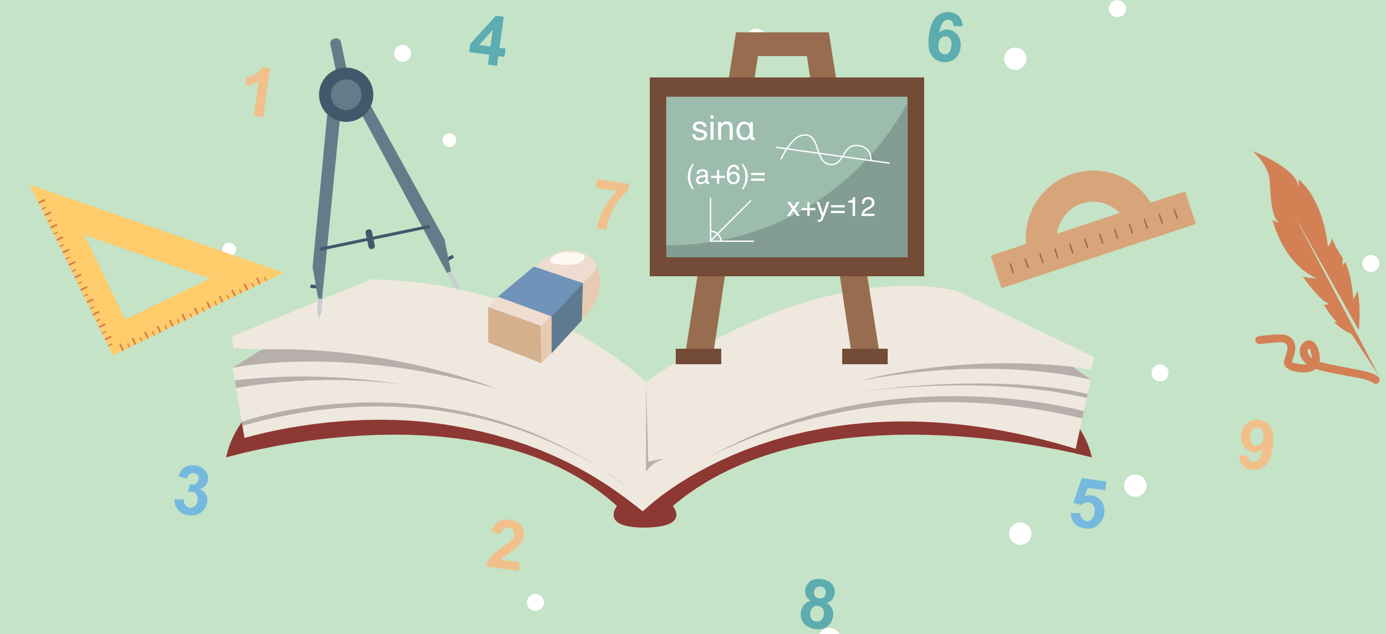
职教高考文化基础课配套学习用书

数学
导学同步练

拓展模块 1 下

主编　赵尚洪



哈尔滨工程大学出版社
Harbin Engineering University Press

职教高考文化基础课配套学习用书
数学导学同步练（拓展模块 1 · 下）
主编　赵尚洪
哈尔滨工程大学出版社
Harbin Engineering University Press

数学导学同步练
拓展模块 1 下

选题策划：胡志平
责任编辑：于海燕
封面设计：刘文东

ISBN 978-7-5661-4209-2

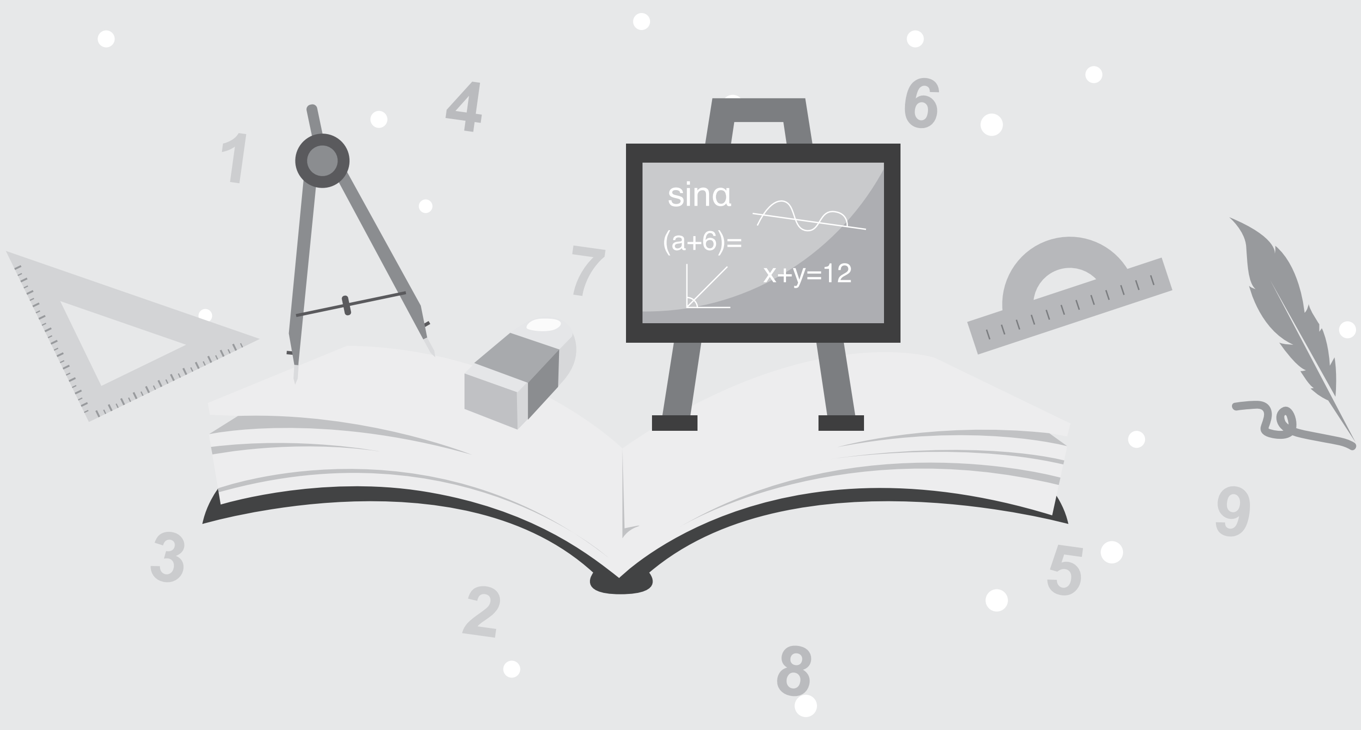
定价：39.80元

职教高考文化基础课配套学习用书

数学
导学同步练

拓展模块 1 下

主　编　赵尚洪
副主编　钱　丹



哈尔滨工程大学出版社
Harbin Engineering University Press

前言

PREFACE

职业教育是培养技术技能人才，促进就业创业创新，推动中国制造和服务上水平的重要基础。而中等职业教育的基础地位是国家经济发展的需要，是国家社会稳定的需要。这就要求中等职业学校必须与时俱进，不断进行教育教学改革。本书以深化学校教育教学改革、提高课堂教学实效性为目标，以细化解读课程标准为基础，充分落实学生的主体地位，从而激发学生的自信，挖掘学生的潜力。

本书是与中等职业教育课程改革规划新教材《数学 拓展模块一（下册）》相配套的学生指导用书，采用“自主、合作、探究”的新理念，构建适合现代职业学校教育教学协调发展的“现代课堂”模式。

课前——知识·梳理：通过预习，培养学生的阅读能力、理解能力及总结能力。

课中——练习·探究：通过当堂检测或归纳探究，引导学生学习。

当堂检测：通过习题训练，培养学生分析问题、解决问题的能力；通过课堂展示，既能培养学生的语言表达能力，又能提高学生的板书设计及书写能力；通过当堂纠错，既能培养学生发现问题的能力，又能发现学生自主学习中存在的问题或认知缺陷。

归纳探究：通过对新知识的探究，既能激发学生的求知欲和发散性思维，又能培养学生的创新意识；通过小组合作，既能培养学生的团队合作精神，又能提高学生的竞争意识。

课后——巩固·提升：通过自我检测，使学生及时做到查缺补漏，确保当堂内容当堂清。

课外——拓展·阅读：通过阅读，使学生丰富自己的课外知识。

测试卷：通过测试，既能强化学生对相应章节知识之间关系的认识，又能培养学生解决综合问题的能力，还能培养学生的数学思想及解题技巧。

由于编者学术水平有限，书中难免存在不足或错误之处，敬请读者提出宝贵的意见和建议。

编　者

目录

CONTENTS

第 7 章

数　　列

7.1 数列的概念

学习目标

1. 了解数列的概念.
2. 理解数列的通项公式.

