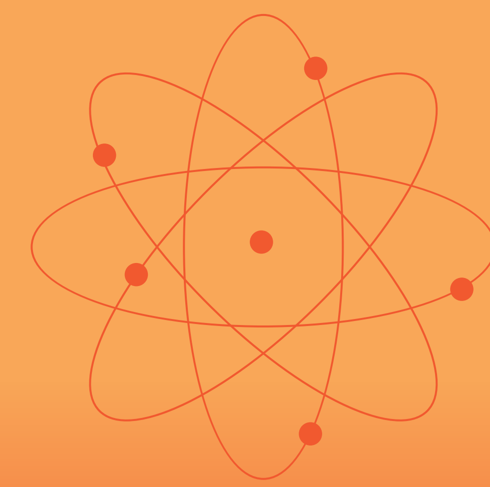

数学

学习辅导与提升训练

（拓展模块一）下册

主编　赵培勇

哈爾濱工程大學出版社
Harbin Engineering University Press

数学学习辅导与提升训练（拓展模块一）下册

主编　赵培勇

哈爾濱工程大學出版社
Harbin Engineering University Press

数学

学习辅导与提升训练

（拓展模块一）下册

选题策划：胡志平
责任编辑：于海燕
封面设计：刘文东

ISBN 978-7-5661-4206-1

定价：26.00元

前言 PREFACE

本书是《数学：拓展模块一. 下册》的配套用书. 本书编写的目的是使学生通过对教材内容的反思，深刻理解教学内容；通过知识检测，掌握基础知识和基本技能，提高应用数学知识分析问题的能力.

本书根据配套教材的章节顺序进行编写，每单元按照“知识梳理”“典例精解”“自我检测”“单元检测”组织内容.

“知识梳理”对知识点进行了重点讲解.

“典例精解”针对甄选的例题进行讲解，给出了详细的解题思路.

“自我检测”针对每小节知识点设置了练习题，以帮助学生巩固所学知识，提高答题能力.

“单元检测”用来对整个单元的知识点进行检测，以帮助学生巩固知识，查漏补缺.

本书的编写以教育部颁布的《中等职业学校数学课程标准(2020 年版)》为依据，努力体现“以服务为宗旨，以就业为导向”的职业教育办学方针，遵循培养高素质劳动者和技能型人才的教学目标.

本书由赵培勇(郑州财税金融职业学院)任主编.

由于编者水平有限，书中难免存在不妥之处，敬请读者批评指正，提出宝贵的意见和建议.

编　者

目录

CONTENTS

第 6 单元

立 体 几 何

6.1　平面的基本性质

6.1.1　平面的表示

知识梳理

1. 平面的图形表示

通常用一个平行四边形表示平面，有时也用三角形、梯形、圆等图形表示平面.

2. 平面的符号表示

(1)用希腊字母 $\alpha,\beta,\gamma,\cdots$表示不同的平面，如图 6-1 所示；

(2)用平行四边形的四个顶点的字母表示平面，如平面 $ABCD$；或用平行四边形的两个对角线的字母表示平面，如平面 AC 或平面 BD，如图 6-2 所示.

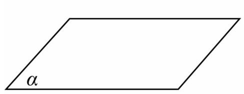

图 6-1

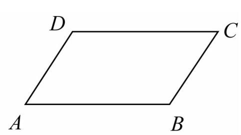

图 6-2

3. 平面的画法

(1)当平面水平放置时,通常把平行四边形的锐角画成 $45°$,钝角画成 $135°$,横边画成邻边的 2 倍;

(2)当平面正对着我们竖直放置时,通常把平面画成矩形.

典例精解

例 判断下列说法是否正确.

(1)一个平面的面积为 20 cm^2;

(2)平面是没有边界的;

(3)平面有厚薄之分.

解 (1)说平面有边界,(2)说平面没有边界,(3)说平面有厚薄.所以(1)错;(2)对;(3)错.

技巧点拨 平面是从现实世界抽象出来的几何概念.平面没有厚薄,是无限延展的.也就是说,它是没有边界,没有厚薄的,我们用平行四边形仅仅表示了平面的一部分.

【变式训练】 下面说法中正确的是(　　).

A. 任何一个平面图形都是一个平面

B. 平静的太平洋面是平面

C. 平面就是平行四边形

D. 在几何体的直观图中,平面多边形和圆、椭圆都可以表示一个平面

自我检测

1. 选择题.

(1)平行四边形 $ABCD$ 表示平面时,下列不能表示该平面的是(　　).

A. 平面 $ABCD$　　B. 平面 AC

C. 平面 BD　　D. 平面 AB

(2)下列说法中,正确的是(　　).

A. 一个平面的面积为 100 cm^2

B. 平面是矩形或平行四边形形状的

C. 平面是有边界的

D. 平面没有厚薄之分

2. 判断下列说法是否正确，并说明理由.

(1)平面 α 只能用平行四边形表示；

(2)圆和平面多边形都可以表示平面；

(3)两个平面重叠在一起比一个平面厚.

6.1.2 平面的三条基本性质

知识梳理

1. 基本性质 1

如果一条直线上的两个点在一个平面内，那么这条直线上的所有点都在这个平面内.

此时称直线 AB 在平面 α 内或平面 α 经过直线 AB，记作 $AB\subset\alpha$，如图 6-3 所示.

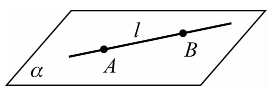

图 6-3

2. 基本性质 2

经过不在同一条直线上的三个点，有且只有一个平面.

该性质可以简单说成“不共线的三点确定一个平面”.

3. 基本性质 3

如果两个不重合的平面有一个公共点，那么它们有且只有一条过这个点的公共直线.

如图 6-4 所示，平面 α 与平面 β 相交，交线为 l，记作 $\alpha\cap\beta=l$.

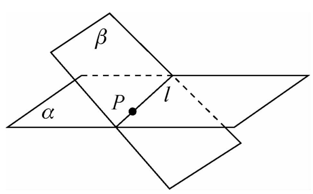

图 6-4

4. 推论

(1)推论 1:经过一条直线和这条直线外的一点,有且只有一个平面;

(2)推论 2:经过两条相交直线,有且只有一个平面;

(3)推论 3:经过两条平行直线,有且只有一个平面.

典例精解

例 1 判断下列说法是否正确.

(1)点 A 在平面 α 内,记作 $A\subset\alpha$;

(2)直线 l 在平面 α 内,记作 $l\in\alpha$;

(3)平面 α 与平面 β 相交,记作 $\alpha\cap\beta$;

(4)直线 l 不在平面 α 内,记作 $l\not\subset\alpha$.

