mm　1/16　　印　　张：14.75
字　　数：368 千字
版　　次：2023 年　月第 1 版　　印　　次：2023 年　月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 978-7-313-
定　　价：69.00 元

PREFACE

前言

为了帮助参加辽宁省普通高校专升本考试的考生系统、全面、精准、高效地复习备考，我们特组织省内具有丰富教研经验的教研员，以辽宁省普通高等教育专科升本科招生考试相应科目的考试要求为依据，深入研究近几年辽宁省普通高校专升本考试试卷的命题情况，紧密结合考生的学习特点，精心编写了这套辽宁省普通高校专升本考试复习丛书。

本书是该套复习丛书之《辽宁省普通高校专升本考试专用教材·高等数学》，专为参加辽宁省普通高校专升本考试的考生编写。本书将基础知识考查与解题能力训练相结合，旨在建立完整的备考体系，提供科学的备考方案，帮助广大参加辽宁省普通高校专升本考试的考生迅速掌握考点，突破重点，攻克难点，弄清疑点。

本书具有以下特色。

1. 紧扣考试要求，合理选取内容

本书编写时以《辽宁省普通高等教育专科升本科招生考试·高等数学考试要求》为依据，结合辽宁省普通高校专升本考试历年真题，分为“函数与极限”“一元函数微分学”“一元函数积分学”“向量代数与空间解析几何”“多元函数微积分学”五章。本书内容编排合理，整体难易程度与《辽宁省普通高等教育专科升本科招生考试·高等数学考试要求》一致，考生可以利用本书更好地把握考情，强化对基础知识的理解与运用，学习必备的解题方法，切实提升应试能力。

2. 科学安排体例，全面覆盖考点

本书根据知识间的关系，每章又细分为不同的小节，每一节设置了“知识脉络”“考纲要求”“知识清单”“真题链接”“巩固练习”五个栏目。“知识脉络”栏目罗列了本节主要的知识内容以及知识间的结构，可帮助考生梳理和记忆各知识间的逻辑顺序；“考纲要求”栏目详细分析了考试大纲对每一个知识点的要求；“知识清单”栏目细致讲解了每一个考生应熟悉或掌握的知识内容，并设置“备考提示”小栏目，能够帮助考生理解知识内容，夯实基础；“真题链接”栏目对真题进行解析，可使考生准确把握考点；“巩固练习”栏目根据本节知识内容，结合考试要求和考试真题中的高频考点，设置了有针对性的练习题，可帮助考生趁热打铁，巩固本节所学知识。此外，在每章末尾还设置了“考点总结”“复习题”两个栏目。“考点总结”栏目对本章的主要考点进行梳理总结，并设置了相关的练习题，能够帮助考生正确把握考点，拓展解题思路。“复习题”栏目设置了一些包含本章知识内容的综合性题目，让考生在实战中运用所学技巧，提高解题能力。

3. 解析详细精当，增强解题能力

本书采取了讲练结合的方式，在讲解内容时穿插了许多练习题，所有的练习题都配备了详尽、精当的解析，可帮助考生明确答题误区，找到解题技巧，及时查漏补缺，做到学练结合，从而有步

骤、有计划地提高应试能力。

在编写本套复习丛书的过程中，编者广泛征求了在高等院校中长期从事专升本考试研究工作的一线教师的意见，秉承高效、实用的理念打造精品。我们相信，凝聚着众多名师智慧的本套复习丛书定能成为考生通向成功彼岸的金桥，帮助考生到达理想的殿堂！

衷心希望本套复习丛书能为广大考生的复习备考带来实质性的帮助。对于书中的不足之处，敬请各位读者不吝指正。

华腾新思专升本考试研究中心

CONTENTS 目录

第一章 函数与极限

第一节 函数

知识脉络

- 函数
  - 函数的相关概念
    - 集合、区间与邻域
    - 函数的定义
    - 特殊函数
  - 函数的基本性质
    - 函数的有界性
    - 函数的奇偶性
    - 函数的单调性
    - 函数的周期性
  - 基本初等函数
    - 幂函数
    - 指数函数
    - 对数函数
    - 三角函数
    - 反三角函数

考纲要求

1. 理解函数的概念，会求函数的定义域、表达式及函数值，会建立应用问题的函数关系.

2. 掌握函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.

3. 理解分段函数、反函数和复合函数的概念.

4. 掌握函数的四则运算与复合运算.

5. 掌握基本初等函数的性质及其图形,理解初等函数的概念.

知识精讲

一、函数的相关概念

1. 集合、区间与邻域

1) 集合

一般地,我们把研究对象统称为元素,把一些元素组成的总体叫作集合,简称为集. 通常用大写字母 A,B,C,…表示集合,用小写字母 a,b,c,…表示集合中的元素. 特别地,把不含任何元素的集合称为空集,记作$\varnothing$.

给定一个集合,它的元素必须是确定的,即对于给定的集合,一个元素在或不在这个集合中是确定的. 如果 a 是集合 A 中的元素,就说 a 属于集合 A,记作 $a\in A$;如果 a 不是集合 A 中的元素,就说 a 不属于集合 A,记作 $a\notin A$. 此外,给定集合中的元素必须是互不相同的,即集合中的元素具有互异性.

备考提示

> 数学中一些常用的数集及其记法:
>
> 全体非负整数组成的集合称为非负整数集(或自然数集),记作 $\mathbf{N}$;
>
> 全体正整数组成的集合称为正整数集,记作 $\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$;
>
> 全体整数组成的集合称为整数集,记作 $\mathbf{Z}$;
>
> 全体有理数组成的集合称为有理数集,记作 $\mathbf{Q}$;
>
> 全体实数组成的集合称为实数集,记作 $\mathbf{R}$.

给定两个集合 A,B,如果集合 A 中的元素都是集合 B 中的元素,那么称集合 A 是集合 B 的子集,记作 $A\subset B$(或 $B\supset A$),读作"A 包含于 B"(或"B 包含 A").

设 A,B 是两个集合. 由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素组成的集合,称为集合 A 与 B 的并集,记作 $A\cup B$,读作"A 并 B";由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素组成的集合,称为集合 A 与 B 的交集,记作 $A\cap B$,读作"A 交 B".

2) 区间

设 a,b 是两个实数,且 $a<b$,规定:

满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的实数 x 的集合叫作闭区间,表示为$[a,b]$;

满足不等式 $a<x<b$ 的实数 x 的集合叫作开区间,表示为(a,b);

满足不等式 $a\leqslant x<b$ 或 $a<x\leqslant b$ 的实数 x 的集合叫作半开半闭区间,分别表示为$[a,b)$,$(a,b]$.

实数集 $\mathbf{R}$ 可以用区间表示为$(-\infty,+\infty)$,其中"∞"读作"无穷大","$-\infty$" 读作"负无穷大","$+\infty$" 读作"正无穷大". 此外,还可以把满足 $x\geqslant a$,$x>a$,$x\leqslant b$,$x<b$ 的实数 x 的集合,用区间分别表示为$[a,+\infty)$,$(a,+\infty)$,$(-\infty,b]$,$(-\infty,b)$.

3)邻域

设 a,δ 是两个实数，且 $\delta>0$，我们把满足 $|x-a|<\delta$ 的实数 x 的集合，即开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 称为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\delta)$；把满足 $0<|x-a|<\delta$ 的实数 x 的集合，也即点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后的集合，称为点 a 的去心 δ 邻域，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$.

注：实际上，邻域就表示以点 a 为中心的任何开区间.

2. 函数的定义

定义 1 设 D 是一个实数集. 如果存在一个对应法则 f，使得对 D 中的每一个数 x，在 $\mathbf{R}$ 中都有唯一确定的数 y 与之对应，那么称对应法则 f 为定义在 D 上的一个函数，记为

$$y=f(x),\quad x\in D.$$

其中 x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为函数 f 的定义域.

注：函数的定义域通常由问题的实际背景确定，如果只给出解析式 $y=f(x)$，而没有指明它的定义域，那么函数的定义域就是指能使这个式子有意义的实数的集合.

例 1 求下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{x+3}$； (2) $y=\dfrac{1}{x+2}$； (3) $y=\ln(x-1)$.

【解析】 (1)因为二次根式的被开方数不小于 0，所以 $x+3\geqslant 0$，解得 $x\geqslant -3$. 故 $y=\sqrt{x+3}$ 的定义域为 $[-3,+\infty)$.

(2)因为分式的分母不能为 0，所以 $x+2\neq 0$，即 $x\neq -2$. 故 $y=\dfrac{1}{x+2}$ 的定义域为 $(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)$.

(3)因为对数的真数大于 0，所以 $x-1>0$，解得 $x>1$. 故 $y=\ln(x-1)$ 的定义域为 $(1,+\infty)$.

例 2 函数 $f(x)=\sqrt{x-3}+\arcsin\dfrac{1}{x}$ 的定义域是(　　).

A. $(-\infty,+\infty)$　　B. $[1,3]$

C. $(-\infty,0)\cup(0,3)$　　D. $[3,+\infty)$

【解析】 使根式 $\sqrt{x-3}$ 有意义的实数 x 的集合是 $\{x|x-3\geqslant 0\}=\{x|x\geqslant 3\}$，使 $\arcsin\dfrac{1}{x}$ 有意义的实数 x 的集合是 $\left\{x\,\middle|\,-1\leqslant\dfrac{1}{x}\leqslant 1\right\}=\{x|x\geqslant 1$ 或 $x\leqslant -1\}$. 因此，函数 $f(x)$ 的定义域是 $\{x|x\geqslant 3\}\cap\{x|x\geqslant 1$ 或 $x\leqslant -1\}=\{x|x\geqslant 3\}$，即 $[3,+\infty)$. 故本题选 D.