课前——知识·梳理

1. 数列的基本概念

按照一定次序排成的一列数称为数列.数列中的每一个数称为数列的项.数列的一般形式可以写作 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots(n\in\mathbf{N}^*)$,记作$\{a_n\}$,其中 a_1 称为数列的首项,a_n 称为数列的第 n 项,n 称为项数.

2. 有穷数列、无穷数列

项数有限的数列称为有穷数列,项数无限的数列称为无穷数列,所有项均为同一个数的数列称为常数列.

3. 通项公式

一般地,当一个数列的第 n 项 a_n 与项数 n 之间的关系可以用一个式子来表示时,这个式子就称为这个数列的通项公式.

课中——练习·探究

当堂检测

1. 判断下列数列是有穷数列还是无穷数列.

(1)1,2,3,4,5;

(2)5,10,15,20,…;

(3)22,24,26,…,68,70;

(4)−1,1,−1,1,….

2. 设数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\frac{n}{n+1}$，写出数列$\{a_n\}$的前5项.

3. 观察下列数列的前4项，总结规律并写出该数列的一个通项公式.

(1)2，4，6，8，…；

(2)-1，2，-3，4，…；

(3)2，2，2，2，…；

(4)$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots$.

4. 设数列$\{a_n\}$的通项公式是$a_n=3n+2$，判断17是不是该数列的项，如果是，请指出是第几项.

归纳探究

小组讨论并回答下列问题：

(1)是否所有的数列都有通项公式?

(2)如果一个数列有通项公式,那么它的通项公式是否只有一个?

课后——巩固·提升

一、选择题

1. 已知数列$\{a_n\}$的通项公式$a_n=3n-7$,则它的首项为 ( )

A. -7 B. -4 C. -1 D. 2

2. 数列$-2,1,4,7,\cdots$的一个通项公式为 ( )

A. $a_n=n-3$ B. $a_n=3n-5$

C. $a_n=n+3$ D. $a_n=3(n-2)$

3. 在数列$\{a_n\}$中,若$a_n=(-1)^{n+1}n$,则$a_{10}=$ ( )

A. 9 B. -9 C. 10 D. -10

4. 若数列$\{a_n\}$的通项公式$a_n=n(n+1)$,则它的第4项是 ( )

A. 12 B. 20 C. 21 D. 30

5. 在数列$\{a_n\}$中,若$a_n=n(n-1)$,则下列选项中,是数列$\{a_n\}$的项的是 ( )

A. 55 B. 56 C. 57 D. 58

6. 数列$1,-1,1,-1,\cdots$的一个通项公式是 ( )

A. $a_n=(-1)^n$ B. $a_n=(-1)^{n+2}$

C. $a_n=(-1)^{n+4}$ D. $a_n=(-1)^{n+1}$

二、填空题

7. 1,2,3,4,5与5,4,3,2,1构成的数列________(填“是”或“不是”)同一个数列;构成的集合________(填“是”或“不是”)同一个集合.

8. 数列$-1,-3,-5,-7,\cdots$的一个通项公式是$a_n=$________.

9. 若数列$\{a_n\}$的通项公式$a_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$,则$a_4+a_5=$________.

10. 若数列$\{a_n\}$的通项公式$a_n=2n+3$,则$a_{n+1}=$________.

11. 在数列$\{a_n\}$中，已知$a_2=125$，$a_{n+1}=\frac{a_n}{5}$，则$a_4=$____________.

三、解答题

12. 已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\frac{(n-1)^3}{2}$，求数列的前4项.

13. 已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=n^2+n-1$，判断11是不是数列中的项. 如果是，请指出是第几项.

14. 已知在数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，且$a_{n+1}=a_n+2$. 请写出该数列的前4项，并写出数列$\{a_n\}$的一个通项公式.

15. 已知在数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，且$a_{n+1}=2a_n$. 请写出数列的前4项，并写出数列$\{a_n\}$的一个通项公式.

7.2 等差数列

7.2.1 等差数列的概念

学习目标

1. 了解等差数列的概念.
2. 掌握等差数列的通项公式.

课前——知识·梳理

1. 等差数列

一般地,当一个数列从第二项起,每一项与它前一项的差都等于同一个常数时,就称这个数列为等差数列.这个常数称为等差数列的公差,常用字母 d 来表示.

2. 等差数列的通项公式

若数列$\{a_n\}$是首项为 a_1、公差为 d 的等差数列,则它的通项公式为 $a_n=a_1+(n-1)d$.

3. 等差中项

一般地,当三个数 a,A,b 成等差数列时,A 称为 a 和 b 的等差中项,即$A=\dfrac{a+b}{2}$.

课中——练习·探究

当堂检测

1. 判断下列数列是不是等差数列.如果是,请求出数列的公差及通项公式.

(1)$-1,1,-1,1,-1,\cdots$;

(2)$-2,0,2,4,6,\cdots$;

(3)$5,10,15,20,\cdots$;

(4)$3,3,3,3,\cdots$;

(5)$1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{5},\cdots$.

2. 已知在等差数列$\{a_n\}$中，$a_{10}=28$，$d=3$，求首项a_1.

3. 在2和18之间插入三个数，使这五个数成等差数列，求插入的这三个数.

归纳探究

若数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=An+B$(A，B是常数，$n\in\mathbf{N}^*$)，则此数列是不是等差数列？如果是，求其首项和公差.

课后——巩固·提升

一、选择题

1. 数列0，2，4，6，…的通项公式是$a_n=$ (　　)

A. $2n$　　B. $2n+2$　　C. $2n-2$　　D. $2n+1$

2. 在等差数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，$d=3$，则它的第5项是 (　　)

A. 10　　B. 15　　C. 14　　D. 17

3. 若数列$\{a_n\}$的通项公式是$a_n=4n-1$,则此数列是 ( )

A. 公差为-1的等差数列 B. 公差为4的等差数列

C. 首项为-1的等差数列 D. 首项为4的等差数列

4. 下列选项中,不是等差数列通项公式的是 ( )

A. $a_n=3n+5$ B. $a_n=(-1)^n n$

C. $a_n=2$ D. $a_n=-2n+3$

5. 在等差数列$\{a_n\}$中,若$a_2=3$,$a_5=14$,则$a_3+a_4=$ ( )

A. 17 B. 15 C. 10 D. 7

二、填空题

6. 在等差数列$\{a_n\}$中,

(1)若$a_3=2$,$d=3$,则$a_1=$____________;

(2)若$a_8=12$,$d=-2$,则$a_{10}=$____________;

(3)若$a_3=-2$,$a_{10}=19$,则$d=$____________;

(4)若$a_1=5$,$d=5$,$a_n=25$,则$n=$____________.

7. 数列1,4,7,10,…的通项公式是$a_n=$____________.

8. 4和8的等差中项是____________.

9. 在-4和12之间插入三个数使这五个数成等差数列,则这三个数分别是____________.

三、解答题

10. 在等差数列$\{a_n\}$中,$a_6=-8$,$a_{10}=12$,求公差d和a_{20}.

11. 判断83是不是等差数列-1,3,7,11,…中的项,如果是,请指出是第几项.

12. 在等差数列$\{a_n\}$中，$a_6+a_{10}=-16$，$a_5=-3$，求a_{11}.

13. 小明、小明的爸爸和小明的爷爷三人的年龄恰好构成一个等差数列，他们三人的年龄之和为120岁，爷爷的年龄比小明的年龄的4倍还多5岁，求他们祖孙三人的年龄.

7.2.2　等差数列前 n 项和公式

学习目标

1. 了解等差数列前n项和公式的推导过程.
2. 掌握等差数列的前n项和公式.

课前——知识·梳理

1. 数列的前n项和

将数列$\{a_n\}$从第1项起到第n项为止的各项之和，称为数列$\{a_n\}$的前n项和，记作S_n，即$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$.

2. 等差数列的前n项和公式

(1)已知a_1和a_n，则$S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$；

(2)已知a_1和d，则$S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d$.

课中——练习·探究

当堂检测

1. 计算 $1+2+3+\cdots+99$ 的值.