解 (1)点 A 在平面 α 内,记作 $A\in\alpha$;(2)直线 l 在平面 α 内,记作 $l\subset\alpha$;(3)平面 α 与平面 β 相交,记作 $\alpha\cap\beta$;(4)直线 l 在平面 α 外,记作 $l\not\subset\alpha$. 根据分析可知,(1)错误;(2)错误;(3)正确;(4)正确.

技巧点拨 把直线、平面看成点的集合,点与直线的关系是元素与集合的关系,直线与平面的关系是集合与集合的关系.

【变式训练 1】 点 A 在直线 l 上,直线 l 在平面 α 内,可记为(　　).

A. $A\subset l\subset\alpha$　　B. $A\in l\subset\alpha$

C. $A\in l\in\alpha$　　D. $A\subset l\in\alpha$

例 2 在空间中,下列说法不正确的是(　　).

A. 若三条直线相交于一点,则这三条直线共面

B. 四条平行直线最多可以确定六个平面

C. 两条平行直线确定一个平面

D. 若两个平面有一个公共点,则它们有无数个公共点

解析 两条相交直线确定一个平面,但第三条直线不一定在这个平面内,故选 A.

技巧点拨 本题考查了共面的条件.

【变式训练 2】 空间不共线的四点,可以确定平面的个数为(　　).

A. 0　　B. 1

C. 1 或 4　　D. 无法确定

例 3 一条直线与三条平行直线都相交,求证:这四条直线共面.

证明 设直线 $a/\!/b/\!/c$ 且 l 与 a,b,c 均相交.

证法一:因为 $a/\!/b$,所以 a,b 确定一个平面 α.

因为 $l\cap a=A$,$l\cap b=B$,所以 $A\in\alpha$,$B\in\alpha$,故 $l\subset\alpha$.

又因为 $a/\!/c$,所以 a,c 确定一个平面 β,同理可证 $l\subset\beta$.

所以 $\alpha\cap\beta=a$ 且 $\alpha\cap\beta=l$.

因为过两条相交直线 a,l 有且只有一个平面,故 α 与 β 重合,

即直线 a,b,c,l 共面.

证法二:由证法一得 a,b,l 共面 α,也就是说 b 在 a,l 确定的平面 α 内.

同理可证 c 在 a,l 确定的平面 α 内.

因为过 a 和 l 只能确定一个平面,所以 a,b,c,l 共面.

技巧点拨 经过两条相交直线,有且只有一个平面.

【变式训练 3】 已知 a,b,c,d 是两两相交但不共点的四条直线.求证:a,b,c,d 共面.

自我检测

1. 选择题.

(1)下列现象利用了平面的基本性质 1 的是(　　).

A. 若点 A 与点 B 都在平面 α 内,则直线 AB 在平面 α 内

B. 两个合页和一把锁可以把门固定

C. 有的自行车有一个撑脚,有的有两个撑脚

D. 用丝带交叉捆礼品盒

(2)两个平面相交,那么它们有(　　).

A. 零个公共点　　B. 一个公共点

C. 两个公共点　　D. 无数个公共点

(3)下列条件可以确定一个平面的是(　　).

A. 三点　　B. 两条直线

C. 一条直线与一个点　　D. 两条相交直线

(4)三条两两平行的直线最多可以确定平面的个数为(　　).

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

2. 填空题.

(1)若 $A\in\alpha$,$B\in\alpha$,则直线 AB ________ α.

(2)若 $A\in\alpha$,$B\in\alpha$,且 $A\in\beta$,$B\in\beta$,则 $\alpha\cap\beta=$________.

(3)一个平面把空间分为________个部分,两个平面把空间分为________个部分.

3. 如图 6-5 所示，三条直线两两平行且不共面，每两条确定一个平面，一共可以确定几个平面？如果三条直线相交于一点，它们最多可以确定几个平面？

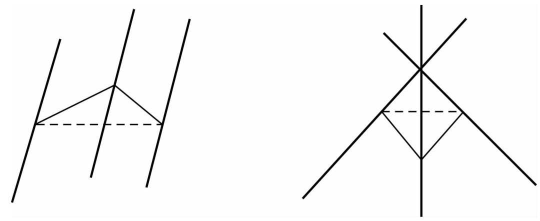

图 6-5

4. 根据下列点、线、面之间的关系，画出相应的图形.

(1)直线 l 在平面 α 内；

(2)点 A 在直线 l 上；

(3)点 B 不在直线 l 上但点 B 在平面 α 内.

6.2 直线与直线、直线与平面、平面与平面平行的判定和性质

6.2.1 直线与直线平行的判定和性质

知识梳理

1. 空间直线的位置关系

在空间中，同在一个平面内的直线叫作共面直线，平行或相交的直线都是共面直线. 不同在任何一个平面内的直线叫作异面直线. 这样，空间中两条直线的位置关系就有三种，即平行、相交和异面.

2. 两直线平行的判定定理

平行于同一条直线的两条直线互相平行.

符号表示:若 $a /\!/ b, b /\!/ c$,则 $a /\!/ c$.

3. 空间四边形

顺次连接空间中不共面的四个点所构成的图形叫作空间四边形.

典例精解

例 观察如图 6-6 所示的正方体,找出符合下列条件的所有直线.

(1)与 AB 平行的直线有____________;

(2)与 AB 相交的直线有____________;

(3)与 AB 异面的直线有____________.

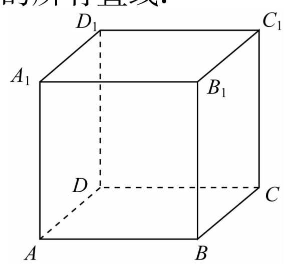

图 6-6

解析 (1)CD, A_1B_1, C_1D_1;

(2)AD, BC, AA_1, BB_1;

(3)$A_1D_1, B_1C_1, DD_1, CC_1$.

技巧点拨 根据概念可得.

【变式训练】 写出图 6-7 中各组直线的关系.

(1)m 与 n ____________;

(2)l 与 n ____________;

(3)l 与 m ____________.

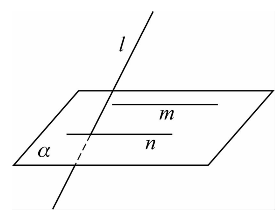

图 6-7

自我检测

1. 选择题.

(1)如果直线 m 与 n 没有公共点,那么 m 与 n 的位置关系是( ).

A. 平行 B. 相交 C. 异面 D. 平行或异面

(2)设 BB_1 是长方体的一条棱,则长方体中与 BB_1 平行的棱有( ).

A. 1 条 B. 2 条 C. 3 条 D. 4 条

(3)分别在两个相交平面内的两条直线的位置关系是( ).

A. 平行 B. 相交 C. 异面 D. 无法确定

(4)直线 $a /\!/ b, m /\!/ n, a /\!/ n$,则直线 b 和 m 的位置关系是( ).