函数定义中，对 D 中的每一个数 x，按照对应法则，总有唯一确定的值 y 与之对应，这个值称为函数在点 x 处的函数值，记作 $f(x)$. 当自变量 x 遍取 D 的所有数值时，对应的函数值 $f(x)$ 的全体构成的集合称为函数 f 的值域，记作 $f(D)$，即

$$f(D)=\{y|y=f(x),x\in D\}.$$

由函数的定义可以看出，函数的定义域与对应法则是确定函数的两个必不可少的要素. 也就是说，如果两个函数的对应法则和定义域都相同，那么这两个函数就是相同的函数.

3. 特殊函数

1)分段函数

定义 2 在自变量的不同变化范围中，对应法则用不同式子来表示的函数，称为分段函数.

例如，分段函数 $f(x)=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0,\end{cases}$ 它的定义域为 $\mathbf{R}$，当 $x\in(-\infty,0)$ 时，对应的函数表达式为 $f(x)=-x$；当 $x\in[0,+\infty)$ 时，对应的函数表达式为 $f(x)=x$.

例 3 设函数 $f(x)=\begin{cases}1+\log_2(1-x), & x<1,\\ 2^{x-2}, & x\geqslant 1,\end{cases}$ 则 $f(-1)+f(\log_2 4)=$ ________.

【解析】 由题意，得 $f(-1)=1+\log_2 2=2$，$f(\log_2 4)=f(2)=2^{2-2}=1$，所以 $f(-1)+f(\log_2 4)=3$.

2)复合函数

定义 3 设 $y=f(x)$ 和 $u=g(x)$ 是两个函数. 如果 $y=f(x)$ 的定义域包含 $u=g(x)$ 的值域，那么定义在 $u=g(x)$ 定义域上的函数 $y=f(g(x))$ 称为由 $u=g(x)$ 与 $y=f(x)$ 构成的复合函数，变量 u 称为中间变量.

函数 g 与函数 f 构成的复合函数，即按"先 g 后 f"的次序复合的函数，通常记为 $f\circ g$，即

$$(f\circ g)(x)=f(g(x)).$$

例如，取 $f(x)=\sin x$，$g(x)=x^2$，则 $g(x)$ 与 $f(x)$ 构成的复合函数为 $f(g(x))=\sin x^2$，$f(x)$ 与 $g(x)$ 构成的复合函数为 $g(f(x))=\sin^2 x$.

> 注：(1)不是任何两个函数都可以构成复合函数. 例如，函数 $y=\arcsin u$ 与函数 $u=2+x^2$ 就不能构成复合函数. 因为函数 $y=\arcsin u$ 的定义域为 $[-1,1]$，而 $u=2+x^2\geqslant 2$，所以两函数不满足复合函数的条件.
>
> (2)复合函数可以有多个中间变量，如 $y=e^u$，$u=\sqrt{v}$，$v=x+1$ 复合成函数 $y=e^{\sqrt{x+1}}$，这里 u,v 都是中间变量.

例 4 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|\leqslant 1,\\ 2, & |x|>1,\end{cases}$ 求 $f(g(x))$，$g(f(x))$.

【解析】 $f(g(x))=\begin{cases}1, & |g(x)|\leqslant 1,\\ 0, & |g(x)|>1\end{cases}=\begin{cases}1, & |x|=1,\\ 0, & |x|\neq 1.\end{cases}$

$g(f(x))=\begin{cases}2-[f(x)]^2, & |f(x)|\leqslant 1,\\ 2, & |f(x)|>1\end{cases}=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 2, & |x|>1.\end{cases}$

例 5 下列函数是由哪些较简单的函数复合而成的？

(1) $y=e^{-x}$；　(2) $y=\sin^2(1+2x)$；　(3) $y=\arccos\sqrt{\tan(a^2+x^2)}$.

【解析】 (1) $y=e^{-x}$ 是由 $y=e^u$ 与 $u=-x$ 复合而成的.

(2) $y=\sin^2(1+2x)$ 是由 $y=u^2$，$u=\sin v$，$v=1+2x$ 复合而成的.

(3) $y=\arccos\sqrt{\tan(a^2+x^2)}$ 是由 $y=\arccos u$，$u=\sqrt{v}$，$v=\tan w$，$w=a^2+x^2$ 复合而成的.

3)反函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 $f(D)$. 如果对任一 $y\in f(D)$，都存在唯一的 $x\in D$，使得 $f(x)=y$，即确定了一个以 y 为自变量，x 为因变量的函数，那么称这个新确定的函数为 $y=f(x)$ 的反函数，记为

$x=f^{-1}(y)$. 由于习惯上用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，所以将反函数中的 x 与 y 互换位置，即记为 $y=f^{-1}(x)$，$x\in f(D)$.

注：从函数图像上来看，两个互为反函数的函数，它们的图像关于直线 $y=x$ 对称.

备考提示

求函数 $y=f(x)$ 的反函数，通常是把解析式 $y=f(x)$ 变形为 x 关于 y 的等式 $x=g(y)$，然后互换 x 与 y 的位置，得到 $y=g(x)$，函数 $y=g(x)$ 即为函数 $y=f(x)$ 的反函数.

例 6 求函数 $y=\dfrac{3x-5}{2x+1}$ 的反函数.

【解析】 在 $y=\dfrac{3x-5}{2x+1}$ 两边同时乘 $2x+1$，移项整理得

$$x(3-2y)=5+y,$$

等号两边同时除以 $3-2y$，得

$$x=\frac{5+y}{3-2y}.$$

故函数 $y=\dfrac{3x-5}{2x+1}$ 的反函数为 $y=\dfrac{5+x}{3-2x}$.

例 7 求函数 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 的反函数.

【解析】 分别以 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 的两边为指数，e 为底数，得

$$e^y=x+\sqrt{x^2+1},$$

移项整理得

$$\sqrt{x^2+1}=e^y-x,$$

等号两边同时平方，整理得

$$x=\frac{e^y-e^{-y}}{2}.$$

故函数 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 的反函数为 $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$.

4) 隐函数

如果变量 x 与变量 y 满足一个方程 $F(x,y)=0$，且在一定条件下，当 x 取某区间内的任一值时，相应地总有满足这方程的唯一的 y 值存在，那么就说方程 $F(x,y)=0$ 在该区间确定了一个隐函数 $y=f(x)$.

例如，方程 $x^2+y^2=1$ 在 $[-1,1]$ 上确定了两个隐函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 和 $y=-\sqrt{1-x^2}$.

二、函数的基本性质

1. 函数的有界性

定义 4 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X\subset D$. 若存在一个正数 M，使得对任一 $x\in X$，恒有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$在 X 上有界,或称 $f(x)$是 X 上的有界函数.若不存在这样的正数 M,则称 $f(x)$在 X 上无界.

例如,函数 $y=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$ 上有界,因为对任何实数 x,恒有$|\sin x|\leqslant 1$. 又如,函数 $y=\dfrac{1}{x}$在区间$(0,1)$上无界,在$[1,+\infty)$上有界.

例 8　判断下列函数在给定区间上是否有界.

(1)$y=x,x\in(-\infty,+\infty)$;　(2)$y=\dfrac{1}{x^2+1},x\in(-\infty,+\infty)$;　(3)$y=e^x,x\in(-\infty,0)$;

(4)$y=\arctan x,x\in(-\infty,+\infty)$.

【解析】 (1)显然,函数 $y=x$ 在$(-\infty,+\infty)$上无界.

(2)因为当 $x\in(-\infty,+\infty)$时,$\left|\dfrac{1}{x^2+1}\right|\leqslant\dfrac{1}{1}=1$,所以函数 $y=\dfrac{1}{x^2+1}$在$(-\infty,+\infty)$上有界.

(3)因为当 $x\in(-\infty,0)$时,$|e^x|\leqslant e^0=1$,所以函数 $y=e^x$ 在$(-\infty,0)$上有界.

(4)因为当 $x\in(-\infty,+\infty)$时,$|\arctan x|\leqslant\dfrac{\pi}{2}$,所以函数 $y=\arctan x$ 在$(-\infty,+\infty)$上有界.

2. 函数的奇偶性

定义 5　设函数 $f(x)$的定义域为 D,且 D 关于原点对称,即对任一 $x\in D$,都有$-x\in D$. 若

$$f(-x)=f(x)$$

对一切 $x\in D$ 成立,则称 $f(x)$为偶函数;若

$$f(-x)=-f(x)$$

对一切 $x\in D$ 成立,则称 $f(x)$为奇函数.

从函数图像上看,偶函数的图像关于 y 轴对称,奇函数的图像关于原点对称.

例 9　判断下列函数的奇偶性.

(1)$f(x)=x^2(1+x^2)$;　(2)$f(x)=x(x+1)(x-1)$.

【解析】 (1)因为函数 $f(x)=x^2(1+x^2)$的定义域为 $\mathbf{R}$,且

$$f(-x)=(-x)^2[1+(-x)^2]=x^2(1+x^2)=f(x),$$

所以 $f(x)=x^2(1+x^2)$是偶函数.

(2)因为函数 $f(x)=x(x+1)(x-1)$的定义域为 $\mathbf{R}$,且

$$f(-x)=(-x)[(-x)+1][(-x)-1]=-x(x+1)(x-1)=-f(x),$$

所以 $f(x)=x(x+1)(x-1)$是奇函数.

注:在判断函数的奇偶性时,一定要先判断函数的定义域是否关于原点对称,再判断 $f(x)$与$f(-x)$的关系.

3. 函数的单调性

定义 6　设函数 $f(x)$的定义域为 D,区间 $I\subset D$. 若对于 I 上任意两点 x_1,x_2,当 $x_1<x_2$ 时,恒有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称 $f(x)$在 I 上是单调增加的;若对于区间 I 上任意两点 x_1,x_2,当 $x_1<x_2$ 时,恒有

$$f(x_1)>f(x_2),$$

则称 $f(x)$在 I 上是单调减少的.