2. 已知在等差数列$\{a_n\}$中,$a_1=8$,$a_{10}=26$,求 S_{10}.

3. 已知在等差数列$\{a_n\}$中,$a_1=4$,$d=3$,求 S_{20}.

归纳探究

a_n 与 S_n 和 S_{n-1} 有什么关系?

课后——巩固·提升

一、选择题

1. 若数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 $S_n=3+2^n$，则 $a_6=$ （　　）

A. 8　　B. 16

C. 32　　D. 64

2. 前 n 个正整数的和是 （　　）

A. $\frac{n(n+1)}{2}$　　B. $n(n+1)$

C. $\frac{n(n-1)}{2}$　　D. n^2

3. 在等差数列$\{a_n\}$中，$S_7=70$，则 $a_4=$ （　　）

A. 8　　B. 9

C. 10　　D. 20

4. 在等差数列$\{a_n\}$中，$a_2+a_4=36$，则数列的前 5 项和为 （　　）

A. 108　　B. 90

C. 72　　D. 24

5. 已知数列$\{a_n\}$为等差数列，且 $a_1=1$，$S_{10}=100$，则公差 d 的值为 （　　）

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

6. 已知数列$\{a_n\}$为等差数列，且 $3a_4+a_8=36$，则$\{a_n\}$的前 9 项的和 $S_9=$ （　　）

A. 9　　B. 17

C. 36　　D. 81

二、填空题

7. 在等差数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，$a_6=8$，则 $S_6=$____________.

8. 在等差数列$\{a_n\}$中，$a_3=2$，$a_5=8$，则 $S_7=$____________.

9. 在等差数列$\{a_n\}$中，$a_1=-3$，$d=2$，则 $S_{10}=$____________.

10. 已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=3$ 且 $a_{n+1}=a_n+2$，则 $S_8=$____________.

三、解答题

11. 已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和$S_n=n^2(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2)证明:数列$\{a_n\}$是等差数列.

12. 等差数列$\{a_n\}$中,$a_3+a_7-a_{10}=-10$,$a_4+a_{11}=10$,求 S_{13}.

13. 已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n,若 $S_7=49$,$S_{15}=225$,求 S_{20}.

7.3 等 比 数 列

7.3.1 等比数列的概念

学习目标

1. 了解等比数列的概念.
2. 掌握等比数列的通项公式.

课前——知识·梳理

1. 等比数列

一般地，当一个数列$\{a_n\}$从第二项起，每一项与它前一项的比都等于同一个非零常数时，就称这个数列为等比数列. 这个常数称为等比数列的公比，通常用字母 q 来表示.

2. 等比数列的通项公式

若数列$\{a_n\}$是首项为 a_1、公比为 q 的等比数列，则它的通项公式为 $a_n=a_1q^{n-1}$.

3. 等比中项

一般地，当三个数 a,G,b 成等比数列时，称 G 为 a 和 b 的等比中项，即$G^2=ab$ 或 $G=\pm\sqrt{ab}$.

课中——练习·探究

当堂检测

1. 判断下列数列是不是等比数列，如果是，请求出数列的公比及通项公式.

(1)2,4,6,8,…；　　(2)2,4,8,16,…；

(3)2,2,2,2,…；　　(4)−1,1,−1,1,−1,…；

(5)1,5,10,50,….

2. 已知在等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，$q=-1$，求a_n及a_{10}.

3. 在1和16之间插入三个数，使这五个数成等比数列，求插入的这三个数.

4. 已知在等比数列$\{a_n\}$中，$a_2=4$，$a_4=16$，求a_6.

课后——巩固·提升

一、选择题

1. 若数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=3\cdot 2^n$，则该数列是　（　　）

A. 公差为3的等差数列　　B. 公差为2的等差数列

C. 公比为3的等比数列　　D. 公比为2的等比数列

2. 若等比数列$\{a_n\}$的前3项是$-1,2,-4$，则$a_7=$　（　　）

A. 32　　B. -32

C. 64　　D. -64

3. 在等比数列$\{a_n\}$中，$a_2=4$，$a_5=9$，则它的第8项是　（　　）

A. 36　　B. 6

C. $\frac{81}{4}$　　D. $\frac{4}{81}$

4. “$b^2=ac$”是“a,b,c成等比数列”的　（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

5. 在等比数列$\{a_n\}$中，若$a_1=1$，$a_3=\frac{1}{9}$，则$a_2=$ （　　）

A. 3或-3　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $-\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{3}$或$-\frac{1}{3}$

6. 在等比数列$\{a_n\}$中，$a_5\cdot a_{14}=5$，则$a_8\cdot a_9\cdot a_{10}\cdot a_{11}=$ （　　）

A. 10　　B. 25　　C. 50　　D. 75

二、填空题

7. 在等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=-2$，$q=3$，则$a_3=$____________.

8. 在等比数列$\{a_n\}$中，$a_4=-3$，$q=-1$，则$a_{10}=$____________.

9. 在等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=-1$，$a_4=-27$，则$q=$____________.

10. 若1，$x+1$，9成等比数列，则$x=$____________.

三、解答题

11. 已知在等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，$q=-3$，求a_n及a_3.

12. 已知三个数成等比数列，且它们的积是8，公比是2，求这三个数.

13. 已知数列$\{a_n\}$为等比数列，其中$a_3=2$，$a_2+a_4=\frac{20}{3}$，求$\{a_n\}$的通项公式.

14. 有四个数,其中前三个数成等比数列,其积为216,后三个数成等差数列,其和为36,求这四个数.

7.3.2 等比数列前 n 项和公式

学习目标

1. 了解等比数列前 n 项和公式的推导过程.
2. 掌握等比数列的前 n 项和公式.

课前——知识·梳理

等比数列的前 n 项和公式:

(1)当 $q=1$ 时,$S_n=na_1$;

(2)当 $q\neq1$ 时,$S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\dfrac{a_1-a_nq}{1-q}$.

课中——练习·探究

当堂检测

1. 若在等比数列$\{a_n\}$中,$a_1=3$,$q=1$,则 $S_n=$____________,$S_{10}=$____________.

2. 若在等比数列$\{a_n\}$中,$a_1=3$,$q=-1$,则 $S_n=$____________,$S_4=$____________,$S_5=$____________,$S_6=$____________,$S_7=$____________.

3. 若等比数列$\{a_n\}$的首项 $a_1=a$,公比 $q=-1$,则当 n 为偶数时,$S_n=$____________;当 n 为奇数时,$S_n=$____________.

4. 计算 $1+2+4+\cdots+64$ 的值.

5. 求数列$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{2}$，1，2，… 的前 n 项和 S_n 及 S_8 的值.

归纳探究

若数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 $S_n=3\cdot 2^n-3$，请问该数列是不是等比数列？如何证明？

课后——巩固·提升

一、选择题

1. 数列-2，-2，-2，…的前 10 项和为 （　　）

A. -2　　B. 0　　C. -18　　D. -20

2. 在等比数列$\{a_n\}$中，若 $a_1=1$，$q=2$，则该数列的前 9 项和为 （　　）

A. 512　　B. 511　　C. 256　　D. 255

3. 若在等比数列$\{a_n\}$中，$q=4$，$S_3=21$，则该数列的通项公式为 $a_n=$ （　　）

A. 4^{n-1}　　B. 4^n　　C. 3^n　　D. 3^{n-1}

4. 设 S_n 为等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和，若 $2a_2+a_3=0$，则$\frac{S_5}{S_2}=$ （　　）

A. 11　　B. 5　　C. -8　　D. -11

二、填空题

5. 若在等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=\frac{1}{2}$，$q=2$，则 $S_5=$__________.

6. 若数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n$（$n\in\mathbf{N}^*$），则 $a_5=$__________，前 8 项和 $S_8=$__________.

7. 若在等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，$S_3=6$，则 $q=$__________.

三、解答题

8. 已知数列$\{a_n\}$的前n项和为$S_n=2^{n+1}-2$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2)证明:数列$\{a_n\}$是等比数列.

9. 已知在等比数列$\{a_n\}$中,$a_1=1$,$a_n=32$,$S_n=63$,求q和n.

10. 已知在等比数列$\{a_n\}$中,$a_1-a_5=-\frac{15}{2}$,$S_4=-5$,求a_4.

11. 设$\{a_n\}$是公比大于1的等比数列,S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和.已知$S_3=7$,且$3a_2$是$3+a_1$与$4+a_3$的等差中项,求数列$\{a_n\}$的通项公式.