A. 平行 B. 相交 C. 异面 D. 无法确定

(5)若 $m /\!/ n$,l 与 m 是异面直线,那么 l 与 n 的位置关系是( ).

A. 平行 B. 相交 C. 异面 D. 相交或异面

2. 填空题.

(1)直线 a,b 确定了一个平面，则 a,b 的位置关系是____________.

(2)若直线 $a/\!/b,b/\!/c$，则 a ____________ c.

3. 如图 6-8 所示，在四面体 $ABCD$ 中，E,F,G,H 分别是 AB,BC,CD,DA 的中点，求证：四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

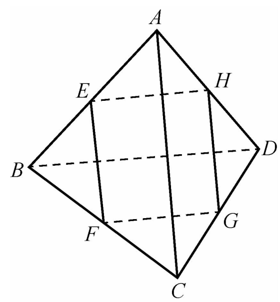

图 6-8

6.2.2 直线与平面平行的判定和性质

知识梳理

1. 直线与平面的位置关系

(1)如果一条直线与平面有无数个公共点，那么称这条直线在这个平面内；

(2)如果一条直线与平面只有一个公共点，那么称这条直线与这个平面相交；

(3)如果一条直线与平面没有公共点，那么称这条直线与这个平面平行.

注：直线与平面相交及直线与平面平行统称为直线在平面外.

2. 直线与平面平行的判定定理

如果平面外的一条直线和平面内的一条直线平行，那么这条直线和这个平面平行.

符号表示：若 $m\not\subset\alpha,n\subset\alpha$，且 $m/\!/n$，则 $m/\!/\alpha$. 如图 6-9 所示.

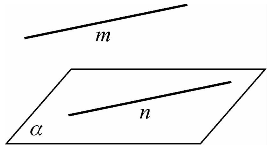

图 6-9

3. 直线与平面平行的性质定理

如果一条直线和一个平面平行，且经过这条直线的平面和这个平面相交，那么这条直线就和两个平面的交线平行.

符号表示：若 $m/\!/\alpha$，$m\subset\beta$，且 $\alpha\cap\beta=n$，则 $m/\!/n$. 如图 6-10 所示.

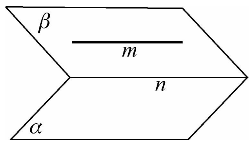

图 6-10

典例精解

例　如图 6-11 所示，在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，D 为 BC 的中点.

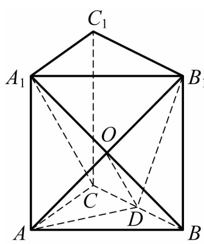

图 6-11

求证：$A_1C/\!/$平面 AB_1D.

证明　如图 6-11 所示，连接 A_1B 交 AB_1 于点 O，连接 OD.

在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧面 ABB_1A_1 为平行四边形，则 O 为 A_1B 的中点.

又因为 D 为 BC 的中点，

所以 $OD/\!/A_1C$.

又 $OD\subset$平面 AB_1D，$A_1C\not\subset$平面 AB_1D，

所以 $A_1C/\!/$平面 AB_1D.

技巧点拨 要证线面平行，先证明线线平行，要学会借助中位线证明线线平行.

【变式训练】 如图6-12所示，空间四边形$ABCD$四边AB，BC，CD，AD的中点依次为E，F，G，H. 证明：$BD//$平面$EFGH$.

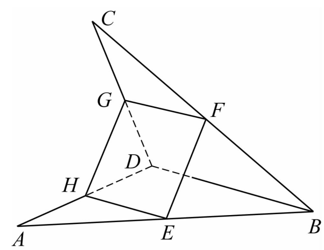

图 6-12

自我检测

1. 选择题.

(1)下列命题中，正确的是(　　).

A. 若直线m不在平面α内，则$m//\alpha$

B. 若直线$m//$平面α，则m平行于平面α内无数条直线

C. 若直线$m//$平面α，则平面α内只有一条直线与m平行

D. 若直线$m//n$，则m平行于经过n的所有平面

(2)若直线$m//$平面α，则m平行于α内(　　).

A. 唯一一条直线　　B. 任意一条直线

C. 所有直线　　D. 无数条直线

(3)下列命题中，不正确的是(　　).

A. 若直线m上有两个点在平面α内，则m在平面α内

B. 若直线m上有一个点在平面α外，则m不在平面α内

C. 若直线m不在平面α内，则m与平面α至少有一个公共点

D. 若直线m不在平面α内，则m与平面α最多有一个公共点

(4)过直线外一点，与已知直线平行的平面有(　　).

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 无数个

2. 填空题.

(1)若直线l与平面α内的一条直线平行，则l与α的位置关系是__________.

(2)在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，与直线AB平行的平面有__________个.

(3)下列说法中,正确的有____________.

①若平面α外的一条直线a与平面α内的无数条直线平行,则直线a与平面α平行;

②已知平面α外的两条平行直线a,b,若$a /\!/ \alpha$,则$b /\!/ \alpha$;

③若直线a和平面α平行,则直线a平行于平面α内任意一条直线;

④若直线a和平面α平行,则平面α中必定存在直线与直线a平行.

3.如图6-13所示,四边形$ABCD$是矩形,P是平面$ABCD$外一点,过BC作平面$BCFE$交AP于点E,交DP于点F.

求证:四边形$BCFE$是梯形.

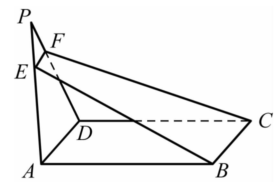

图 6-13

4.如图6-14所示,点P是平行四边形$ABCD$所在平面外一点,点Q是PA的中点,求证:$PC /\!/$平面BDQ.

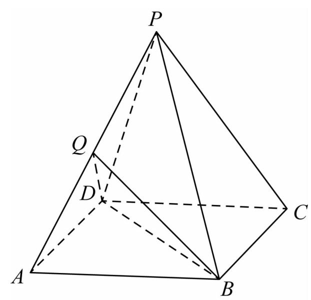

图 6-14

6.2.3 平面与平面平行的判定和性质

知识梳理

1. 平面与平面的位置关系

(1)如果两个平面没有公共点,那么称这两个平面互相平行;

(2)如果两个平面有且只有一条公共直线,那么称这两个平面相交.

2. 平面与平面平行的判定定理

如果一个平面内有两条相交直线平行于另一个平面,那么这两个平面平行.

符号表示:若 $a\subset\alpha$,$b\subset\alpha$,$a\cap b=P$,且 $a/\!/\beta$,$b/\!/\beta$,则 $\alpha/\!/\beta$. 如图 6-15 所示.