例 10 判断下列函数的单调性.

(1) $f(x)=\dfrac{1}{1-x}, x\in(-\infty,1)$;　　(2) $f(x)=x^2-2x, x\in(1,+\infty)$.

【解析】 (1)任取 $x_1, x_2\in(-\infty,1)$，且 $x_1<x_2$，则

$$1-x_1>1-x_2>0,$$

从而

$$\frac{1}{1-x_1}<\frac{1}{1-x_2},$$

即得

$$f(x_1)<f(x_2).$$

故 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调增加.

(2)任取 $x_1, x_2\in(1,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，则

$$x_1+x_2>2, x_2-x_1>0,$$

从而

$$f(x_2)-f(x_1)=x_2^2-x_1^2-2(x_2-x_1)=(x_2+x_1-2)(x_2-x_1)>0,$$

即得

$$f(x_1)<f(x_2).$$

故 $f(x)=x^2-2x$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调增加.

注：作差与作商是判断函数单调性常用的方法，需要注意的是，作商判断单调性时，要考虑函数值的正负.

4. 函数的周期性

定义 7 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D. 若存在一个正数 T，使得对任一 $x\in D$，有 $(x+T)\in D$，且

$$f(x+T)=f(x)$$

恒成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，同时称 T 为 $f(x)$ 的一个周期. 如果函数 $f(x)$ 的所有周期中，存在一个最小的周期 T_0，那么称 T_0 为 $f(x)$ 的最小正周期.

注：并非所有的周期函数都有最小正周期. 例如，对狄利克雷函数 $D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 是有理数},\\ 0, & x\text{ 是无理数},\end{cases}$ 任何正有理数都是它的周期，由于不存在最小的正有理数，所以它没有最小正周期.

例 11 判断下列函数的周期性，如果是周期函数，写出它们的最小正周期.

(1) $f(x)=\tan 2x$;　　(2) $f(x)=x\tan x$;　　(3) $f(x)=|\sin 2x|$.

【解析】 (1)函数 $f(x)=\tan 2x$ 是周期函数，它的最小正周期是 $\dfrac{\pi}{2}$.

(2)函数 $f(x)=x\tan x$ 不是周期函数.

(3)函数 $f(x)=|\sin 2x|$ 是周期函数，它的最小正周期是 $\dfrac{\pi}{2}$.

注：如果函数 $f(x)$ 的周期是 T，那么函数 $f(\omega x)(\omega>0)$ 的周期是 $\frac{T}{\omega}$.

三、基本初等函数

1. 幂函数

形如 $y=x^a$（a 为常数）的函数称为幂函数. $a=1,2,3,\frac{1}{2},-1$ 时，幂函数 $y=x^a$ 的图像如图 1.1 所示.

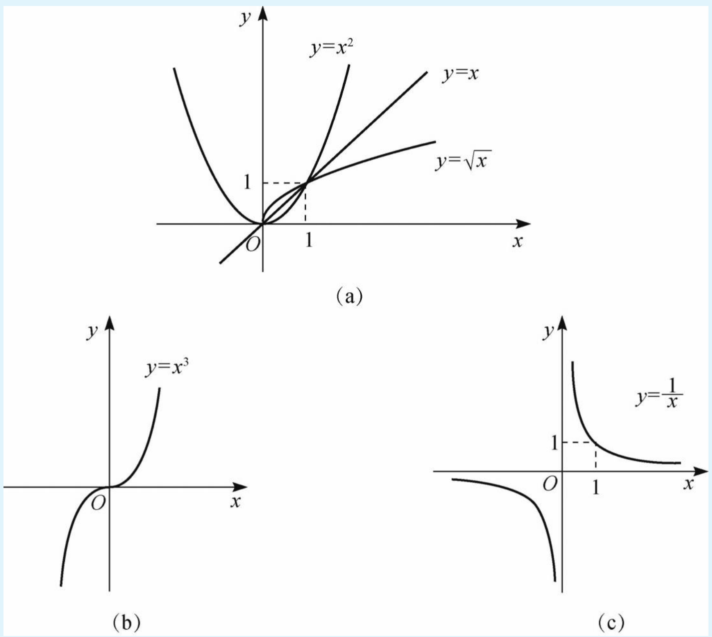


图 1.1

幂函数 $y=x^a$ 的图像恒过点 $(1,1)$. 当 $a>0$ 时，幂函数 $y=x^a$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调增加；当 $a<0$ 时，幂函数 $y=x^a$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调减少.

备考提示

指数幂及其运算性质：

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}；\ a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}；\ a^m a^n=a^{m+n}；\ (a^m)^n=a^{mn}；\ (ab)^m=a^m b^m.$$

其中 $a>0,b>0,m\in\mathbf{R},n\in\mathbf{R}$.

2. 指数函数

形如 $y=a^x$（$a>0,a\neq1$）的函数称为指数函数. 指数函数的定义域为 $\mathbf{R}$，值域为 $(0,+\infty)$，它的图像如图 1.2 所示.

指数函数 $y=a^x$ 的图像恒过点 $(0,1)$. 当 $a>1$ 时，指数函数 $y=a^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调增加；当 $0<a<1$ 时，指数函数 $y=a^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调减少.

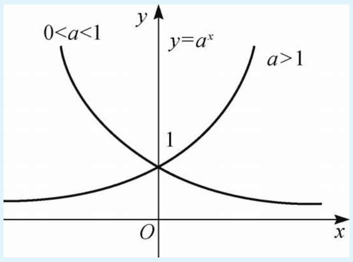


图 1.2

3. 对数函数

形如 $y=\log_a x\,(a>0, a\neq 1)$ 的函数称为对数函数. 对数函数的定义域为 $(0,+\infty)$，值域为 $\mathbf{R}$，它的图像如图 1.3 所示.

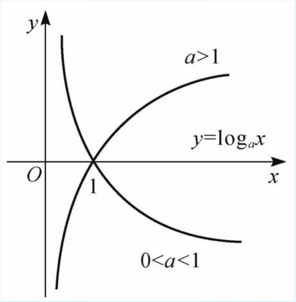


图 1.3

特别地，以 10 为底的对数函数称为常用对数函数，简记为 $y=\lg x$；以 e（e=2.718 28…是一个无理数）为底的对数函数称为自然对数函数，简记为 $y=\ln x$.

对数函数 $y=\log_a x$ 的图像恒过点 $(1,0)$. 当 $a>1$ 时，对数函数 $y=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调增加；当 $0<a<1$ 时，对数函数 $y=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调减少.

注：对于确定的实数 $a\,(a>0, a\neq 1)$，指数函数 $y=a^x$ 与对数函数 $y=\log_a x$ 互为反函数，它们的图像关于直线 $y=x$ 对称.

备考提示

对数的运算性质：

$\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$；

$\log_a \dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$；

$\log_a M^n=n\log_a M$；

$\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$（换底公式）.

其中 $a>0$，且 $a\neq 1$；$b>0$；$c>0$，且 $c\neq 1$；$M>0, N>0$；$n\in\mathbf{R}$.

4. 三角函数

正弦函数 $y=\sin x$、余弦函数 $y=\cos x$、正切函数 $y=\tan x$、余切函数 $y=\cot x$ 统称为三角函数，它们的图像如图 1.4 所示.

正弦函数 $y=\sin x$ 和余弦函数 $y=\cos x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，值域为 $[-1,1]$；正切函数 $y=\tan x$ 的定义域为 $\left\{x \middle| x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbf{Z}\right\}$，值域为 $\mathbf{R}$；余切函数 $y=\cot x$ 的定义域为 $\{x|x\neq k\pi, k\in\mathbf{Z}\}$，值域为 $\mathbf{R}$.

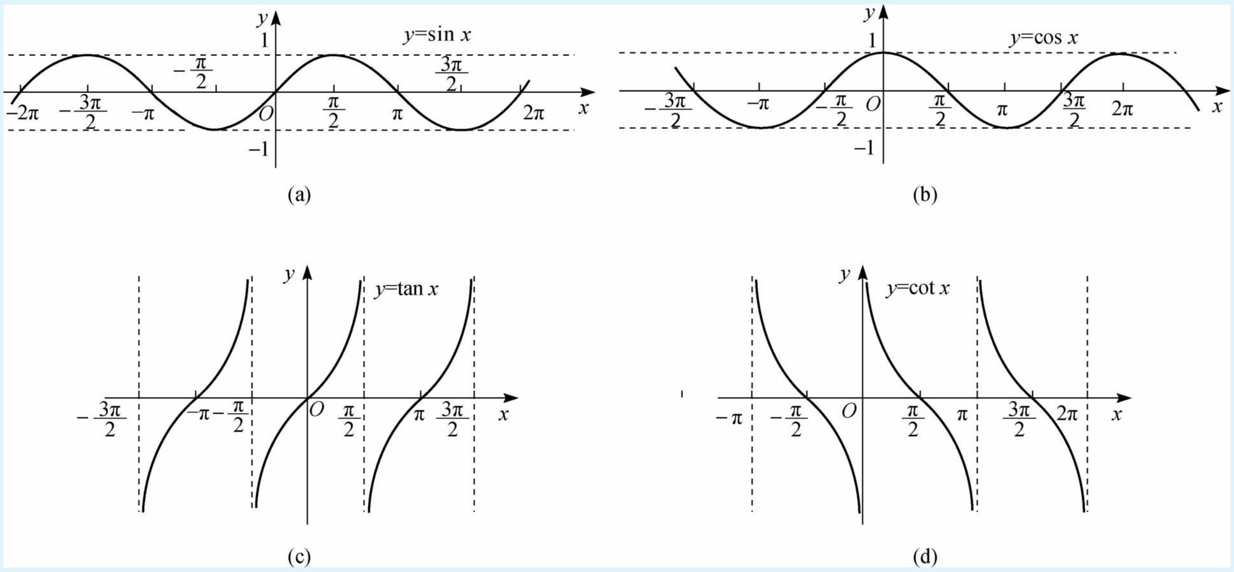


图 1.4

备考提示

三角函数的常用公式：

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$；

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$；

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$；

$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$；

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$.