7.4 等差数列与等比数列的应用

学习目标

初步掌握从实际情境中抽象出等差数列和等比数列模型解决简单实际问题的方法.

课前——知识·梳理

等差数列和等比数列在实际生活中有广泛的应用，有很多实际问题可以转化为数列问题，然后运用数列的知识解决问题.

应用数列知识解决问题的基本步骤：

(1)审题——要读懂题意，弄清楚各量之间的关系；

(2)建模——把实际问题的数值转化为数列中的各数值，分清是等差数列还是等比数列，同时弄清是求哪个量；

(3)求解——求出数列问题的解；

(4)还原——把所求结果还原到实际问题中.

课中——练习·探究

当堂检测

1. 某男子擅长走路，9 天共走了 1 260 里，其中第 1 天、第 4 天、第 7 天所走的路程之和为 390 里. 若从第 2 天起，每天比前一天多走的路程相同，问该男子第 5 天走了多少里？这是我国古代数学专著《九章算术》中的一个问题，请尝试解决.

2. 某职业学校的王亮同学到一家贸易公司实习，恰逢该公司要通过海运出口一批货物，王亮同学随公司负责人到保险公司洽谈货物运输期间的投保事宜，保险公司提供了缴纳保险费的两种方案：

①一次性缴纳 50 万元，可享受 9 折优惠；

②按照航行天数缴纳：第一天缴纳 0.5 元，从第二天起每天缴纳的金额都是其前一天的 2 倍，共需缴纳 20 天.

请通过计算，帮助王亮同学判断哪种方案缴纳的保费较低.

课后——巩固·提升

一、选择题

1. 某工厂总产值月平均增长率为 p，则年平均增长率为 ( )

A. p　　B. $12p$　　C. $(1+p)^{12}$　　D. $(1+p)^{12}-1$

2. 有一个很神秘的地方，那里有很多的雕塑，每个雕塑都是由蝴蝶组成的. 第一个雕塑有 3 只蝴蝶，第二个雕塑有 5 只蝴蝶，第三个雕塑有 7 只蝴蝶，第四个雕塑有 9 只蝴蝶，以后的雕塑按照这样的规律一直延伸到很远的地方，看不到这排雕塑的尽头在哪里，那么，第 102 个雕塑是由多少只蝴蝶组成的呢？ ( )

A. 203 只　　B. 205 只　　C. 207 只　　D. 103 只

3. 某种产品计划每年降低成本 $q\%$，若三年后的成本是 a 元，则现在的成本是 ( )

A. $a^3q\%$元　　B. $a\cdot(q\%)^3$ 元　　C. $a(1-q\%)^3$ 元　　D. $\dfrac{a}{(1-q\%)^3}$元

4. 某人在一年 12 个月中，每月 10 日向银行存入 1 000 元，假设银行的月利率为 5‰（按单利计算），则到第二年的元月 10 日，此项存款一年的利息之和是 ( )

A. $5(1+2+3+\cdots+12)$元

B. $5(1+2+3+\cdots+11)$元

C. $1\,000[1+5‰+(5‰)^2+\cdots+(5‰)^{11}]$元

D. $1\,000[1+5‰+(5‰)^2+\cdots+(5‰)^{12}]$元

5. 某企业 2020 年 12 月份产值是这年 1 月份产值的 p 倍，则该企业 2020 年度的产值月平均的增长率为 （　　）

A. $\sqrt[12]{p}$　　B. $\sqrt[12]{p}-1$　　C. $\sqrt[11]{p}-1$　　D. $\sqrt[11]{p}$

二、填空题

6. 小王每月除去所有日常开支，大约结余 a 元. 小王决定采用零存整取的方式把余钱积蓄起来，每月初存入银行 a 元，存期 1 年(存 12 次)，到期取出本金和利息. 假设一年期零存整取的月利率为 r，每期存款按单利计息. 那么，当小王存款到期时，利息应为__________元.

7. 有这样一道题："有个学生资性好，一部《孟子》三日了，每日添增一倍多，问君每日读多少?"(注:《孟子》全书共 34 685 字，"一倍多"指一倍)，由此诗知该君第二日读了__________字.

三、解答题

8. 某银行设立了教育助学贷款，其中规定一年期以上贷款月均等额还本付息(利息按月以复利计算). 如果贷款 10 000 元，两年还清，月利率为 0.457 5%，那么每月应还多少钱呢?

9. 用分期付款购买价格为 25 万元的住房一套，如果购买时先付 5 万元，以后每年付 2 万元加上欠款利息. 签订购房合同后 1 年付款一次，再过 1 年又付款一次，直到还完后为止，商定年利率为 10%，则第 5 年该付多少元? 购房款全部付清后实际共付多少元?

10. 某公司在一创业园投资72万元建起一座蔬菜加工厂，第一年支出各种经费12万元，以后每年增加4万元，每年销售蔬菜收入50万元，设$f(n)$表示前n年的纯收入. 求从第几年开始获取纯利润？（$f(n)$＝前n年的总收入－前n年的总支出－投资额）

11. 某城市2018年年底人口总数为50万，绿化面积为35万平方米. 假定今后每年人口总数比上一年增加1.5万，每年新增绿化面积是上一年年底绿化面积的5%，并且每年均损失0.1万平方米的绿化面积(不考虑其他因素).

(1)求到哪一年年底，该城市人口总数达到60万(精确到1年)？

(2)假如在人口总数达到60万并保持平稳、不增不减的情况下，到哪一年年底，该城市人均绿化面积达到0.9平方米(精确到1年)？

课外——拓展·阅读

斐波那契数列

1202年，意大利数学家斐波那契(Leonardo Fibonacci，1175—1250)出版了他的《算盘全书》(Liber Abaci). 他在书中提出了一个关于兔子繁殖的问题：

如果一对兔子每月能生1对小兔子(一雄一雌),而每1对小兔子在它出生后的第3个月又能生1对小兔子.假定在不发生死亡的情况下,由1对初生的小兔子开始,50个月后会有多少对兔子?

在第1个月时,只有1对小兔子,过了1个月,那对兔子成熟了,在第3个月时便生下1对小兔子,这时有2对兔子,再过1个月,成熟的兔子再生1对小兔子,而另1对小兔子长大,有3对兔子,如此推算下去,我们可以得到一个表格:

时间/月	初生兔子/对	成熟兔子/对	兔子总数/对
1	1	0	1
2	0	1	1
3	1	1	2
4	1	2	3
5	2	3	5
6	3	5	8
7	5	8	13
8	8	13	21
9	13	21	34
10	21	34	55

由此可知,从第1个月开始,以后每个月的兔子总对数是

$$1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,\cdots.$$

你发现这个数列的规律了吗?

如果用F_n表示第n个月的兔子的总对数,可以看出

$$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}(n>2).$$

这是一个由递推关系给出的数列,称为斐波那契数列.

斐波那契数列是从动物的繁殖问题引出的,但人们在研究它的过程中,发现了许多意想不到的结果.例如,带小花的大向日葵的管状小花排列成两组交错的螺旋,通常顺时针的螺旋有34条,逆时针的螺旋有55条,恰为斐波那契数列的相邻两项,这样的螺旋被称为“斐波那契螺旋”.蒲公英和松塔就是以“斐波那契螺旋”的形式排列种子或鳞片的.再如很多花朵的瓣数恰是斐波那契数列中的数,如梅花5瓣,飞燕草8瓣,万寿菊13瓣,紫宛21瓣,大多数雏菊都是34瓣、55瓣或89瓣.

斐波那契数列还有很多有趣的性质,在实际生活中也有广泛的应用,美国还于1963年以《斐波那契季刊》为名创刊了一份数学杂志,用于专门刊登关于斐波那契数列的研究论文.