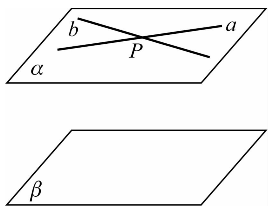

图 6-15

3. 平面与平面平行的性质定理

如果两个平行平面同时与第三个平面相交,那么它们的交线互相平行.

符号表示:若 $\alpha/\!/\beta$,$\alpha\cap\gamma=m$,$\beta\cap\gamma=n$,则 $m/\!/n$. 如图 6-16 所示.

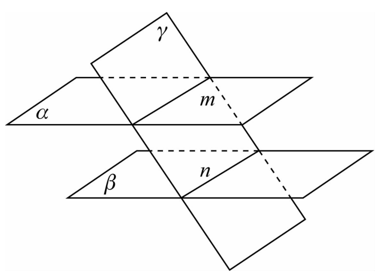

图 6-16

典例精解

例 1 判断下列命题是否正确.

(1)如果一个平面内的两条直线与另一个平面内的两条直线分别平行,那么

这两个平面平行；

(2)如果一个平面内的两条直线都与另一个平面平行，那么这两个平面平行；

(3)分别在两个平行平面内的两条直线平行；

(4)平行于同一直线的两平面平行.

解 (1)错误；(2)错误；(3)错误；(4)错误.

技巧点拨 解答本题要熟记两个平面平行的判定定理和性质定理.

【变式训练 1】 设直线 l,m 和平面 α,β,γ，下列条件能得出 $\alpha /\!/ \beta$ 的是(　　).

A. $l\subset\alpha,m\subset\alpha$，且 $l/\!/\beta,m/\!/\beta$　　B. $l\subset\alpha,m\subset\beta$，且 $l/\!/m$

C. $\alpha/\!/\gamma$，且 $\gamma/\!/\beta$　　D. $l/\!/\alpha,m/\!/\beta$，且 $l/\!/m$

例 2 如图 6-17 所示，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E,F,G 分别是 A_1B_1,A_1D_1,AA_1 的中点.

求证：平面 $EFG/\!/$平面 BDC_1.

证明 连接 B_1D_1,AB_1，因为 E,F 分别是 A_1B_1，A_1D_1 的中点，所以 $EF/\!/B_1D_1$. 又因为 $BD/\!/B_1D_1$，所以 $EF/\!/BD$，而 EF 不在平面 BDC_1 内，BD 在平面 BDC_1 内，所以 $EF/\!/$平面 BDC_1；同理可证 $EG/\!/$平面 BDC_1，又 $EF\cap EG=E$，故易知平面 $EFG/\!/$平面 BDC_1.

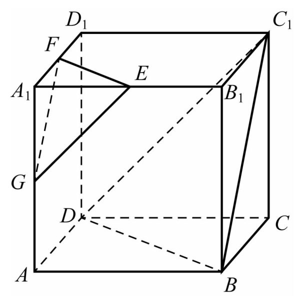

图 6-17

技巧点拨 根据三角形中位线定理先证明线线平行，再证明线面平行，最后应用判定定理证明面面平行.

【变式训练 2】 如图 6-18 所示，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，E,F,G 分别是 PC,PD,BC 的中点，$DC/\!/AB$.

求证：平面 $PAB/\!/$平面 EFG.

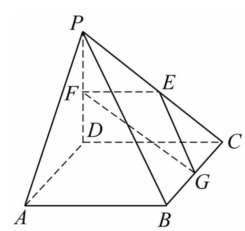

图 6-18

自我检测

1. 选择题.

(1)已知平面 α 平行于平面 β，若直线 m 在平面 α 内，则直线 m 与平面 β 的位置关系是（　　）.

A. 平行　　B. 相交

C. 直线在平面内　　D. 平行或相交

(2)若平面 α 内两条直线 a，b 都平行于平面 β，则平面 α 与平面 β 的位置关系是（　　）.

A. 平行　　B. 相交　　C. 重合　　D. 无法确定

(3)在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，平面 $ABCD$ 与平面 $A_1B_1C_1D_1$ 的位置关系是（　　）.

A. 平行　　B. 相交　　C. 重合　　D. 无法确定

(4)下列条件中，能推出平面 α 平行于平面 β 的是（　　）.

A. 直线 $a\subset\alpha$，且 $a/\!/\beta$

B. 直线 $a\subset\alpha$，$b\subset\alpha$，且 $a/\!/\beta$，$b/\!/\beta$

C. 平面 α 内任何一条直线都平行于平面 β

D. 平面 α 内有无数条直线平行于平面 β

2.(1)作两个平行平面 α 与 β；过两平面外一点 A，作直线 AC 交平面 α 于点 B，交平面 β 于点 C；作直线 AF 交平面 α 于点 E，交平面 β 于点 F.

(2) 求证(1)中直线 $BE/\!/CF$.

3. 如图 6-19 所示，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M,N,P,Q,R,S 分别是所在棱的中点.

求证：平面 PMN∥平面 QRS.

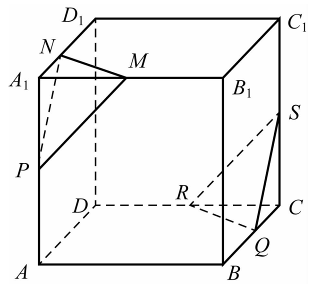

图 6-19

6.3 直线与直线、直线与平面、平面与平面所成的角

6.3.1 空间两条直线所成的角

知识梳理

1. 相交直线的夹角

两条相交直线的夹角是这两条直线相交所成的最小的正角.

2. 异面直线所成的角

经过空间任意一点分别作与两条异面直线平行的直线，则这两条相交直线所成的最小夹角称为两条异面直线所成的角. 两条异面直线所成角的取值范围是$(0°,90°]$.

典例精解

例 如图 6-20 所示，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，连接 A_1C.

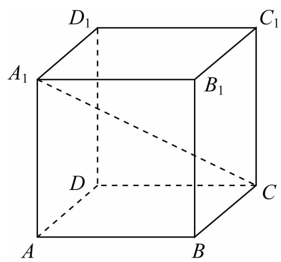

图 6-20

求下列各对直线的夹角的大小.

AB 与 DC ____________；　　AB 与 D_1C_1 ____________；

AB 与 BB_1 ____________；　　AB 与 AD ____________.

解析 $0°$；$0°$；$90°$；$90°$.

技巧点拨 观察正方体，易得各对直线的夹角.

【变式训练】 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，写出下列各对异面直线所成的角.

AB 与 DD_1 ____________；　　AD 与 A_1C ____________；

AB 与 A_1C ____________；　　BB_1 与 A_1C ____________.

自我检测

1. 选择题.

(1)空间中两条相交直线所成的角的取值范围是(　　).