5. 反三角函数

正弦函数 $y=\sin x$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上的反函数，称为反正弦函数，记作 $y=\arcsin x$，其定义域为 $[-1,$

1],值域为$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,图像如图 1.5(a)所示.

余弦函数 $y=\cos x$ 在区间$[0,\pi]$上的反函数,称为反余弦函数,记作 $y=\arccos x$,其定义域为$[-1,1]$,值域为$[0,\pi]$,图像如图 1.5(b)所示.

正切函数 $y=\tan x$ 在区间$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$上的反函数,称为反正切函数,记作 $y=\arctan x$,其定义域为 $\mathbf{R}$,值域为$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,图像如图 1.5(c)所示.

余切函数 $y=\cot x$ 在区间$(0,\pi)$上的反函数,称为反余切函数,记作 $y=\operatorname{arccot} x$,其定义域为 $\mathbf{R}$,值域为$(0,\pi)$,图像如图 1.5(d)所示.

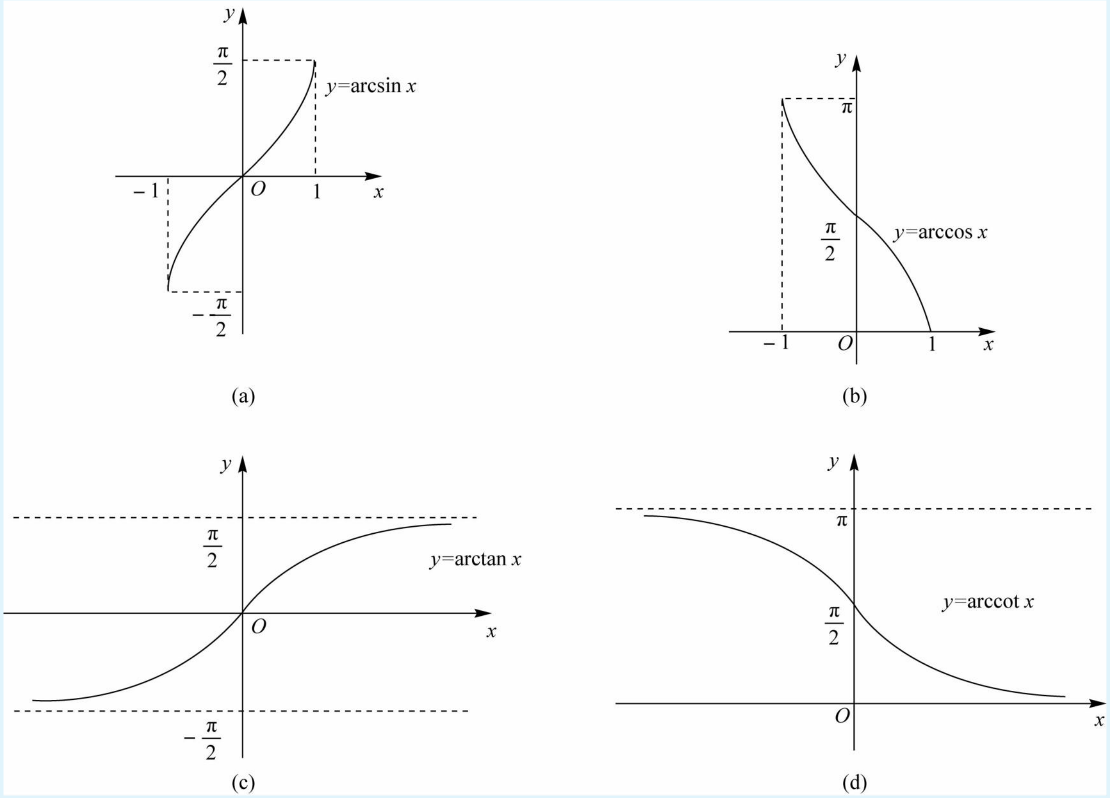


图 1.5

定义 8 由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合所构成的函数,称为初等函数.

真题链接

1.(2019 年辽宁)函数 $y=\frac{\sqrt{16-x^2}}{\ln(x+3)}$的定义域为________.

【答案】 $(-3,-2)\cup(-2,4]$

【解析】 要使函数有意义，自变量须满足$\begin{cases}16-x^2\geqslant 0,\\ x+3>0,\\ x+3\neq 1,\end{cases}$解得函数的定义域为$(-3,-2)\cup(-2,4]$.

2.(2020 年辽宁)$y=\dfrac{\ln(x-1)}{\sqrt{5-x}}$的定义域为________.

【答案】 $(1,5)$

【解析】 若使函数有意义，则须满足$\begin{cases}x-1>0,\\ 5-x>0,\end{cases}$解得$1<x<5$，所以$y$的定义域为$(1,5)$.

3.(2021 年辽宁)函数$y=\dfrac{\ln(x-6)}{\sqrt{9-x}}$的定义域为________.

【答案】 $(6,9)$

【解析】 要使$y=\dfrac{\ln(x-6)}{\sqrt{9-x}}$有意义，需满足$\begin{cases}x-6>0,\\ 9-x>0,\end{cases}$解得$6<x<9$，故$y$的定义域为$(6,9)$.

4.(2022 年辽宁)函数$f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & x>0,\\ \ln(1+x), & x\leqslant 0\end{cases}$的定义域为________.

【答案】 $(-1,1]$

【解析】 要使函数$f(x)$有意义，当$x>0$时，须满足$1-x^2\geqslant 0$，即$0<x\leqslant 1$；当$x\leqslant 0$时，须满足$1+x>0$，即$-1<x\leqslant 0$，故函数$f(x)$的定义域为$(-1,0]\cup(0,1]=(-1,1]$.

5.(2023 年辽宁)设函数$f(x)=\begin{cases}\ln|x|, & x<0,\\ -e^{x+1}, & x\geqslant 0,\end{cases}$则$f[f(1)]=$________.

【答案】 2

【解析】 $f(1)=-e^{1+1}=-e^2<0$，故$f[f(1)]=\ln|-e^2|=2\ln e=2$.

巩固练习

1. 函数$f(x)=\sin\dfrac{1}{\sqrt{x}}$的定义域为(　　).

A. $(-\infty,0)$　　B. $(-\infty,0]$

C. $(0,+\infty)$　　D. $[0,+\infty)$

2. 函数$f(x)=\sqrt{3-x}+\ln(x-2)$的定义域为(　　).

A. $(2,3]$　　B. $[3,+\infty)$

C. $(-\infty,2)$　　D. $[2,3)$

3. 函数$f(x)=\arcsin\dfrac{x+1}{2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$的定义域为(　　).

A. $[-3,-1]$　　B. $(-3,-1]$

C. $[-3,-1)$　　D. $(-3,-1)$

4. 函数 $y=\arcsin|x-2|+\frac{1}{\sqrt{e^x-1}}$的定义域为(　　).

A. $(1,3]$　　B. $[1,3)$

C. $(0,3)$　　D. $[1,3]$

5. 函数 $f(x)=\frac{x-1}{\ln x}+\sqrt{16-x^2}$的定义域为(　　).

A. $(0,1)$　　B. $(0,1)\cup(1,4)$

C. $(0,4)$　　D. $(0,1)\cup(1,4]$

6. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\leqslant 1, \\ x+\frac{6}{x}-6, & x>1, \end{cases}$ 则 $f(f(-3))=$(　　).

A. $\frac{11}{3}$　　B. 9

C. $\frac{2}{3}$　　D. 6

7. 设函数 $y=2+\ln(x+3)$,则此函数的反函数是(　　).

A. $y=e^{2x+3}-3$　　B. $y=e^{x-2}-3$

C. $x=\ln(y-2)-3$　　D. $y=\ln(x-2)-3$

8. 函数 $y=\sqrt{x-2}+1(x\geqslant 2)$ 的反函数是(　　).

A. $y=2-(x-1)^2(x\geqslant 2)$

B. $y=2+(x-1)^2(x\geqslant 2)$

C. $y=2-(x-1)^2(x\geqslant 1)$

D. $y=2+(x-1)^2(x\geqslant 1)$

9. 函数 $f(x)=\frac{1}{1+x}$在其定义域内是(　　).