第 7 章测试卷

一、选择题(本大题共 10 小题,每小题 4 分,共 40 分)

1. 在数列$\{a_n\}$中,$a_1=4$,$a_{n+1}-a_n=2(n\in\mathbf{N}^*)$,则 $a_6=$ ( )

A. 12　　B. 14

C. 16　　D. 18

2. 在等比数列$\{a_n\}$中,$a_2=4$,$a_3=2$,则该数列的前 4 项和 $S_4=$ ( )

A. 7　　B. 12

C. 13　　D. 15

3. 在等比数列$\{a_n\}$中,$a_1=1$,$a_4=\frac{1}{8}$,则该数列的公比 $q=$ ( )

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$

C. 2　　D. 4

4. 在等差数列$\{a_n\}$中,$a_2=3$,$a_7=13$,则该数列的前 8 项和 $S_8=$ ( )

A. 128　　B. 92

C. 80　　D. 64

5. 在等比数列$\{a_n\}$中,$a_1=2$,$q=2$,若 $a_n=64$,则 $n=$ ( )

A. 5　　B. 6

C. 7　　D. 8

6. 在等差数列$\{a_n\}$中,已知通项公式 $a_n=3n-2$,则 $S_{20}=$ ( )

A. 390　　B. 590

C. 780　　D. 295

7. 在等差数列$\{a_n\}$中,$S_{15}=90$,则 $a_8=$ ( )

A. 3　　B. 4

C. 6　　D. 12

8. 已知等差数列$\{a_n\}$的前三项为 $a-1$,$a+1$,$2a+3$,则此数列的通项公式为 ( )

A. $a_n=2n-5$　　B. $a_n=2n+1$

C. $a_n=2n-3$　　D. $a_n=2n-1$

9. 在等差数列$\{a_n\}$中,公差 $d=\frac{1}{2}$,$S_{100}=145$,则 $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{99}$的值为 ( )

A. 57　　B. 58　　C. 59　　D. 60

10. 某变速箱的第 1 个到第 9 个齿轮的齿数成等差数列,其中第 1 个齿轮的齿数是 25,第 9 个齿轮的齿数是 57,则第 5 个齿轮的齿数是 ( )

A. 41　　B. 42

C. 43　　D. 45

二、填空题(本大题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分)

11. 在等差数列$\{a_n\}$中,$a_3=1$,$a_6=4$,则 $a_9=$____________.

12. 在等比数列$\{a_n\}$中,$a_3=8$,$a_5=16$,则 $a_9=$____________.

13. 已知数列$\{a_n\}$是等差数列,a_1,a_2,a_5 构成公比不为 1 的等比数列,且 $a_9=4$,则公差 $d=$____________.

14. 等差数列$\{a_n\}$的前 9 项和为 72,则 $a_2+a_4+a_9=$____________.

15. 若数列$\{a_n\}$是公差不为 0 的等差数列,$\ln a_1$,$\ln a_2$,$\ln a_5$ 成等差数列,则$\frac{a_2}{a_1}$的值为____________.

16. 已知一个正方形的边长为 1 cm,以它的对角线为边作一个新的正方形,再以新的正方形的对角线为边作正方形,这样继续下去,共作了 6 个正方形,那么第六个正方形(包括已知正方形)的边长是____________,这 6 个正方形的面积和是____________.

三、解答题(本大题共 4 小题,每小题 9 分,共 36 分)

17. 已知在等差数列$\{a_n\}$中,$a_3=4$,$a_7=16$,求 a_1 与 S_7.

18. 已知三个数成等差数列，且它们的和是 12，积是 48，求这三个数.

19. 已知在等比数列$\{a_n\}$中，$a_2=\frac{1}{4}$，$a_5=\frac{1}{32}$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)若数列$\{b_n\}$满足 $b_n=a_n+n$，求$\{b_n\}$的前 n 项和 S_n.

20. 某软件公司新开发一款学习软件，该软件把学科知识设计为由易到难共 12 关的闯关游戏. 为了激发学习者的闯关热情，每闯过一关都奖励若干慧币(一种网络虚拟币). 该软件提供了三种奖励方案：第一种，每闯过一关奖励 40 慧币；第二种，闯过第一关奖励 4 慧币，以后每一关比前一关多奖励 4 慧币；第三种，闯过第一关奖励 0.5 慧币，以后每一关比前一关奖励翻一番(即增加 1 倍). 游戏规定：闯关者需要在闯关前任选一种奖励方案.

(1)设闯过 n($n\in\mathbf{N}^*$，且 $n\leqslant 12$)关后三种奖励方案获得的慧币数依次为 A_n，B_n，C_n，试求出 A_n，B_n，C_n 的表达式；

(2)如果你能闯过 10 关，你会选择哪种奖励方案？

$\sin\alpha=\frac{AB\sin 120^\circ}{BC}=\frac{200\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{280}=\frac{5\sqrt{3}}{14}$.

11. 解: (1)由题图可知,周期 $T=2\times\left(\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{12}\right)=\pi$,所以小球往复振动一次所需要的时间为 π s.

(2)可设该曲线的函数解析式为 $s=A\sin(\omega t+\varphi)(A>0,\omega>0,0\leqslant\varphi<2\pi)$,$t\in[0,+\infty)$,从题图中可以看出 $A=4$,$T=2\times\left(\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{12}\right)=\pi$,即$\frac{2\pi}{\omega}=\pi$,故 $\omega=2$.将 $t=\frac{\pi}{12}$,$s=4$ 代入解析式,得 $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\varphi\right)=1$,解得 $\varphi=\frac{\pi}{3}$.

所以这条曲线的函数解析式为 $s=4\sin\left(2t+\frac{\pi}{3}\right)$,$t\in[0,+\infty)$.

(3)当 $t=0$ 时,$s=4\sin\frac{\pi}{3}=2\sqrt{3}$ (cm),故小球在开始振动时,离开平衡位置的位移是$2\sqrt{3}$ cm.

12. 解: (1)扇形钢板 POQ 的半径为 1 m,圆心角为$\frac{\pi}{3}$,$\angle AOB=\theta$,

则$\angle BOC=\frac{\pi}{3}-\theta$,$BA=\sin\theta$,$OA=\cos\theta$,$BC=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)$,$OC=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)$,

则四边形钢板的面积 $S(\theta)=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)+\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta$,

其中 θ 的取值范围为$\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$.

(2)$S(\theta)=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)+\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta$

$=\frac{1}{4}\sin\left(\frac{2\pi}{3}-2\theta\right)+\frac{1}{4}\sin 2\theta=\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)+\frac{1}{4}\sin 2\theta$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{2}\cos 2\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\theta\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)$,

又 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$,则 $2\theta+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$,则 $\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)\in\left(\frac{1}{2},1\right]$,

则$\frac{\sqrt{3}}{4}\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)\in\left(\frac{\sqrt{3}}{8},\frac{\sqrt{3}}{4}\right]$,

则当 $2\theta+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$,即 $\theta=\frac{\pi}{6}$时四边形钢板的面积最大,最大值为$\frac{\sqrt{3}}{4}$.

第 7 章　数　　列

7.1　数列的概念

当堂检测

1. 解: (1)有穷数列;(2)无穷数列;(3)有穷数列;(4)无穷数列.

2. 解: $a_1=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$;$a_2=\frac{2}{2+1}=\frac{2}{3}$;$a_3=\frac{3}{3+1}=\frac{3}{4}$;$a_4=\frac{4}{4+1}=\frac{4}{5}$;$a_5=\frac{5}{5+1}=\frac{5}{6}$.

3. 解: (1)观察可知数列的前 4 项都是偶数,且是项数 n 的 2 倍,故数列的一个通项公式为 $a_n=2n$.

(2)观察可知数列的前 4 项的绝对值是项数 n,且奇数项为负数,偶数项为正数,故数列的一个通项公式为 $a_n=(-1)^n\cdot n$.

(3)观察可知数列的前 4 项都是 2,为常数列,$a_n=2$.

(4)观察可知数列的前 4 项是项数 n 的倒数,故数列的一个通项公式为 $a_n=\frac{1}{n}$.

4. 解: 把 17 代入通项公式 $a_n=3n+2$ 中,得 $17=3n+2$,解得 $n=5$.因此 17 是数列$\{a_n\}$中的项,是第 5 项.

归纳探究

(1)不是所有的数列都有通项公式.

(2)不是,数列的通项公式不唯一.

课后——巩固·提升

一、选择题

1. B **2.** B **3.** D **4.** B **5.** B **6.** D

二、填空题

7. 不是;是

8. $-(2n-1)$

9. $\frac{1}{12}$ 解析 $a_4+a_5=\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{12}$.

10. $2n+5$ 解析 由 $a_n=2n+3$,得 $a_{n+1}=2(n+1)+3=2n+5$.

11. 5 解析 $a_3=\frac{a_2}{5}=25$,$a_4=\frac{a_3}{5}=5$.

三、解答题

12. 解: 由 $a_n=\frac{(n-1)^3}{2}$ 可得 $a_1=\frac{(1-1)^3}{2}=0$, $a_2=\frac{(2-1)^3}{2}=\frac{1}{2}$,$a_3=\frac{(3-1)^3}{2}=4$,$a_4=\frac{(4-1)^3}{2}=\frac{27}{2}$.