A. $(0°,90°)$　　B. $(0°,90°]$

C. $[0°,90°)$　　D. $[0°,90°]$

(2)两条异面直线所成的角的取值范围是(　　).

A. $(0°,90°)$　　B. $(0°,90°]$

C. $[0°,90°)$　　D. $[0°,90°]$

(3)如果直线 m，n 与直线 l 相交所成的角相等，则直线 m，n 的位置关系是(　　).

A. 平行　　B. 相交　　C. 异面　　D. 不确定

2. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，A_1C_1 与 AB 的夹角为____________，AB 与 DD_1 的夹角为____________.

3. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，与 AB 异面的棱是____________，A_1B 与 CD 的夹角为____________.

6.3.2 直线与平面所成的角

知识梳理

1. 直线与平面斜交的概念

如果直线 l 与平面 α 相交但不垂直，则称直线 l 与平面 α 斜交，直线 l 叫作平面 α 的斜线，斜线 l 与平面 α 的交点叫作斜足.

2. 斜线在平面内的射影

设直线 PB 是平面 α 的斜线，斜足为 B，过点 P 作平面 α 的垂线 PA，垂足为 A，则过垂足 A 和斜足 B 的直线 AB 叫作斜线 PB 在平面 α 内的射影.

3. 直线与平面所成的角

平面的一条斜线与它在平面上的射影所成的角叫作这条斜线与这个平面所成的角.

当直线与平面平行或直线在平面内时，直线与平面所成的角是零角；当直线与平面垂直时，直线与平面所成的角是直角. 故直线与平面所成角的范围是 $[0°,90°]$.

典例精解

例 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，求直线 BD_1 与平面 AA_1D_1D 所成角的正切值.

解 连接 AD_1，可知直线 BD_1 与平面 AA_1D_1D 所成的角为 $\angle AD_1B$. 设正方体的棱长为 1，则 $AD_1=\sqrt{2}$，所以 $\tan\angle AD_1B=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

技巧点拨 根据正方体的性质易得直线和平面所成的角.

【变式训练】 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，B_1C 与平面 $ABCD$ 所成的角是（　　）.

A. 0°　　B. 45°　　C. 60°　　D. 90°

自我检测

1. 选择题.

(1)直线与平面所成的角的取值范围是（　　）.

A. $(0°,90°)$　　B. $(0°,90°]$　　C. $[0°,90°)$　　D. $[0°,90°]$

(2)正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，BB_1 与平面 CC_1D_1D 所成的角是（　　）.

A. $0°$　　B. $45°$　　C. $60°$　　D. $90°$

(3)在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，直线 AB_1 与平面 $ABCD$ 所成的角为（　　）.

A. $45°$　　B. $60°$　　C. $90°$　　D. $120°$

2. 如图 6-21 所示，$PA\perp\alpha$，则图中的垂线为________；斜线为________；垂足为________；斜足为________；点 P 在平面 α 内的射影是________；斜线 PC 在平面 α 内的射影是________；直线 PA 与 α 所成的角是________（用角度表示）；直线 PB 与平面 α 所成的角是________（用符号表示）.

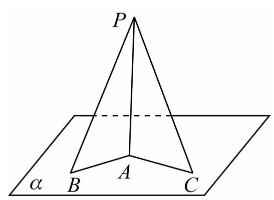

图 6-21

3. 如图 6-22 所示，$PA\perp\alpha$，PC 是平面 α 的斜线，若 $PC=6$，$AC=3$，求 PC 与平面 α 所成的角（用角度表示）.

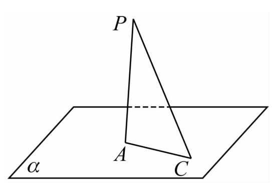

图 6-22

4. 如图 6-23 所示，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，连接 A_1C.

(1)求下列直线与平面所成角的大小.

①AB 与平面 $ABCD$；

②A_1B_1 与平面 $ABCD$；

③A_1D_1 与平面 $ABCD$；

④B_1C_1 与平面 ABB_1A_1.

(2)在图中画出下列各对直线与平面所成的角.

①A_1C 与平面 $ABCD$；

②A_1C 与平面 BCC_1B_1.

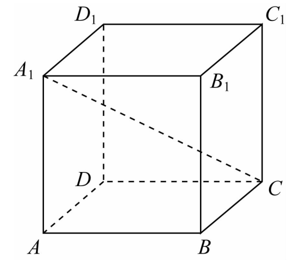

图 6-23

6.3.3 平面与平面所成的角

知识梳理

1. 半平面

平面内的一条直线把平面分成两部分，其中的每部分叫作半平面.

2. 二面角

如图 6-24 所示，从一条直线出发的两个半平面所组成的图形叫作二面角，这条直线叫作二面角的棱，这两个半平面叫作二面角的面. 图中所示的二面角可记为 α-l-β.

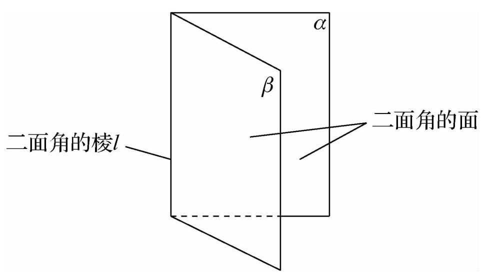

图 6-24

3. 二面角的平面角

在二面角的棱上任取一点，分别在二面角的两个半平面内作与棱垂直的射线，以这两条射线为边的最小正角叫作二面角的平面角. 如图 6-25 所示.

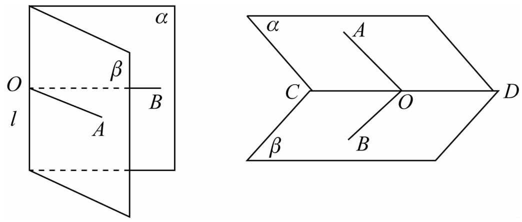

图 6-25

4. 二面角的大小

二面角的大小用它的平面角来度量，当二面角的两个半平面重合时，二面角为 0°角；当二面角的两个半平面在一个水平面上时，二面角为平角，即 180°角. 当二面角的平面角为 90°时，二面角可称为直二面角. 二面角的取值范围为 [0°,180°].

典例精解

例 如图 6-26 所示，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，平面 A_1BCD_1 与平面 $ABCD$ 所成的二面角的平面角可以是________或________，其大小是________.

解析 $\angle ABA_1$；$\angle DCD_1$；45°.

技巧点拨 根据二面角的概念观察正方体易得.

【变式训练】 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，平面 BCD_1A_1 与平面 BCC_1B_1 所成的角为（　　）.

A. 30°　　B. 60°

C. 45°　　D. 90°

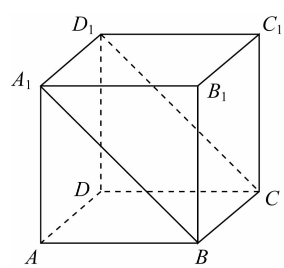

图 6-26

自我检测

1. 选择题.