A. 有界函数　　B. 无界函数

C. 奇函数　　D. 偶函数

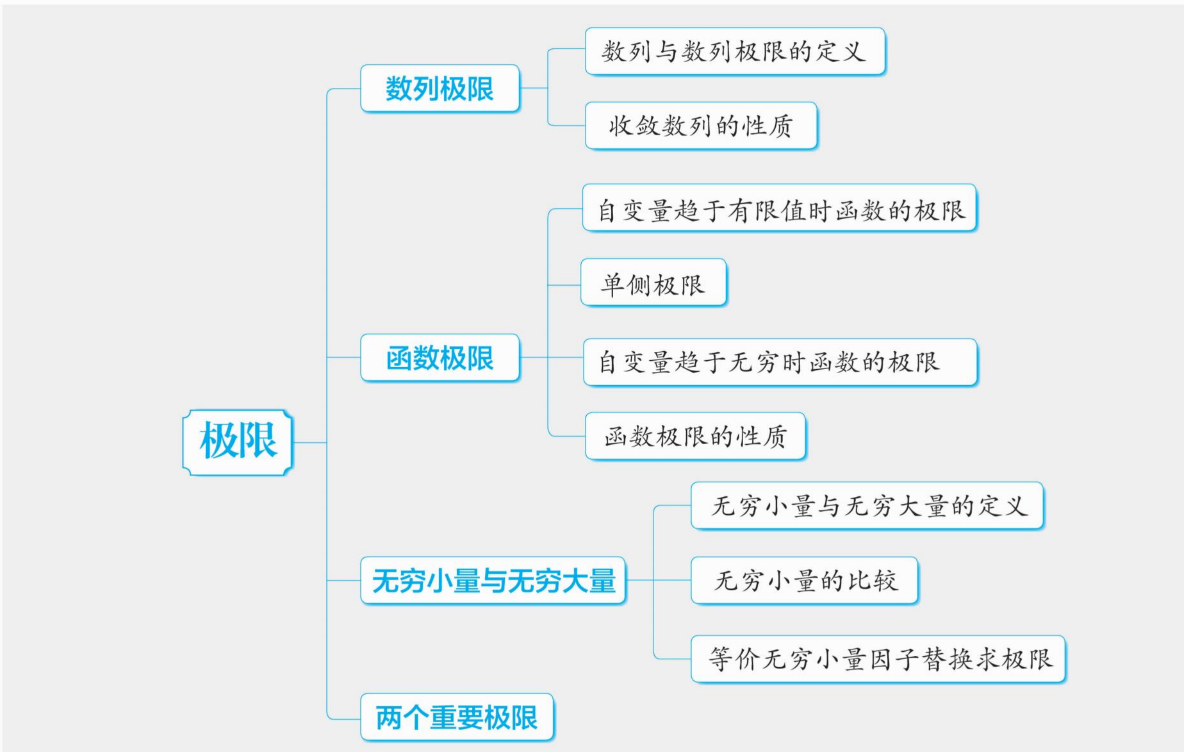
10. 已知函数 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数. 若 $f(x)$的最小正周期为 4,且 $f(1)>0$,$f(3)=\frac{m-3}{m+1}$,则 m 的取值范围是(　　).

A. $-3<m<1$　　B. $m>1$ 或 $m<-3$

C. $-1<m<3$　　D. $m>3$ 或 $m<-1$

第二节 极 限

知识脉络



考纲要求

1. 理解数列极限和函数极限(包括左极限和右极限)的概念,理解函数极限存在与左极限、右极限存在之间的关系.

2. 了解数列极限和函数极限的性质,了解数列极限和函数极限存在的两个收敛准则(夹逼准则与单调有界准则),熟练掌握数列极限和函数极限的四则运算法则.

3. 熟练掌握两个重要极限$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$,$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$,并会用它们求函数的极限.

4. 理解无穷小量、无穷大量的概念,掌握无穷小量的性质、无穷小量与无穷大量的关系. 会比较无穷小量的阶(高阶、低阶、同阶和等价). 会用等价无穷小量求极限.

知识精讲

一、数列极限

1. 数列与数列极限的定义

按照一定顺序排列的一列数

$$x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n,\cdots$$

称为数列，简记为$\{x_n\}$，其中 x_n 称为通项. 例如，

$$1,2,3,\cdots,n,\cdots$$

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$$

$$2,\frac{1}{2},\frac{4}{3},\cdots,\frac{n+(-1)^{n-1}}{n},\cdots$$

它们的通项分别是 $n,\frac{1}{n},\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}$.

注：数列可以看成是定义在正整数集上的函数 $x_n=f(n)$，数列的通项就是这个函数的表达式. 需要注意的是，并不是所有的数列都能写出它的通项.

定义 1 给定一个数列$\{x_n\}$，如果当 n 无限增大时(即 $n\to\infty$时)，x_n 能无限接近于某个确定的实数 a，那么称数列$\{x_n\}$是收敛的，并称 a 为数列$\{x_n\}$的极限(或者说数列$\{x_n\}$收敛于 a)，记作

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a \text{ 或者 } x_n\to a(n\to\infty).$$

如果不存在实数 a，使得数列$\{x_n\}$收敛于 a，那么称$\{x_n\}$是发散的，习惯上也称$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不存在.

例如，数列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$，当 n 无限增大时，$\frac{1}{n}$无限减小并接近于 0，即$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. 又如，数列$\left\{\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}\right\}$，当 n 增大时，$\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}$无限接近于 1，即$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}=1$.

收敛数列的特性是“随着 n 的无限增大，x_n 能无限地接近某一常数 a”，这就是说，当 n 充分大时，数列的通项 x_n 与常数 a 之差的绝对值可以任意小. 下述定义 2 是数列极限的精确定义.

定义 2 设$\{x_n\}$为一数列，如果存在常数 a，对于任意给定的正数 ε(不论它多么小)，总存在正整数 N，使得当 $n>N$ 时，不等式

$$|x_n-a|<\varepsilon$$

都成立，那么常数 a 是数列$\{x_n\}$的极限，即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

数列极限研究的是当 n 足够大时数列的变化趋势，因此数列的极限与数列的有限项无关，改变或者删去数列的有限项不会改变数列的极限.

例 1 计算下列极限.

(1)$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)$；　　(2)$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

【解析】 (1)当 n 无限增大时，$1+\frac{1}{n}$无限接近于 1，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$.

(2)当 n 无限增大时，$\left(\frac{1}{3}\right)^n$ 无限接近于 0，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$.

例 2 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1(a>1)$.

【解析】 令 $h_n=\left|\sqrt[n]{a}-1\right|=\sqrt[n]{a}-1$，则

$$(1+h_n)^n=a.$$

利用二项式定理，上式可化为

$$1+nh_n+\frac{n(n-1)}{2}(h_n)^2+\cdots+(h_n)^n=a,$$

于是

$$nh_n<a,$$

从而

$$0<h_n<\frac{a}{n}.$$

对任意给定的正数 ε，要使 $\left|\sqrt[n]{a}-1\right|=h_n<\varepsilon$，只需令 $\frac{a}{n}<\varepsilon$. 现在取 $N=\left[\frac{a}{\varepsilon}\right]$（$\left[\frac{a}{\varepsilon}\right]$表示 $\frac{a}{\varepsilon}$ 向下取整），则当 $n>N$ 时，就有 $\left|\sqrt[n]{a}-1\right|<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

2. 收敛数列的性质

定理 1（数列极限的唯一性） 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛，那么它的极限唯一.

定理 2（收敛数列的有界性） 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛，那么它是有界的，即存在正常数 M，对一切正整数 n，有 $|x_n|<M$.

定理 3（收敛数列的保号性） 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，且 $a>0$（或 $a<0$），那么存在正整数 N，当 $n>N$ 时，有 $x_n>0$（或 $x_n<0$）.

推论 1 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，且存在正整数 N，当 $n>N$ 时，有 $x_n\geqslant 0$（或 $x_n\leqslant 0$），那么 $a\geqslant 0$（或 $a\leqslant 0$）.

定理 4（数列极限的四则运算） 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$，则

①$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=a\pm b$；②$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=a\cdot b$；③$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{a}{b}(b\neq 0)$.

推论 2 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}cx_n=ca(c\in\mathbf{R})$，$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n)^n=a^n(n\in\mathbf{N}^*)$.

注： 定理 4 可以推广至有限多个收敛数列的情形. 利用定理 4 和推论 2 可以计算一些稍复杂的数列的极限.

例 3 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+n+1}{2n^2+5n+2}$；　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.

【解析】 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+n+1}{2n^2+5n+2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}3+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}2+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}}=\frac{3}{2}$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$. 显然，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0$.

备考提示

定理 4 和推论 2 的应用前提是单个数列的极限存在，如果单个数列的极限不存在，那么就要寻找其他方法计算极限. 通常，如果分子分母都是关于 n 的多项式，那么可以同时除以分子和分母的最高次幂项. 此外，对于无穷项相加的情形不能直接使用定理 4.

例 4 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+q+q^2+\cdots+q^n)$，其中 $|q|<1$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n\cdot(n+1)}\right]$.

【解析】 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+q+q^2+\cdots+q^n)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}=\dfrac{1}{1-q}\lim\limits_{n\to\infty}(1-q^{n+1})=\dfrac{1}{1-q}$.

(2) 由于 $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n\cdot(n+1)}=\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)=1-\dfrac{1}{n+1}$，所以

$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n\cdot(n+1)}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)=1-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}=1$.

定理 5(夹逼准则) 设数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 都以 a 为极限，数列 $\{z_n\}$ 满足：存在正整数 N_0，当 $n>N_0$ 时，有

$$x_n\leqslant z_n\leqslant y_n,$$

则数列 $\{z_n\}$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$.

例 5 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

【解析】 因为

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\frac{n}{\sqrt{n^2+1}},$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1.$$

例 6 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

【解析】 令 $\sqrt[n]{n}=1+h_n(h_n>0)$，则当 $n>3$ 时，

$$\begin{aligned}n=(1+h_n)^n&=1+nh_n+\frac{n(n-1)}{2}(h_n)^2+\cdots+(h_n)^n\\&\geqslant\frac{n(n-1)}{2}(h_n)^2,\end{aligned}$$

于是

$$0<h_n<\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}},$$

从而

$$1\leqslant\sqrt[n]{n}=1+h_n\leqslant1+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}}.$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}}\right)=1$，所以由夹逼准则知，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

定义 3 如果数列$\{x_n\}$满足条件

$$x_1\leqslant x_2\leqslant x_3\leqslant\cdots\leqslant x_n\leqslant x_{n+1}\leqslant\cdots,$$

就称数列$\{x_n\}$是单调增加的;如果数列$\{x_n\}$满足条件

$$x_1\geqslant x_2\geqslant x_3\geqslant\cdots\geqslant x_n\geqslant x_{n+1}\geqslant\cdots,$$

就称数列$\{x_n\}$是单调减少的.单调增加和单调减少的数列统称为单调数列.

