免费提供
精品教学资料包
服务热线：400-615-1233
www.huatengzy.com

工程数学

策划编辑：马子涵
责任编辑：满云凤　李　健
封面设计：许胜文

ISBN 978-7-5636-4429-2
定价：39.80元

工程数学

中国石油大学出版社
CHINA UNIVERSITY OF PETROLEUM PRESS

工程数学

范慧歆　吴凤珍　主编

中国石油大学出版社
CHINA UNIVERSITY OF PETROLEUM PRESS

图书在版编目(CIP)数据

工程数学/范慧歆，吴凤珍主编. -- 青岛：中国石油大学出版社，2014.5(2024.1 重印)

ISBN 978-7-5636-4429-2

Ⅰ.①工… Ⅱ.①范… ②吴… Ⅲ.①工程数学-教材 Ⅳ.①TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 115859 号

书　　名： 工程数学
GONGCHENG SHUXUE
主　　编： 范慧歆　吴凤珍

策划编辑： 马子涵
责任编辑： 满云凤　李　健
封面设计： 许胜文

出 版 者： 中国石油大学出版社
（地址：山东省青岛市黄岛区长江西路 66 号　邮编：266580）
网　　址： http://cbs.upc.edu.cn
电子邮箱： uppbook@upc.edu.cn
排 版 者： 华腾教育排版中心
印 刷 者： 三河市骏杰印刷有限公司
发 行 者： 中国石油大学出版社（电话　010-88433760）
开　　本： 787 mm×960 mm　1/16
印　　张： 13
字　　数： 248 千字
版 印 次： 2014 年 5 月第 1 版　2024 年 1 月第 6 次印刷
书　　号： ISBN 978-7-5636-4429-2
定　　价： 39.80 元

前　言

工程数学作为一门工具课，长久以来为学生素质的提高与技能型人才的培养做出了重要贡献。而随着课程改革步伐的不断深化，一方面，工程数学的教学课时因为专业技能的培养让路而受到一定的限制，另一方面，能力培养、专业要求对数学知识的需求在不断扩大。为解决这一矛盾，使工程数学的教学能在科学合理的状态下进行，编者做了大量的分析、调研，通过补充必要知识、减少重叠衔接、系统整合、体现应用功能，以适应教学要求，形成相对完整的教学模块。

本书内容包括行列式、矩阵、向量与线性方程组、概率论、复变函数、傅里叶变换、拉普拉斯变换等内容。编者本着积极稳妥、循序渐进、不断完善的原则进行教改与教材建设，编写过程中力求突出以下特点。

(1)在不影响基本理论体系的前提下，淡化逻辑推理过程，注重学生专业需求与数学技能的培养。

(2)在保证数学概念准确的前提下，尽量借助于几何直观，力求使抽象的数学概念形象化，便于学生理解。

(3)注重数学概念与实际问题的联系，特别是工程问题的联系，例题丰富，便于学习。

(4)结合具体内容进行数学建模训练，注重双向“翻译”能力的培养。

(5)合理地选择了例题和习题，许多题目既有启发性、趣味性，又具有挑战性和广泛的应用性。

本书由范慧歆、吴凤珍任主编，张斌、赵姝，解海峰和周才文任副主编。具体编写分工如下：第 1 章由吴凤珍编写，第 2 章由张斌编写，第 3 章和第 7 章由赵姝编写，第 4 章和附录由范慧歆编写，第 5 章由周才文编写，第 6 章由解海峰编写。

由于时间仓促，书中难免有不妥之处，为使该书能够日臻完善，恳请广大师生批评指正。

编　者

目　　录

第 1 章

行　列　式

本章在二阶、三阶行列式的基础上，引出 n 阶行列式的概念，讨论 n 阶行列式的性质，以及行列式的计算方法，最后应用 n 阶行列式解决了一类特殊的 n 个未知数的线性方程组的求解问题.

1.1　行列式的定义

1.1.1 二阶行列式

设二元一次线性方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2. \end{cases} \tag{1.1.1}$$

式中，x_1，x_2 是未知量；a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22}是未知量的系数；b_1，b_2 为常数项. 下面用高斯消元法解此方程组.