(1)二面角的取值范围是（　　）.

A. (0°,90°)　　B. [0°,90°]

C. (0°,180°)　　D. [0°,180°]

(2)下列说法中,正确的是( ).

A. 二面角是两个平面所组成的图形

B. 二面角是指角的两边分别在两个平面内的角

C. 二面角的平面角的两条边与二面角的棱垂直

D. 二面角一定不是钝角

(3)正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,二面角 C_1-AB-C 的大小是( ).

A. $30°$ B. $45°$ C. $60°$ D. $90°$

2. 填空题.

(1)已知二面角 α-l-β 是直二面角,若点 P 到平面 α,β 的距离分别为 3 和 4,则点 P 到棱 l 的距离是____________.

(2)如图 6-27 所示,在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,直线 AB 与 D_1C_1 所成的角的大小是____________;DC 与 A_1B 所成的角的大小是____________;直线 A_1B 与平面 $ABCD$ 所成的角的大小是____________;直线 A_1C 在平面 $ABCD$ 的射影是____________; ____________是二面角 A_1-BC-B_1 的一个平面角;二面角 $A-BC-B_1$ 的大小是____________.

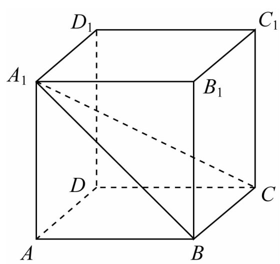

图 6-27

3. 如图 6-28 所示,作出二面角 α-l-β 的两个平面角$\angle AOB$ 与$\angle A_1O_1B_1$. 判断平面 AOB 与平面 $A_1O_1B_1$ 是否平行,并证明.

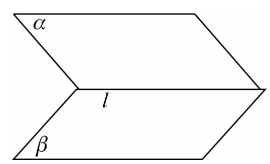

图 6-28

4. 如图 6-29 所示，将如图 a 的等腰直角三角形 ABC 以斜边 AB 上的高 CD 为棱折成直二面角(如图 b)，求$\angle ADB$ 的大小.

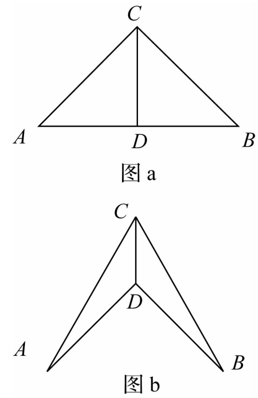

图 6-29

6.4 直线与直线、直线与平面、平面与平面垂直的判定和性质

6.4.1 直线与直线垂直的判定和性质

知识梳理

当空间两条异面直线 m,n 所成的角为 90°时，称这两条异面直线互相垂直，记作 $m\perp n$.

典例精解

例 如图 6-30 所示，已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$.

(1)哪些棱所在的直线与直线 A_1B 是异面直线?

(2)直线 A_1B 和 CC_1 的夹角是多少?

(3)哪些棱所在的直线与直线 AA_1 垂直?

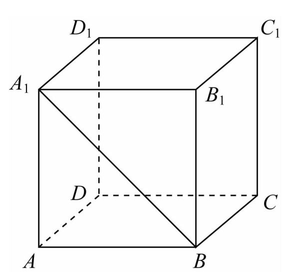

图 6-30

解 (1)由异面直线的定义可知，棱 $AD,DC,CC_1,DD_1,D_1C_1,B_1C_1$ 所在直线分别与直线 A_1B 是异面直线；

(2)由 $BB_1 \parallel CC_1$ 可得，$\angle B_1BA_1$ 为异面直线 A_1B 和 CC_1 的夹角，$\angle B_1BA_1 = 45°$；

(3)直线 $AB, BC, CD, DA, A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1$ 分别与直线 AA_1 垂直.

技巧点拨　根据异面直线的定义和线线垂直的判定定理可得.

【变式训练】　如图 6-31 所示，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，下列直线与 B_1D_1 垂直的是(　　).

A. BC_1

B. A_1D

C. AC

D. BC

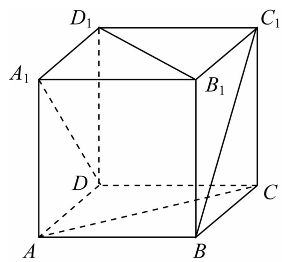

图 6-31

自我检测

1. 空间内垂直于同一直线的两条直线(　　).

A. 平行　　B. 相交

C. 异面　　D. 平行、相交或异面

2. 过空间内不在直线 l 上的一点，与直线 l 垂直的直线有____________条.

3. 如图 6-32 所示，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的各棱所在的直线中.

(1)与直线 AB 垂直的直线有多少条?

(2)与直线 AB 异面且垂直的直线有多少条?

(3)与直线 AB 和 D_1A_1 都垂直的直线有多少条?

(4)写出与直线 AB 和 D_1A_1 都垂直且相交的直线.

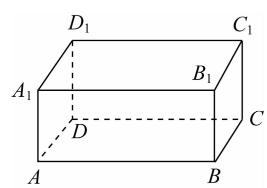

图 6-32

6.4.2 直线与平面垂直的判定和性质

知识梳理

1. 直线和平面垂直的概念

如果一条直线和一个平面内的任何一条直线都垂直，那么就说这条直线和

这个平面垂直，这条直线叫作平面的垂线，直线与平面的交点叫作垂足，这个平面叫作直线的垂面. 垂线上的任意一点与垂足之间的连线叫作这个点到这个平面的垂线段，垂线段的长度叫作这个点到这个平面的距离.

画直线和平面垂直时，通常把直线画成和表示平面的平行四边形的一条边垂直. 如图 6-33 所示，直线 l 与平面 α 互相垂直，记作 $l\perp\alpha$，垂足为点 O.

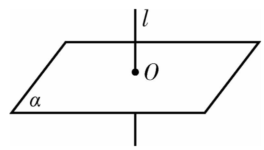

图 6-33

2. 直线与平面垂直的判定定理

如果一条直线与一个平面内的两条相交直线都垂直，那么这条直线垂直于这个平面.

符号表示：若 $m\subset\alpha$，$n\subset\alpha$，$m\cap n=O$，且 $l\perp m$，$l\perp n$，则 $l\perp\alpha$.

3. 直线与平面垂直的性质定理

如果两条直线都垂直于同一个平面，那么这两条直线互相平行.

符号表示：若 $a\perp\alpha$，$b\perp\alpha$，则 $a/\!/b$.