定理 6(单调有界准则) 单调有界数列必有极限.

例 7 设 $x_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{n^n}$. 证明:数列$\{x_n\}$收敛.

【解析】 显然,数列$\{x_n\}$是单调增加的,且

$$\begin{aligned}x_n&=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{n^n}\\&\leqslant\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}\\&=\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}\leqslant\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

因此,由单调有界准则,数列$\{x_n\}$收敛.

例 8 证明:数列$\sqrt{2},\sqrt{2+\sqrt{2}},\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},\cdots$收敛.

【解析】 设数列的第 n 项为 x_n,则

$$x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}.$$

因为

$$x_1=\sqrt{2}<2,$$

所以

$$x_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}<2.$$

以此类推,$0<x_n<2$,于是

$$x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}>x_n,$$

即数列$\{x_n\}$是单调递增,且有界的数列.由单调有界准则,数列$\{x_n\}$收敛.

二、函数极限

1. 自变量趋于有限值时函数的极限

定义 4 设函数 $f(x)$在点 x_0 的某一去心邻域内有定义.如果当 x 无限接近 x_0 时(即 $x\to x_0$ 时),对应的函数值 $f(x)$无限接近于某个确定的实数 A,那么称当 x 趋于 x_0 时,函数 $f(x)$以 A 为极限(或者说函数 $f(x)$在点 x_0 处的极限存在,其极限为 A),记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\text{ 或者 }f(x)\to A(x\to x_0).$$

上述定义中,只要求 $f(x)$在点 x_0 的某一去心邻域内有定义,所以$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$与函数 $f(x)$在点 x_0 处的取

值没有关系，$f(x_0)$是否改变，甚至是否存在都不影响$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$. 下述定义5是自变量趋于有限值时函数的极限的精确定义.

定义5　设函数$f(x)$在点x_0的某一去心邻域内有定义. 如果存在常数A，对任意给定的正数ε(不论它多么小)，总存在正数δ，使得当x满足不等式$0<|x-x_0|<\delta$时，对应的函数值都满足不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

那么常数A是函数$f(x)$当$x\to x_0$时的极限，即$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

例9　计算下列极限.

(1)$\lim\limits_{x\to 1}(x+2)$；

(2)$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$.

【解析】(1)当x趋于1时，$x+2$无限接近于3，所以$\lim\limits_{x\to 1}(x+2)=3$.

(2)当x趋于1时，$\dfrac{x^2-1}{x-1}=\dfrac{(x+1)(x-1)}{x-1}=x+1$，所以$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2$.

2. 单侧极限

在x趋于x_0时，x既从x_0的左侧也从x_0的右侧趋于x_0. 如果x仅从x_0的左侧趋于x_0(记作$x\to x_0^-$)时，$f(x)$趋于某个确定的实数A，那么就说函数$f(x)$在点x_0处的左极限存在，并称A为$f(x)$在点x_0处的左极限，记作

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A\text{ 或 }f(x_0^-)=A.$$

如果x仅从x_0的右侧趋于x_0(记作$x\to x_0^+$)时，$f(x)$趋于某个确定的实数A，那么就说函数$f(x)$在点x_0处的右极限存在，并称A为$f(x)$在点x_0处的右极限，记作

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A\text{ 或 }f(x_0^+)=A.$$

定理7　函数$f(x)$在点x_0处的极限存在的充要条件是：函数$f(x)$在点x_0处的左、右极限都存在并且相等.

例10　判断下列函数在$x=1$处的极限是否存在，如果存在请写出极限值.

(1)$f(x)=\begin{cases}3x-1, & x\leqslant 1,\\ x+1, & x>1;\end{cases}$

(2)$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x\leqslant 1,\\ x^2-2, & x>1.\end{cases}$

【解析】(1)因为$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(3x-1)=2$，$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x+1)=2$，所以$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=2$，从而$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=2$.

(2)因为$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x^2-2)=-1$，所以$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)$，从而$\lim\limits_{x\to 1}f(x)$不存在.

例 11　设函数 $f(x)=\begin{cases} x, & -1<x<0, \\ 1, & x=0, \\ -x, & 0<x<1, \\ x-1, & x\geqslant 1. \end{cases}$ 下列陈述中,正确的是(　　).

A. $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$不存在　　　　B. $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$

C. $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$　　　　D. $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=1$

【解析】　因为 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}x=0$, $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)=0$,所以 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0$,从而 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$. 因为 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(-x)=-1$, $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)=0$,所以 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)$,从而 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$不存在. 故本题选 B.

3. 自变量趋于无穷时函数的极限

定义 6　设函数 $f(x)$在$|x|$大于某一正数时有定义. 如果当$|x|$无限增大时(即 $x\to\infty$时),对应的函数值 $f(x)$无限接近于某个确定的实数 A,那么称当 $x\to\infty$时,函数 $f(x)$以 A 为极限,记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \text{ 或者 } f(x)\to A(x\to\infty).$$

特别地,如果 x 取正值且无限增大时,对应的函数值 $f(x)$无限接近于某个确定的实数 A,那么称当 $x\to+\infty$时,函数 $f(x)$以 A 为极限,记作

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A \text{ 或者 } f(x)\to A(x\to+\infty).$$

如果 x 取负值且$|x|$无限增大时,对应的函数值 $f(x)$无限接近于某个确定的实数 A,那么称当 $x\to-\infty$时,函数 $f(x)$以 A 为极限,记作

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=A \text{ 或者 } f(x)\to A(x\to-\infty).$$

需要注意的是,$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 包含了 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$. 因此,如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$和 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$中至少有一个不存在,或 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$和 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$都存在但不相等,那么$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$不存在.

> 注:由于数列是特殊的函数,所以给定一个函数 $f(x)$,若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在,则数列$\{f(n)\}$的极限也存在,并且$\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$. 需要注意,$\lim\limits_{n\to\infty}f(n)$存在不一定能推出 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$也存在,如$f(x)=\begin{cases} 1, & x\in\mathbf{N}, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

例 12　判断极限$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 是否存在.

【解析】　由反正切函数的图像可知,$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$,所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x\neq\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x$,从而$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在.

例 13　判断极限$\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^x$ 是否存在.

【解析】　由指数函数 $y=\mathrm{e}^x$ 的图像可知,$\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x$ 不存在,所以$\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^x$ 不存在.

4. 函数极限的性质

这里以自变量趋于有限值时函数的极限为代表说明函数极限的性质,至于其他形式的函数极限的性

质，只要相应地做一些修改即可得到.

定理 8(函数极限的唯一性) 如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，那么该极限值唯一.

定理 9(函数极限的局部有界性) 如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，那么存在常数$\delta>0$和$M>0$，使得当$0<|x-x_0|<\delta$时，有$|f(x)|\leqslant M$.

定理 10(函数极限的局部保号性) 如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且$A>0$(或$A<0$)，那么存在常数$\delta>0$，使得当$0<|x-x_0|<\delta$时，有$f(x)>0$(或$f(x)<0$).

推论 3 如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且存在常数$\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，有$f(x)\geqslant 0$(或$f(x)\leqslant 0$)，那么$A\geqslant 0$(或$A\leqslant 0$).

注： 函数在一点处(或无穷远处)的极限存在是指函数在这一点附近(或无穷远处)满足函数极限存在的定义，所以定理 3，定理 4 都是局部性质(定理中的$0<|x-x_0|<\delta$就是将自变量限制在x_0附近). 但是在更大的区间上有界性和保号性可能不成立，如函数$f(x)=x$，它在任意点处的极限都存在，所以它满足局部有界性和局部保号性，但在$\mathbf{R}$上$f(x)$无界且变号.

定理 11(函数极限的四则运算) 设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，则

(1)$\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=A\pm B$；

(2)$\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=A\cdot B$；

(3)$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}(B\neq 0)$.

推论 4 设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则$\lim\limits_{x\to x_0}cf(x)=cA(c\in\mathbf{R})$，$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^n=A^n(n\in\mathbf{N}^*)$.

例 14 计算下列极限.

(1)$\lim\limits_{x\to 2}(x^2+3x)$；

(2)$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+x+1}{x^3+2x^2-1}$；

(3)$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x-4}$.

【解析】 (1)$\lim\limits_{x\to 2}(x^2+3x)=\lim\limits_{x\to 2}x^2+\lim\limits_{x\to 2}3x=4+6=10$.

(2)$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+x+1}{x^3+2x^2-1}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 1}(2x^2+x+1)}{\lim\limits_{x\to 1}(x^3+2x^2-1)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 1}2x^2+\lim\limits_{x\to 1}x+\lim\limits_{x\to 1}1}{\lim\limits_{x\to 1}x^3+\lim\limits_{x\to 1}2x^2-\lim\limits_{x\to 1}1}=\dfrac{2+1+1}{1+2-1}=2$.

(3)需要注意，当$x\to 4$时，分母$x-4$的极限为 0，不能直接使用极限的运算，这里可以先将分子和分母约去公因式$x-4$，再计算函数的极限.

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+4)}{x-4}=\lim_{x\to 4}(x+4)=\lim_{x\to 4}x+\lim_{x\to 4}4=8.$$

三、无穷小量与无穷大量

1. 无穷小量与无穷大量的定义

定义 7 如果当$x\to x_0$(或$x\to\infty$)时，函数$f(x)$的极限为零，那么称$f(x)$为当$x\to x_0$(或$x\to\infty$)时的无

穷小量. 特别地，以零为极限的数列$\{x_n\}$是当$n\to\infty$时的无穷小量.

备考提示

(1)无穷小量并不是一个"非常小的数"(如10^{-100})，而是一个极限为零的变量，它的绝对值可以小于任一给定的数的绝对值. 常数列$\{0\}$是一个特殊的无穷小量.