13. 解: 令 $n^2+n-1=11$,解得 $n=3$ 或 $n=-4$(舍去),所以 11 是数列$\{a_n\}$的第 3 项.

14. 解: 根据题意,$a_1=2$,$a_2=a_1+2=2+2=4$,$a_3=a_2+2=4+2=6$,$a_4=a_3+2=6+2=8$,所以 $a_n=2n$.

15. 解: 根据题意,$a_1=2$,$a_2=2a_1=2\times2=4$,$a_3=2a_2=2\times4=8$,$a_4=2a_3=2\times8=16$,所以 $a_n=2^n$.

7.2 等差数列

7.2.1 等差数列的概念

当堂检测

1. 解: (1)不是;(2)是,$d=2$,$a_n=2n-4$;(3)是,$d=5$,$a_n=5n$;(4)是,$d=0$,$a_n=3$;(5)不是.

2. 解: $a_1=a_{10}-9d=28-9\times3=1$.

3. 解: 设这五个数的公差为 d,则 $4d=18-2$,解得 $d=4$. 因此,插入的三个数分别为 6,10,14.

归纳探究

是等差数列,首项为 $A+B$,公差为 A.

课后——巩固·提升

一、选择题

1. C 解析 题中数列是首项为 0、公差为 2 的等差数列,其通项公式为 $a_n=2(n-1)+0=2n-2$.

2. C

3. B 解析 由 $a_n=4n-1$,得 $a_1=4\times1-1=3$,$d=a_{n+1}-a_n=[4(n+1)-1]-(4n-1)=4$,所以数列$\{a_n\}$是首项为 3、公差为 4 的等差数列.

4. B **5.** A

二、填空题

6. (1)-4;(2)8;(3)3;(4)5 **7.** $3n-2$ **8.** 6 **9.** 0,4,8

三、解答题

10. 解: 因为 $a_{10}=a_6+4d$,所以 $d=\frac{a_{10}-a_6}{4}=5$,从而$a_{20}=a_{10}+10d=62$.

11. 解: 数列$-1,3,7,11,\cdots$是首项为-1、公差为4的等差数列,其通项公式为$a_n=4(n-1)-1=4n-5$.令$4n-5=83$,解得$n=22\in\mathbf{N}^*$,所以83是数列的第22项.

12. 解: 因为$a_5+a_{11}=a_6+a_{10}$,所以$a_{11}=a_6+a_{10}-a_5=-13$.

13. 解: 设祖孙三人的年龄分别为$a-d,a,a+d$,根据题意得$\begin{cases}(a-d)+a+(a+d)=120,\\a+d=4(a-d)+5,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=40,\\d=25.\end{cases}$所以祖孙三人的年龄分别为15岁、40岁、65岁.

7.2.2 等差数列前n项和公式

当堂检测

1. 解: $S=\dfrac{99\times(1+99)}{2}=4\ 950$.

2. 解: $S_{10}=\dfrac{10(a_1+a_{10})}{2}=\dfrac{10\times(8+26)}{2}=170$.

3. 解: $S_{20}=20a_1+\dfrac{20\times19}{2}d=20\times4+\dfrac{20\times19}{2}\times3=650$.

归纳探究

当$n=1$时,$a_n=S_n$;当$n>1(n\in\mathbf{N}^*)$时,$a_n=S_n-S_{n-1}$.

课后——巩固·提升

一、选择题

1. C 解析 $a_6=S_6-S_5=(3+2^6)-(3+2^5)=32$.

2. A

3. C 解析 因为$S_7=\dfrac{7(a_1+a_7)}{2}=7a_4$,所以$a_4=\dfrac{S_7}{7}=10$.

4. B 解析 $S_5=\dfrac{5(a_1+a_5)}{2}=\dfrac{5(a_2+a_4)}{2}=90$.

5. B 解析 由$S_{10}=10a_1+\dfrac{10\times9}{2}d$,解得$d=2$.

6. D 解析 因为$3a_4+a_8=4a_5=36$,所以$a_5=9$,所以$S_9=\dfrac{9(a_1+a_9)}{2}=9a_5=81$.

二、填空题

7. 30 解析 $S_6=\dfrac{6(a_1+a_6)}{2}=30$.

8. 35 解析 $S_7=\dfrac{7(a_1+a_7)}{2}=\dfrac{7(a_3+a_5)}{2}=35$.

9. 60 解析 $S_{10}=10a_1+\dfrac{10\times9}{2}d=60$.

10. 80 解析 由$a_{n+1}=a_n+2$可知,$\{a_n\}$是公差为2的等差数列,于是$S_8=8a_1+\dfrac{8\times7}{2}d=80$.

三、解答题

11. (1)**解:** 当$n=1$时,$a_1=S_1=1^2=1$;当$n>1$时,$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-(n-1)^2=2n-1$.由于$a_1=1$也满足$a_n=2n-1$,所以数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2n-1$.

(2)**证明:** $a_{n+1}-a_n=[2(n+1)-1]-(2n-1)=2$,所以$\{a_n\}$是公差为2的等差数列.

12. 解: 设公差为d.由已知得方程组$\begin{cases}(a_1+2d)+(a_1+6d)-(a_1+9d)=-10,\\(a_1+3d)+(a_1+10d)=10,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a_1=-8,\\d=2,\end{cases}$因此 $S_{13}=13\times(-8)+\frac{1}{2}\times13\times12\times2=52$.

13. 解:设公差为 d. 根据题意可得$\begin{cases}S_7=7a_1+\frac{7\times6}{2}d,\\S_{15}=15a_1+\frac{15\times14}{2}d,\end{cases}$代入解得$\begin{cases}a_1=1,\\d=2.\end{cases}$所以 $S_{20}=20\times1+\frac{20\times19}{2}\times2=400$.

7.3 等 比 数 列

7.3.1 等比数列的概念

当堂检测

1. 解:(1)不是;(2)是,$q=2,a_n=2^n$;(3)是,$q=1,a_n=2$;(4)是,$q=-1,a_n=(-1)^n$;(5)不是.

2. 解:$a_n=a_1q^{n-1}=(-1)^{n-1}\cdot2,a_{10}=(-1)^9\times2=-2$.

3. 解:设这五个数的公比为 q,则 $q^4=\frac{16}{1}$,解得 $q=\pm2$. 因此,插入的三个数分别为 2,4,8 或 $-2,4,-8$.

4. 解:因为 $a_2\cdot a_6=a_4^2$,所以 $a_6=\frac{a_4^2}{a_2}=64$.

课后——巩固·提升

一、选择题

1. D　**2.** D

3. C 解析 设公比为 q. 因为 $q^3=\frac{a_5}{a_2}=\frac{9}{4}$,所以 $a_8=a_5\cdot q^3=9\times\frac{9}{4}=\frac{81}{4}$.

4. B 解析 若 $a=b=c=0$,则 $b^2=ac$,但 a,b,c 不成等比数列;若 a,b,c 成等比数列,则 $b^2=ac$. 因此,“$b^2=ac$”是“a,b,c 成等比数列”的必要不充分条件.

5. D 解析 因为$\{a_n\}$是等比数列,所以 $a_1\cdot a_3=a_2^2$,解得 $a_2=\pm\frac{1}{3}$.

6. B 解析 因为 $a_8\cdot a_{11}=a_9\cdot a_{10}=a_5\cdot a_{14}=5$,所以 $a_8\cdot a_9\cdot a_{10}\cdot a_{11}=25$.

二、填空题

7. -18

8. -3 解析 $a_{10}=a_4\cdot q^6=-3\times(-1)^6=-3$.

9. 3 解析 因为 $a_4=a_1\cdot q^3$,所以 $q=\sqrt[3]{27}=3$.

10. 2 或 -4 解析 因为 $1,x+1,9$ 成等比数列,所以$(x+1)^2=9$,解得 $x=2$ 或 $x=-4$.

三、解答题

11. 解:$a_n=a_1q^{n-1}=(-3)^{n-1}\cdot2,a_3=2\times(-3)^2=18$.

12. 解:设这三个数分别为$\frac{a}{2},a,2a$,则 $a^3=8$,解得 $a=2$,于是三个数分别为 1,2,4.

13. 解:设等比数列的公比为 q,则 $q\neq0,a_2=\frac{a_3}{q}=\frac{2}{q},a_4=a_3q=2q$,代入 $a_2+a_4=\frac{20}{3}$中,解得 $q=\frac{1}{3}$或 $q=3$.