4. 由一条直线和一个平面互相垂直可得出的结论

(1)如果一条直线垂直于一个平面，那么它和平面内的任意一条直线都互相垂直；

(2)如果两条平行直线中的一条垂直于一个平面，那么另一条也垂直于这个平面.

典例精解

例 如图 6-34 所示，已知四面体 $ABCD$，$AB=AC$，$DB=DC$，点 M 为 BC 的中点.

求证：$BC\perp$ 平面 AMD.

证明 因为 $AB=AC$，$DB=DC$，M 为 BC 的中点，

所以 $AM\perp BC$，$DM\perp BC$.

又因为 $AM\cap DM=M$，

所以 $BC\perp$ 平面 AMD.

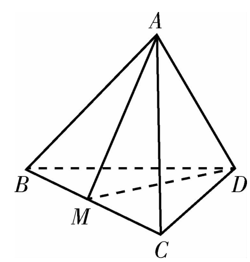

图 6-34

技巧点拨 根据直线和平面垂直的判定定理可得.

【变式训练】 如图6-35所示,已知在平面α内的直角$\triangle ABC$中,点E是其斜边AC的中点,点P为平面α外的一点,且$PA=PB=PC$.

求证:$PE\perp\alpha$.

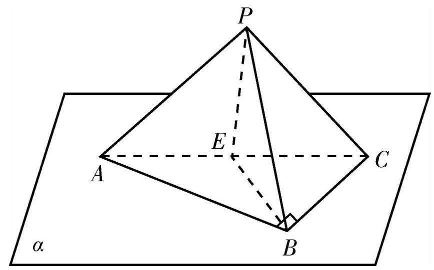

图6-35

自我检测

1. 选择题.

(1)空间内垂直于同一平面的两条直线(　　).

A. 平行　　　　B. 相交

C. 异面　　　　D. 平行、相交或异面

(2)下列不能判断直线l与平面α垂直的是(　　).

A. 直线l与平面α内的所有直线都垂直

B. 直线l与平面α内的任意直线都垂直

C. 直线l与平面α内的两条相交直线都垂直

D. 直线l与平面α内的无数条直线都垂直

(3)如果直线l与平面α内两条相交直线都垂直,那么直线l与平面α的位置关系是(　　).

A. 平行　　　　B. 垂直

C. 斜交　　　　D. 直线在平面内

(4)垂直于三角形两边的直线与三角形所在平面的位置关系是(　　).

A. 平行　　　　B. 垂直

C. 斜交　　　　D. 直线在平面内

(5)已知直线PA垂直于矩形$ABCD$所在的平面,下列结论中不正确的是(　　).

A. $PA\perp BC$　　B. $PA\perp CD$　　C. $PD\perp BD$　　D. $PD\perp CD$

2. 如图 6-36 所示，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，找出符合下列条件的所有直线或平面.

(1)与 AB 垂直的直线有____________；

(2)与 AC 垂直的直线有____________；

(3)与 AB 垂直的平面有____________.

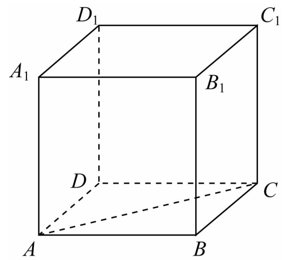

图 6-36

3. 如图 6-37 所示，已知正方形 $ABCD$ 和矩形 $ACEF$ 所在的平面互相垂直，$AB=\sqrt{2}$，$AF=1$，M 是线段 EF 的中点.

求证：$AM\perp$平面 BDF.

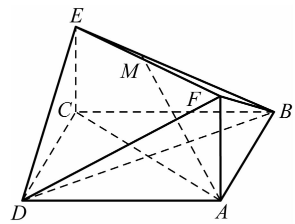

图 6-37

4. 如图 6-38 所示，四边形 $ABCD$ 是正方形，$PD\perp$平面 $ABCD$，连接 PA，PB，PC. 请写出图中所有的直角三角形，并说明理由.

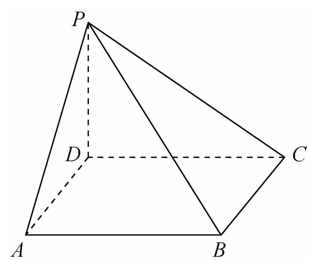

图 6-38

6.4.3 平面与平面垂直的判定和性质

知识梳理

1. 两平面垂直

两个平面相交，如果它们所成的二面角是直二面角，就说这两个平面互相垂

直. 平面 α 与平面 β 垂直，记作 $\alpha\perp\beta$.

2. 平面与平面垂直的判定定理

如果一个平面经过另一个平面的一条垂线，那么这两个平面互相垂直.

符号表示：若 $l\perp\alpha$，$l\subset\beta$，则 $\alpha\perp\beta$.

3. 平面与平面垂直的性质定理

如果两个平面互相垂直，那么在一个平面内垂直于它们交线的直线垂直于另一个平面.

符号表示：若 $\alpha\perp\beta$，$\alpha\cap\beta=l$，$m\subset\alpha$，且 $m\perp l$，则 $m\perp\beta$.

典例精解

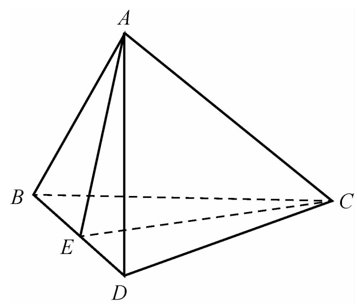

图 6-39

例　如图 6-39 所示，$AB=AD$，$\angle ABC=\angle ADC=90^\circ$，$E$ 为 BD 的中点，求证：平面 $AEC\perp$ 平面 ABD.

证明　因为 $AB=AD$，$\angle ABC=\angle ADC=90^\circ$，$AC=AC$，

所以$\triangle ABC\cong\triangle ADC$，

所以$BC=DC$.

又因为 $AB=AD$，E 为 BD 的中点，

所以 $BD\perp CE$，$BD\perp AE$.

因为 CE，AE 是平面 AEC 内的两条相交直线，

所以 $BD\perp$ 平面 AEC.

又因为 $BD\subset$ 平面 ABD，

所以平面 $AEC\perp$ 平面 ABD.

技巧点拨　要证明面面垂直，先证明线线垂直，然后得线面垂直，最后证明面面垂直. 熟练掌握线线垂直与线面垂直和面面垂直之间的转化，即线线垂直⇔线面垂直⇔面面垂直.

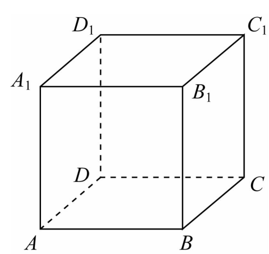

图 6-40

【变式训练】　如图 6-40 所示，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，找出符合下列条件的所有平面和直线.