(2)由无穷小量的定义和函数极限的四则运算可知，无穷小量与有界量的乘积仍为无穷小量，有限个无穷小量的和仍为无穷小量.

定义 8 如果当$x\to x_0$(或$x\to\infty$)时，函数$f(x)$的绝对值$|f(x)|$可以大于预先指定的任何正数M，那么称函数$f(x)$为当$x\to x_0$(或$x\to\infty$)时的无穷大量，记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty\left(\text{或}\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty\right).$$

定理 12 在x的同一变化过程中，无穷大量的倒数为无穷小量；不恒为零的无穷小量的倒数为无穷大量.

例 15 判断下列变量是无穷小量还是无穷大量.

(1)$3^x-1, x\to 0^+$；

(2)$\dfrac{\arctan x}{x}, x\to\infty$；

(3)$e^{\frac{1}{x}}, x\to 0^+$；

(4)$e^{\frac{1}{x}}, x\to 0^-$.

【解析】 (1)因为$\lim\limits_{x\to 0^+}(3^x-1)=0$，所以当$x\to 0^+$时，$3^x-1$是无穷小量.

(2)当$x\to\infty$时，$\dfrac{1}{x}$是无穷小量，$\arctan x$是有界量，因为无穷小量与有界量的乘积仍为无穷小量，所以此时$\dfrac{\arctan x}{x}$是无穷小量.

(3)令$t=\dfrac{1}{x}$，则$\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{t\to+\infty} e^t=+\infty$，所以当$x\to 0^+$时，$e^{\frac{1}{x}}$是无穷大量.

(4)令$t=-x$，则当$x\to 0^-$时，$t\to 0^+$，因为当$t\to 0^+$时，$e^{\frac{1}{t}}$是无穷大量，所以此时$e^{\frac{1}{x}}=e^{-\frac{1}{t}}=\dfrac{1}{e^{\frac{1}{t}}}$是无穷小量.

2. 无穷小量的比较

设$f(x)$，$g(x)$都是$x\to x_0$(或$x\to\infty$)时的无穷小量，且$g(x)\neq 0$.

(1)若$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$(或$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$)，则称$f(x)$是比$g(x)$高阶的无穷小量，记作$f(x)=o(g(x))$；

(2)若$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty$(或$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty$)，则称$f(x)$是比$g(x)$低阶的无穷小量，记作$g(x)=o(f(x))$；

(3)若$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=c(c\neq 0)$(或$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=c(c\neq 0)$)，则称$f(x)$与$g(x)$是同阶无穷小量，特别地，若$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$，则称$f(x)$与$g(x)$是等价无穷小量，记作$f(x)\sim g(x)$.

备考提示

常用的 $x \to 0$ 时的等价无穷小量：

$\sin x \sim x$， $\tan x \sim x$， $\arcsin x \sim x$，

$\arctan x \sim x$， $e^x - 1 \sim x$， $\ln(1+x) \sim x$，

$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$， $a^x - 1 \sim x\ln a$， $(1+x)^a - 1 \sim ax(a \neq 0)$.

利用变量替换可以将上述等价无穷小量中的 x 换成任一趋于 0 的变量，如 $\sin x^3 \sim x^3$，$(1+2x)^a - 1 \sim 2ax$.

例 16　当 $x \to 1$ 时，与 $(1-x)$ 等价的是(　　).

A. $\frac{1}{2}(1-x^3)$　　B. $\frac{1}{2}(1-\sqrt{x})$

C. $\frac{1}{2}(1-x^2)$　　D. $\frac{1}{2}(1+\sqrt{x})$

【解析】　因为 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{1}{2}(1-x^3)}{1-x} = \frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 1}\frac{(1-x)(1+x+x^2)}{1-x} = \frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 1}(1+x+x^2) = \frac{3}{2} \neq 1$，所以 $\frac{1}{2}(1-x^3)$ 是 $(1-x)$ 的同阶无穷小量，但不是等价无穷小量；因为 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{1}{2}(1-\sqrt{x})}{1-x} = \frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} = \frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{1+\sqrt{x}} = \frac{1}{4}$，所以 $\frac{1}{2}(1-\sqrt{x})$ 是 $(1-x)$ 的同阶无穷小量，但不是等价无穷小量；因为 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{1}{2}(1-x^2)}{1-x} = \frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 1}\frac{(1+x)(1-x)}{1-x} = \frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 1}(1+x) = 1$，所以 $\frac{1}{2}(1-x^2)$ 与 $(1-x)$ 是当 $x \to 1$ 时的等价无穷小量；因为 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{2}(1+\sqrt{x}) = 1 \neq 0$，所以 $\frac{1}{2}(1+\sqrt{x})$ 不是无穷小量.

综上，本题选 C.

例 17　当 $x \to 0$ 时，$(1+x^2)^k - 1$ 与 $1-\cos x$ 为等价无穷小量，则 k 的值为(　　).

A. 1　　B. $-\frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{2}$　　D. -1

【解析】　当 $x \to 0$ 时，$(1+x^2)^k - 1 \sim kx^2$，$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$，因为 $(1+x^2)^k - 1$ 与 $1-\cos x$ 为等价无穷小量，所以 $k = \frac{1}{2}$. 故本题选 C.

例 18　下列说法中错误的是(　　).

A. 有限个无穷小量的和仍为无穷小量

B. 当 $x \to 1$ 时，$1-x^3$ 是 $1-x$ 的同阶无穷小量

C. 若 α,β,γ 是同一极限过程的无穷小量，且 $\alpha\sim\beta,\beta\sim\gamma$，则 $\alpha\sim\gamma$

D. 已知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x}{1-x}=1$，由此断言，当 $x\to0$ 时，$\cos x$ 与 $1-x$ 是等价无穷小量

【解析】 根据极限的四则运算，有限个无穷小量的和仍为无穷小量，A 项说法正确；因为 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x^3}{1-x}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(1-x)(1+x+x^2)}{1-x}=3$，所以当 $x\to1$ 时，$1-x^3$ 是 $1-x$ 的同阶无穷小量，B 项说法正确；因为 $\alpha\sim\beta,\beta\sim\gamma$，所以 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}=1,\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta}{\gamma}=1$，从而 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\gamma}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}\cdot\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta}{\gamma}=1$，即 $\alpha\sim\gamma$，C 项说法正确；当 $x\to0$ 时，$\cos x$ 与 $1-x$ 都不是无穷小量，D 项说法错误. 故本题选 D.

3. 等价无穷小量因子替换求极限

设当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时 $f(x)\sim h(x)$，根据等价无穷小量的定义及极限的乘法运算，有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{h(x)}{f(x)}=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{h(x)}{f(x)}\right]=\lim_{x\to x_0}\frac{h(x)}{g(x)}.$$

因此，在包含无穷小量的乘除式中可以直接将作为乘法因子或除法因子的无穷小量用与其等价的无穷小量替换.

例 19 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$；

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan 2x}{\ln(1+x)}$；

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{1-e^x}$.

【解析】 (1) 因为当 $x\to0$ 时，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，所以 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{2x^2}=\dfrac{1}{2}$.

(2) 因为当 $x\to0$ 时，$\tan 2x\sim2x,\ln(1+x)\sim x$，所以 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan 2x}{\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x}{x}=2$.

(3) 因为当 $x\to0$ 时，$\sqrt{1+x}-1\sim\dfrac{1}{2}x,e^x-1\sim x$，所以 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{1-e^x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{-2x}=-\dfrac{1}{2}$.

备考提示

等价无穷小量因子替换的原理是极限的乘法运算，所以替换的是作为乘法因子或除法因子的无穷小量，对于作为加、减因子的无穷小量，不能随意替换. 如极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$，如果直接用 x 替换 $\sin x$，就会得到 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-x}{x^3}=0$，但实际上这个结果是错误的.

例 20 当 $x\to0$ 时，与 x 等价的无穷小量是（ ）.

A. $\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$ B. $2\sin x$

C. $\ln(1+x)$ D. $\ln(1+x^2)$

【解析】 当 $x\to0$ 时，$\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\sim\frac{x}{\sqrt{x}}=\sqrt{x}$，所以$\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$是 x 的低阶无穷小量；当 $x\to0$ 时，$2\sin x\sim2x$，所以 $2\sin x$是 x 的同阶无穷小量，但不是等价无穷小量；当 $x\to0$ 时，$\ln(1+x)\sim x$，所以 $\ln(1+x)$是 x 的等价无穷小量；当$x\to0$ 时，$\ln(1+x^2)\sim x^2$，所以 $\ln(1+x^2)$是 x 的高阶无穷小量. 故本题选 C.

四、两个重要极限

两个重要极限是$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ 和$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$，这两个极限需要考生熟记. 与两个重要极限相关的题目，通常利用变量替换法进行求解.

备考提示

关于两个重要极限一定要注意自变量的变化趋势，特别注意的是$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$，$\lim\limits_{x\to0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=1$.

例 21　极限$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin 2x}{x}$的值为(　　).

A. 0　　B. 1

C. 2　　D. ∞

【解析】 当 $x\to\infty$时，$\frac{1}{x}$是无穷小量，$\sin 2x$ 是有界量，所以$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin 2x}{x}=0$. 故本题选 A.

例 22　计算下列极限.

(1)$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 3x}{x}$；

(2)$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}$；

(3)$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

【解析】 (1)令 $t=3x$，则当 $x\to0$ 时，$t\to0$，从而$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 3x}{x}=3\lim\limits_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=3$.

(2)令 $t=\frac{1}{x}$，则当 $x\to\infty$时，$t\to0$，从而$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=\lim\limits_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=1$.