当 $q=\frac{1}{3}$时,$a_1=18,a_n=a_1q^{n-1}=18\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=2\times3^{3-n}$.

当 $q=3$ 时,$a_1=\frac{2}{9},a_n=a_1q^{n-1}=\frac{2}{9}\times3^{n-1}=2\times3^{n-3}$.

14. 解:设这四个数分别为$\frac{a}{q},a,aq,2aq-a$,则$\begin{cases}\frac{a}{q}\cdot a\cdot aq=216,\\a+aq+(2aq-a)=36,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=6,\\q=2.\end{cases}$

因此这四个数为 3,6,12,18.

7.3.2 等比数列前 n 项和公式

当堂检测

1. $3n$;30

2. $\frac{3[1-(-1)^n]}{2}$;0;3;0;3

3. 0;a

4. 解:$S=\frac{1-64\times2}{1-2}=127$.

5. 解:$S_n=\frac{2^n-1}{4}$,$S_8=\frac{2^8-1}{4}=\frac{255}{4}$.

归纳探究

当 $n=1$ 时,$a_n=S_n=3$;

当 $n>1$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=(3\cdot2^n-3)-(3\cdot2^{n-1}-3)=3\cdot2^{n-1}$.

因为 $a_1=3$ 也满足 $a_n=3\cdot2^{n-1}$,所以$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=3\cdot2^{n-1}$.

由于$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{3\cdot2^n}{3\cdot2^{n-1}}=2$,所以数列$\{a_n\}$是公比为 2 的等比数列.

课后——巩固·提升

一、选择题

1. D **2.** B

3. A 解析 由 $S_3=\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}=21$ 及 $q=4$,解得 $a_1=1$,于是 $a_n=4^{n-1}$.

4. D 解析 由 $2a_2+a_3=0$,得 $a_3=-2a_2$,所以等比数列$\{a_n\}$的公比 $q=-2$,于是$\frac{S_5}{S_2}=\frac{\frac{a_1[1-(-2)^5]}{1-(-2)}}{\frac{a_1[1-(-2)^2]}{1-(-2)}}=\frac{1-(-2)^5}{1-(-2)^2}=-11$.

二、填空题

5. $\frac{31}{2}$ 解析 $S_5=\frac{a_1(1-q^5)}{1-q}=\frac{31}{2}$.

6. 16;255 解析 由 $a_1=1$,$a_{n+1}=2a_n(n\in\mathbf{N}^*)$,可知$\{a_n\}$是首项为 1、公比为 2 的等比数列,所以 $a_5=a_1q^4=16$,$S_8=\frac{a_1(1-q^8)}{1-q}=255$.

7. 1 或-2 解析 设数列$\{a_n\}$的公比为 q,则 $S_3=a_1+a_2+a_3=2+2q+2q^2=6$,解得 $q=1$ 或 $q=-2$.

三、解答题

8. (1)**解**:当 $n=1$ 时,$a_1=S_1=2^{1+1}-2=2$;

当 $n>1$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=(2^{n+1}-2)-(2^n-2)=2^n$.

由于 $a_1=2$ 也满足 $a_n=2^n$,所以数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2^n$.

(2)**证明**:因为 $n>1$ 时,$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2^{n+1}}{2^n}=2$,所以$\{a_n\}$是公比为 2 的等比数列.

9. 解:由 $S_n=\frac{a_1-a_nq}{1-q}=\frac{1-32q}{1-q}=63$,解得 $q=2$.将 $q=2$ 代入 $a_n=a_1q^{n-1}=2^{n-1}=32$,解得 $n=6$.

10. 解：设$\{a_n\}$的公比为q，由已知得$\begin{cases}a_1-a_1q^4=-\dfrac{15}{2}①,\\ \dfrac{a_1(1-q^4)}{1-q}=-5②,\end{cases}$将①代入②，得$\dfrac{\frac{-15}{2}}{1-q}=-5$，解得$q=-\dfrac{1}{2}$. 将$q=-\dfrac{1}{2}$代入①，求得$a_1=-8$，所以$a_4=(-8)\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)^3=1$.

11. 解：由题意可知$\begin{cases}a_1+a_2+a_3=7,\\ \dfrac{3+a_1+4+a_3}{2}=3a_2,\end{cases}$解得$a_2=2$. 设数列$\{a_n\}$的公比为$q$，则$a_1=\dfrac{2}{q}$，$a_3=2q$. 因为$S_3=7$，所以$\dfrac{2}{q}+2+2q=7$，解得$q=2$或$q=\dfrac{1}{2}$. 已知$\{a_n\}$的公比大于1，所以$q=2$. 故数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2^{n-1}$.

7.4 等差数列与等比数列的应用

当堂检测

1. 解：因为从第2天起，每天比前一天多走的路程相同，所以该男子这9天中每天走的路程数构成等差数列，设该数列为$\{a_n\}$，第1天走的路程数为首项a_1，公差为d，则$S_9=1\ 260$，$a_1+a_4+a_7=390$.

因为$S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d$，$a_n=a_1+(n-1)d$，所以$\begin{cases}9a_1+\dfrac{9\times(9-1)}{2}d=1\ 260,\\ a_1+a_1+3d+a_1+6d=390,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=100,\\ d=10,\end{cases}$则$a_5=a_1+4d=100+4\times10=140$.

所以该男子第5天走了140里.

2. 解：若按方案①缴纳，需缴纳$50\times0.9=45$(万元).

若按方案②缴纳，则每天的缴纳额组成等比数列，其中$a_1=\dfrac{1}{2}$，$q=2$，$n=20$，

所以共需缴纳$S_{20}=\dfrac{\frac{1}{2}\times(1-2^{20})}{1-2}=2^{19}-\dfrac{1}{2}=524\ 288-\dfrac{1}{2}\approx52.4$(万元)，

所以方案①缴纳的保费较低.

课后——巩固·提升

一、选择题

1. D 解析 设原有总产值为a，年平均增长率为r，则$a(1+p)^{12}=a(1+r)$，解得$r=(1+p)^{12}-1$.

2. B 解析 本题即已知一个等差数列：3，5，7，9，11，13，15，…，求这个数列的第102项是多少，第n项＝首项＋公差×$(n-1)$，所以，第102项为$3+2\times(102-1)=205$.

3. D 解析 设现在的成本为x元，则$x(1-q\%)^3=a$，所以$x=\dfrac{a}{(1-q\%)^3}$.

4. A 解析 存款利息是以5为首项，5为公差的等差数列，12个月的存款利息之和为$5(1+2+3+\cdots+12)$元.

5. C 解析 设2020年1月份产值为a，则12月份的产值为pa，假设月平均增长率为r，则$a(1+r)^{11}=pa$，所以$r=\sqrt[11]{p}-1$.

二、填空题

6. $78ar$ 解析 由题意知，小王存款到期利息为$12ar+11ar+10ar+\cdots+2ar+ar=\dfrac{12\times(12+1)}{2}ar=78ar$(元).

7. 9 910 解析 设第一日读的字数为 a，由“每日添增一倍多”得此数列是以 a 为首项，公比为 2 的等比数列，可求得三日共读的字数为 $\frac{a(1-2^3)}{1-2}=7a=34\ 685$，解得 $a=4\ 955$，则 $2a=9\ 910$，即该君第二日读的字数为 9 910.

三、解答题

8. 解：贷款 10 000 元两年到期时本金与利息之和为 $10\ 000\times(1+0.457\ 5\%)^{24}=10\ 000\times1.004\ 575^{24}$（元）.

设每月还 x 元，则到期时总共还 $x+1.004\ 575x+\cdots+1.004\ 575^{23}x=x\cdot\frac{1-1.004\ 575^{24}}{1-1.004\ 575}$. 于是 $x\cdot\frac{1-1.004\ 575^{24}}{1-1.004\ 575}=10\ 000\times1.004\ 575^{24}$. 所以 $x\approx440.91$. 即每月应还 440.91 元.

9. 解：购买时先付 5 万元，余款 20 万元按题意分 10 次分期还清，每次付款数组成数列 $\{a_n\}$，则 $a_1=2+(25-5)\cdot10\%=4$（万元）；

$a_2=2+(25-5-2)\cdot10\%=3.8$（万元）；

$a_3=2+(25-5-2\times2)\cdot10\%=3.6$（万元），

…

$a_n=2+[25-5-(n-1)\cdot2]\cdot10\%=\left(4-\frac{n-1}{5}\right)$（万元）$(n=1,2,\cdots,10)$.