(1)与平面 $ABCD$ 垂直的平面有____________；

(2)与平面 BCC_1B_1 垂直的直线有____________.

自我检测

1. 选择题.

(1)若平面α与平面β互相垂直,则(　　).

A. 平面α中的任意一条直线垂直于平面β

B. 平面α中有且只有一条直线垂直于平面β

C. 平行于平面α的直线垂直于平面β

D. 平面α内垂直于交线的直线必垂直于平面β

(2)下列命题中,正确的是(　　).

A. 过平面外一点作这个平面的垂直平面是唯一的

B. 过直线外一点作这条直线的垂线是唯一的

C. 过平面的一条斜线作这个平面的垂直平面是唯一的

D. 过直线外一点作这条直线的平行平面是唯一的

(3)设a,b表示两条直线,α表示平面,下列命题中正确的是(　　).

①若$a\perp\alpha$,$b/\!/\alpha$,则$a\perp b$;　　②若$a\perp\alpha$,$a\perp b$,则$b/\!/\alpha$;

③若$a/\!/\alpha$,$a\perp b$,则$b\perp\alpha$;　　④若$a\perp\alpha$,$b/\!/a$,则$b\perp\alpha$.

A. ①②　　B. ②③　　C. ③④　　D. ①④

2. 填空题.

(1)观察教室的墙角得到:若三个平面两两相交且相互垂直,则它们的三条交线__________.

(2)若直线$m\perp$平面α,平面β经过直线m,则α __________ β.

3. 如图6-41所示,在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中,E,F分别是线段BD,BC的中点. 求证:平面$EFB_1\perp$平面BCC_1B_1.

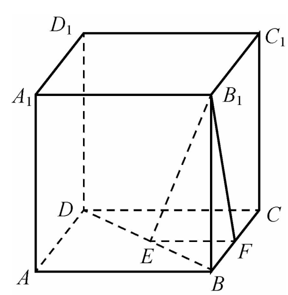

图 6-41

4. 如图 6-42 所示，在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=2$，$BB_1=BC=1$，E 为 D_1C_1 的中点，连接 ED，EC，EB 和 DB. 求证：平面 $EDB\perp$ 平面 EBC.

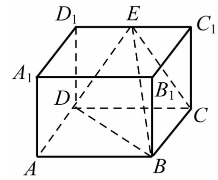

图 6-42

第 6 单元检测

1. 选择题.

(1)若$\angle A$与$\angle B$的两边分别平行，$\angle A=50°$，则$\angle B=$(　　).

A. 40°　　B. 50°　　C. 40°或 140°　　D. 50°或 130°

(2)如果一个平面与两个平行平面相交，那么它们的交线(　　).

A. 平行　　B. 相交

C. 异面　　D. 以上都有可能

(3)如图 6-43 所示的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，异面直线 A_1B 与 B_1C 所成的角是(　　).

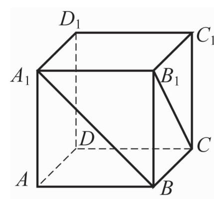

图 6-43

A. 30°　　B. 45°

C. 60°　　D. 90°

(4)在下列关于直线 m，l 和平面 α，β 的命题中，真命题是(　　).

A. 若 $l\subset\beta$，且 $\alpha\perp\beta$，则 $l\perp\alpha$

B. 若 $l\perp\beta$，且 $\alpha/\!/\beta$，则 $l\perp\alpha$

C. 若 $l\perp\beta$，且 $\alpha\perp\beta$，则 $l/\!/\alpha$

D. 若 $\alpha\cap\beta=m$，且 $l/\!/m$，则 $l/\!/\alpha$

(5)如图 6-44 所示，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 M，N 分别为 AA_1，A_1B_1 的中点，则直线 MN 与直线 CC_1 所成的角等于(　　).

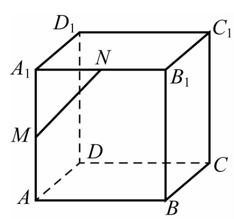

图 6-44

A. 30°　　B. 45°

C. 60°　　D. 90°

2. 填空题.

(1)在 30°的二面角的一个半平面内有一点，它到另一个半平面的距离是 8，

则这点到棱的距离等于__________.

(2)设有不同的直线 a,b,c 和不同的平面 α,β,γ，已知如下命题：①若 $a/\!/b$，$b/\!/c$，则 $a/\!/c$；②若 $\alpha/\!/\beta,\beta/\!/\gamma$，则 $\alpha/\!/\gamma$；③若 $a/\!/\alpha,b/\!/\alpha$，则 $a/\!/b$；④若 $\alpha/\!/a,\beta/\!/a$，则 $\alpha/\!/\beta$. 其中正确命题的序号是__________.

(3)已知平面 $\alpha/\!/\beta/\!/\gamma$，两条直线 l,m 分别与 α,β,γ 相交于 A,B,C 与 D,E,F. 已知 $AB=6$，$\dfrac{DE}{DF}=\dfrac{2}{5}$，则 $AC=$__________.

(4)已知等腰 Rt△ABC 的腰长为 2，现将△ABC 沿底边 BC 上的中线 AD 折成一个直二面角，则此时∠BAC 的大小为__________.

3. 如图 6-45 所示，长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=AD=4$，$AA_1=3$.

(1)求证：$B_1C/\!/$平面 A_1BD；

(2)求三棱锥 A_1-BCD 的体积.

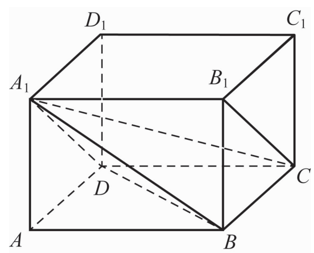

图 6-45

4. 如图 6-46 所示，四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 为矩形，且 $PA=AD=1$，$AB=2$，∠$PAB=120°$，∠$PBC=90°$.

(1)求证：平面 $PAD\perp$平面 PAB；

(2)求三棱锥 $D-PAC$ 的体积.

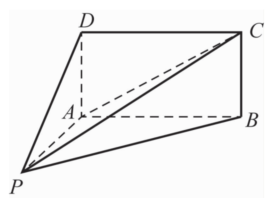

图 6-46

5. 如图 6-47 所示，正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 底面边长是 2，侧棱长是$\sqrt{3}$，D 是 AC 的中点.

(1)求证：$B_1C/\!/$平面 A_1BD；

(2)求二面角 A_1-BD-A 的大小；

(3)求直线 AB_1 与平面 A_1BD 所成角的正弦值.

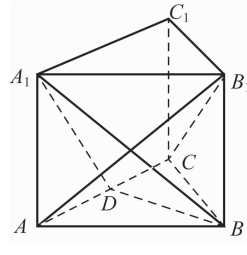

图 6-47