(3)$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$，令 $t=\frac{x}{2}$，则$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{t\to0}\frac{2\sin^2 t}{4t^2}=\frac{1}{2}\lim\limits_{t\to0}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2=\frac{1}{2}\left(\lim\limits_{t\to0}\frac{\sin t}{t}\right)^2=\frac{1}{2}$.

例 23　计算下列极限.

(1)$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{2x}\right)^x$；　(2)$\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$；　(3)$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x$.

【解析】 (1)令 $t=-2x$，则当 $x\to\infty$时，$t\to\infty$，从而$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{2x}\right)^x=\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-\frac{t}{2}}=\left[\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^{-\frac{1}{2}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

(2)令 $t=\frac{1}{2x}$，则当 $x\to 0$ 时，$t\to\infty$，从而$\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t}=\left[\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{2}=e^{2}$.

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x+1}\right)^{x}$，令 $t=-\frac{x+1}{2}$，则当 $x\to\infty$ 时，$t\to\infty$，从而 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x+1}\right)^{x}=$ $\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-2t-1}=\left[\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{-2}\cdot\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-1}=e^{-2}\cdot 1=e^{-2}$.

备考提示

对类似于$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ 的“1^{∞}”型极限$\lim\limits_{x\to\square}(1+u)^{v}$($x\to\square$时，$u\to 0$，$v\to\infty$)，除上述变量替换法外还有一个简单的计算公式$\lim\limits_{x\to\square}(1+u)^{v}=e^{\lim\limits_{x\to\square}uv}$. 例如，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{2x}\right)^{x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(-\frac{1}{2x}\right)\cdot x\right]}=e^{-\frac{1}{2}}$.

真题链接

1. (2019 年辽宁) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$ 的充分必要条件是(　　).

A. $\lim\limits_{x\to a^{-}}f(x)=A$　　B. $\lim\limits_{x\to a^{+}}f(x)=A$

C. $\lim\limits_{x\to a^{-}}f(x)=\lim\limits_{x\to a^{+}}f(x)$　　D. $\lim\limits_{x\to a^{-}}f(x)=\lim\limits_{x\to a^{+}}f(x)=A$

【答案】 D

【解析】 函数 $f(x)$当 $x\to a$ 时极限存在的充分必要条件是 $f(x)$在 $x=a$ 处的左极限和右极限都存在且相等，即 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to a^{-}}f(x)=\lim\limits_{x\to a^{+}}f(x)=A$. 故选 D.

2. (2019 年辽宁)极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{3x}\right)^{x}=$(　　).

A. e^{3}　　B. $\sqrt[3]{e}$

C. $\frac{1}{e^{3}}$　　D. $\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$

【答案】 D

【解析】 原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{3x}\right)^{-3x\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)}=e^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$.

3. (2019 年辽宁)当 $x\to 0$ 时，下列无穷小量中有一个是比其余三个更高阶的无穷小量，这个无穷小量是(　　).

A. $\sin 2x$　　B. $e^{3x}-1$

C. $\ln(1+4x^{3})$　　D. $1-\cos 5x$

【答案】 C

【解析】 当 $x\to 0$ 时 $\sin 2x\sim 2x$，$e^{3x}-1\sim 3x$，$\ln(1+4x^{3})\sim 4x^{3}$，$1-\cos 5x\sim\frac{25x^{2}}{2}$，比较可得当 $x\to 0$ 时，$\ln(1+4x^{3})$是比其余三个更高阶的无穷小量.

4. (2020 年辽宁)极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{3}{x}}=($ $)$.

A. $\dfrac{1}{e^3}$

B. e

C. e^3

D. 1

【答案】 C

【解析】 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{3}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}[(1+x)^{\frac{1}{x}}]^3=e^3$，故选 C.

5. (2020 年辽宁)当 $x\to 0$ 时,下列各组函数为等价无穷小量的是( ).

A. $\sin 5x$ 与 $3x^2$

B. $\ln(1+3x)$ 与 $5x$

C. $1-\cos 2x$ 与 x

D. $e^{3x}-1$ 与 $3x$

【答案】 D

【解析】 A 项，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{3x^2}=\infty$；B 项，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{5x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{5x}=\dfrac{3}{5}$；C 项，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2}{x}=0$；D 项，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{3x}=1$. 只有 D 项中的两个函数为 $x\to 0$ 时的等价无穷小量.

6. (2020 年辽宁)若 $f(x)=\dfrac{2x^2+10x-1}{3x^3-5x^2+8}$,则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=$________.

【答案】 0

【解析】 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+10x-1}{3x^3-5x^2+8}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{2}{x}+\dfrac{10}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}}{3-\dfrac{5}{x}+\dfrac{8}{x^3}}=0.$

7. (2021 年辽宁)极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x}{3}}=($ $)$.

A. e^{-1}

B. $e^{-\frac{1}{3}}$

C. $e^{\frac{1}{3}}$

D. e^3

【答案】 C

【解析】 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x}{3}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}\right]^{\frac{1}{3}}=e^{\frac{1}{3}}.$

8. (2021 年辽宁)当 $x\to 0$ 时,无穷小量 $\tan ax$ 与 $4x$ 等价,则常数 a 的值为( ).

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】 D

【解析】 由题意知，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan ax}{4x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax}{4x}=\dfrac{a}{4}=1$，故 $a=4$.

9. (2021 年辽宁)设函数 $f(x)=\dfrac{\ln(1+2x)}{x}$,则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$________.

【答案】 2

【解析】 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{x}=2.$

10. (2022 年辽宁)函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处左右极限存在是 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处极限存在的( ).

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

【答案】 B

【解析】 函数 $f(x)$在 $x=x_0$ 处左右极限存在且相等是 $f(x)$在 $x=x_0$ 处极限存在的充要条件,仅知 $f(x)$在一点处的左右极限存在无法得出 $f(x)$在该点处的极限存在,但反之成立,故 $f(x)$在点 $x=x_0$ 处左右极限存在是 $f(x)$在点 $x=x_0$ 处极限存在的必要不充分条件.

11.(2022 年辽宁)极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{6x}}=$( ).

A. $e^{\frac{1}{12}}$ B. $e^{\frac{1}{6}}$

C. $e^{\frac{1}{3}}$ D. $e^{\frac{1}{2}}$

【答案】 C

【解析】 $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{6x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right]^{2x\cdot\frac{1}{6x}}=e^{\frac{1}{3}}$.

12.(2022 年辽宁)当 $x\to 0$ 时,下列各选项中为等价无穷小量的是( ).

A. $\sqrt[3]{1+x}-1$ 与$\frac{1}{3}x$ B. $\tan 5x$ 与 $3x+x^2$

C. $\ln(1+5x)$与 $2x$ D. $e^{\sqrt{x}}-1$ 与$\frac{\sqrt{x}}{2}$

【答案】 A

【解析】 A 项,$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\frac{1}{3}x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{3}x}{\frac{1}{3}x}=1$;B 项,$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 5x}{3x+x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{3x+x^2}=\dfrac{5}{3}$;C 项,$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+5x)}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{2x}=\dfrac{5}{2}$;D 项,$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sqrt{x}}-1}{\frac{\sqrt{x}}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x}}{\frac{1}{2}\sqrt{x}}=2$. 故选 A.

13.(2023 年辽宁)极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^{2x}=$( ).

A. e^{-2} B. e^{-1}

C. e D. e^2

【答案】 A

【解析】 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{-x}\right]^{-2}=e^{-2}$.

14.(2023 年辽宁)当 $x\to 0$ 时,$\ln(1+x^2)$与 $a(1-\cos x)$为等价无穷小,则 $a=$( ).

A. $\frac{1}{2}$ B. 1

C. 2 D. 4

【答案】 C

【解析】 由题意知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{a(1-\cos x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\frac{1}{2}ax^2}=\dfrac{2}{a}=1$,故 $a=2$.

15.(2023 年辽宁)已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=1$,则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{e^{x^2}-1}=$ ________.

【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】（方法一）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{2}x^2}=1$，故$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}=\dfrac{1}{2}$，因此$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{e^{x^2}-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}=\dfrac{1}{2}$.

（方法二）因为$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=1$，所以当$x\to0$时，$1-\cos x$是$f(x)$的等价无穷小，故$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{e^{x^2}-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{e^{x^2}-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{1}{2}x^2}{x^2}=\dfrac{1}{2}$.

巩固练习

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=$（　　）.

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

2. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x\sqrt{x}-x}{x-1}=$（　　）.

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. $\dfrac{1}{2}$

3. 当$x\to0$时，与$\tan x$等价的无穷小量是（　　）.

A. x^2-x　　B. $1-\cos x$　　C. $x^2+\sin x$　　D. $\sqrt{1+x}-1$

4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan 3x}{x\cos x}=$（　　）.

A. 0　　B. 1　　C. 3　　D. ∞

5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos\dfrac{x}{2}}{x^2}=$（　　）.

A. $-\dfrac{1}{8}$　　B. $-\dfrac{1}{4}$　　C. $\dfrac{1}{8}$　　D. e^2

6. 下列式子正确的是（　　）.

A. $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=1$　　B. $\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{1}{x}=1$

C. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=1$　　D. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\cos x}{x}=1$

7. 下列等式正确的是（　　）.

A. $\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{1}{x}=1$　　B. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-1}{3x^2-x-1}=1$

C. $\lim\limits_{x\to0}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$　　D. $\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x}}=\infty$

8. 下列结论正确的是（　　）.

A. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{2x}=e$　　B. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{-x}=e$

C. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{1-x}=e$　　D. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{-2x}=e$

9. $\lim\limits_{x\to0}\left(1-\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{3}{x}}=$（　　）.

A. $e^{-\frac{3}{2}}$　　B. $e^{\frac{3}{2}}$　　C. e^{-6}　　D. e^6