因而数列 $\{a_n\}$ 是首项为 4，公差为 $-\frac{1}{5}$ 的等差数列.

$a_5=4-\frac{5-1}{5}=3.2$（万元）.

$S_{10}=10\times4+\frac{10\times(10-1)\times\left(-\frac{1}{5}\right)}{2}=31$（万元）.

因此第 5 年该付 3.2 万元，购房款全部付清后实际共付 36 万元.

10. 解：由题意知，每年的经费是以 12 为首项，4 为公差的等差数列.

则 $f(n)=50n-\left[12n+\frac{n(n-1)}{2}\times4\right]-72=-2n^2+40n-72$.

获取纯利润就是要求 $f(n)>0$，故有 $-2n^2+40n-72>0$，解得 $2<n<18$.

又 $n\in\mathbf{N}^*$，知从第三年开始获利.

11. 解：(1)由题意知，自 2018 年起，每年人口总数构成等差数列 $\{a_n\}$（单位：万人），其中首项 $a_1=50$，公差 $d=1.5$，通项公式为 $a_n=a_1+(n-1)d=50+(n-1)\times1.5$.

设第 n 项 $a_n=60$，即 $50+(n-1)\times1.5=60$，解得 $n\approx7.7$.

因为 $n\in\mathbf{N}^*$，所以 $n=8$，$2018+8-1=2025$.

答：到 2025 年年底，该城市人口总数达到 60 万.

(2)由题意知，自 2018 年起，每年的绿化面积构成数列 $\{b_n\}$（单位：万平方米），其中 b_1 是 2018 年年底的绿化面积，$b_1=35$，b_2 是 2019 年年底的绿化面积，$b_2=35(1+5\%)-0.1=35\times1.05-0.1$，$b_3$ 是 2020 年年底的绿化面积，$b_3=(35\times1.05-0.1)\times(1+5\%)-0.1=35\times1.05^2-0.1\times1.05-0.1$，

以此类推，则 b_k 是 $(2018+k-1)$ 年年底的绿化面积，

$b_k=35\times1.05^{k-1}-0.1\times1.05^{k-2}-0.1\times1.05^{k-3}-\cdots-0.1\times1.05-0.1$

$=35\times1.05^{k-1}-\frac{0.1(1-1.05^{k-1})}{1-1.05}$，

又因为 $b_k=60\times0.9$，所以 $35\times1.05^{k-1}-\frac{0.1(1-1.05^{k-1})}{1-1.05}=60\times0.9$，

第7章测试卷

一、选择题

1. B 解析 由题意得,数列$\{a_n\}$是公差为2的等差数列,故$a_6=a_1+5d=14$.

2. D 解析 $q=\frac{a_3}{a_2}=\frac{1}{2}$,$a_1=\frac{a_2}{q}=8$,$S_4=\frac{a_1(1-q^4)}{1-q}=15$.

3. B 解析 $\frac{a_4}{a_1}=q^{4-1}=\frac{1}{8}$,$q=\frac{1}{2}$.

4. D 解析 $S_8=\frac{(a_2+a_7)\cdot 8}{2}=\frac{16\times 8}{2}=64$.

5. B 解析 因为$a_n=a_1\cdot q^{n-1}=2^n=64$,所以$n=6$.

6. B 解析 设公差为d,由$a_n=3n-2$,得$a_{n-1}=3(n-1)-2$,

所以$d=a_n-a_{n-1}=3$.又当$n=1$时,$a_1=3-2=1$,所以$S_{20}=20+\frac{20\times(20-1)\times 3}{2}=590$.

7. C 解析 因为$S_{15}=\frac{15(a_1+a_{15})}{2}=90$,所以$a_1+a_{15}=12$.又因为$a_1+a_{15}=2a_8$,所以$a_8=6$.

8. C 解析 由题意可知,$2(a+1)=a-1+2a+3=3a+2$,解得$a=0$,所以等差数列$\{a_n\}$的前三项为-1,1,3,则首项为-1,公差为2,所以$a_n=-1+2(n-1)=2n-3$.

9. D 解析 已知等差数列$\{a_n\}$,公差$d=\frac{1}{2}$,且$S_{100}=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{99}+a_{100}=a_1+(a_1+d)+a_3+(a_3+d)+a_5+\cdots+a_{99}+(a_{99}+d)=2(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{99})+50d=145$,所以$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{99}=\frac{S_{100}-50d}{2}=60$.

10. A 解析 根据等差中项的性质可得$a_5=\frac{a_1+a_9}{2}=41$.

二、填空题

11. 7 解析 由于$\{a_n\}$是等差数列,则$a_3+a_9=2a_6$,所以$a_9=2a_6-a_3=8-1=7$.

12. 64 解析 设等比数列$\{a_n\}$的公比为q,则$\frac{a_5}{a_3}=q^2=\frac{16}{8}=2$,所以$a_9=a_5q^{9-5}=16\times 2^2=64$.

13. $\frac{8}{17}$ 解析 由数列$\{a_n\}$是等差数列,a_1,a_2,a_5成公比不为1的等比数列,可得$a_2^2=a_1a_5$,即$(a_1+d)^2=a_1(a_1+4d)$,且$d\neq 0$,化简为$2a_1=d$.又$a_9=4$,即$a_1+8d=4$,解得$a_1=\frac{4}{17}$,$d=\frac{8}{17}$.

14. 24 解析 因为等差数列$\{a_n\}$的前9项和为72,所以$S_9=\frac{9(a_1+a_9)}{2}=9a_5=72$,解得$a_5=8$,则$a_2+a_4+a_9=3a_5=24$.

15. 3 解析 因为数列$\{a_n\}$是公差不为0的等差数列,$\ln a_1$,$\ln a_2$,$\ln a_5$成等差数列,所以$2\ln(a_1+d)=\ln a_1+\ln(a_1+4d)$,则$(a_1+d)^2=a_1(a_1+4d)$,解得$d=2a_1$,所以$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_1+d}{a_1}=3$.

16. $4\sqrt{2}$ cm;63 cm^2 解析 由题意知所作正方形的边长依次构成一个等比数列,首项为1,公比为$\sqrt{2}$,故$a_6=a_1q^5=1\times(\sqrt{2})^5=4\sqrt{2}$ (cm),则第六个正方形的边长为$4\sqrt{2}$ cm.这6个正方形的面积依次也构成一个等比数列,首项为1,公比为2,则$S_6=\frac{1\times(1-2^6)}{1-2}=63(cm^2)$.

三、解答题

17. 解: 由$a_7-a_3=4d$,得$d=3$,于是$a_1=a_3-2d=-2$,从而$S_7=\frac{7(a_1+a_7)}{2}=49$.

18. 解:设这三个数为$a-d,a,a+d$,则$\begin{cases}a-d+a+a+d=12,\\a(a-d)(a+d)=48,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=4,\\d=2\end{cases}$或$\begin{cases}a=4,\\d=-2.\end{cases}$故这三个数分别为2,4,6或6,4,2.

19. 解:(1)由等比数列的定义可知,$q^{5-2}=\frac{a_5}{a_2}=\frac{1}{8}$,解得$q=\frac{1}{2}$.由$a_2=a_1q$得$a_1=\frac{1}{2}$,

因此,所求等比数列的通项公式为$a_n=a_1q^{n-1}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^n=2^{-n}$.

(2)由(1)可知,$a_n=2^{-n}$,设$c_n=n$,则$\{c_n\}$是等差数列.

$\{a_n\}$的前n项和$T_n=\frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

$\{c_n\}$的前n项和$Q_n=\frac{(1+n)n}{2}=\frac{n+n^2}{2}$.所以$S_n=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{n}{2}+\frac{n^2}{2}$.

20. 解:(1)第一种奖励方案:闯过各关所得慧币数构成常数列,所以$A_n=40n$;

第二种奖励方案:闯过各关所得慧币数构成首项为4,公差为4的等差数列,所以$B_n=4n+\frac{n(n-1)}{2}\times4=2n^2+2n$;

第三种奖励方案:闯过各关所得慧币数构成首项为0.5,公比为2的等比数列,所以$C_n=\frac{0.5\times(1-2^n)}{1-2}=2^{n-1}-\frac{1}{2}$.

(2)当$n=10$时,$A_{10}=400$,$B_{10}=2\times10^2+2\times10=220$,$C_{10}=2^9-\frac{1}{2}=511.5>400>220$,

所以选择第三种奖励方案.