式(1.1.1)中，第一个方程乘以 a_{22}减去第二个方程的 a_{12}倍，整理可得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-b_2a_{12}.$$

第二个方程乘以 a_{11}减去第一个方程的 a_{21}倍，整理可得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=b_2a_{11}-b_1a_{21}.$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，此方程组有唯一解

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}, \\ x_2=\dfrac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \end{cases} \tag{1.1.2}$$

为了方便记忆，引进记号

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}. \tag{1.1.3}$$

把式(1.1.3)称为二阶行列式,记为D.其中,$a_{ij}(i,j=1,2)$称为行列式的**元素**,第一个下标i表示元素a_{ij}位于行列式从上到下的第i行,第二个下标j表示元素a_{ij}位于行列式从左到右的第j列.行列式中从左上角到右下角的线称为**主对角线**,位于主对角线上的元素称为**主对角线元素**;从左下角到右上角的线称为**副对角线**,位于副对角线上的元素称为**副对角线元素**.于是,二阶行列式的值为主对角线元素的乘积减去副对角线元素的乘积.

一般地,由$2^2=4$个元素排成两行两列的数表,并在数表的左右两侧各加一条竖线所构成的式子称为**二阶行列式**.

二阶行列式有两行两列,即行数与列数相等,并且行数(列数)恰为行列式的阶数.习惯上经常在行列式记号D的右下角标明其阶数,如二阶行列式也常常记为D_2.

例 1.1.1 计算下列二阶行列式的值.

(1)$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$;(2)$\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$.

解 (1)$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 2\times 3-(-1)\times 0 = 6$;

(2)$\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 7\times 5-3\times 2 = 35-6 = 29$.

例 1.1.2 用行列式解方程组.

$$\begin{cases} 3x_1-2x_2=12, \\ 2x_1+x_2=1. \end{cases}$$

解 由于

$$D=\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=3-(-4)=7\neq 0,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 12 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=12-(-2)=14,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=3-24=-21,$$

因而$x_1=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{14}{7}=2$,$x_2=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{-21}{7}=-3$.

1.1.2 三阶行列式

类似地,对三元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3, \end{cases} \tag{1.1.4}$$

引入三阶行列式的概念. 用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

表示代数和 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$，称为**三阶行列式**，记为 D_3，即

$$\begin{aligned} D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

用消元法容易算出式(1.1.4)中有唯一解，$x_1=\dfrac{D_1}{D}$，$x_2=\dfrac{D_2}{D}$，$x_3=\dfrac{D_3}{D}$，其中 D_j ($j=1,2,3$)分别是将 D 中第 j 列的元素换成式(1.1.4)右端的常数项 b_1,b_2,b_3 得到的.

三阶行列式是六项的代数和，其中每一项都是 D 中不同行不同列的三个元素的乘积，并冠以正负号，为了便于记忆，可写出计算过程如图 1.1.1 所示.

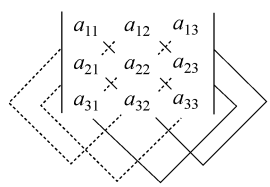

图 1.1.1

实线上三个元素的乘积项取正号，虚线上三个元素的乘积项取负号，这种方法称为三阶行列式的对角线法则.

例 1.1.3 计算下列三阶行列式的值.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

解 由三阶行列式的对角线法则得

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 1\times2\times(-2)+2\times1\times(-3)+(-2)\times4\times(-1)- (-1)\times2\times(-3)-2\times(-2)\times(-2)-1\times1\times4$$

$$=(-4)+(-6)+8-6-8-4=-20.$$

例 1.1.4 用行列式解方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 13, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 10, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$

解 由于

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -1-2+6-3-1-4 = -5 \neq 0,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 13 & -1 & 2 \\ 10 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -13-1+60-39-10-2 = -5,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 13 & 2 \\ 1 & 10 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -10+26+2-1+13-40 = -10,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 13 \\ 1 & 1 & 10 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1-20+39-30+1-26 = -35.$$

因而 $x_1 = \dfrac{D_1}{D} = 1, x_2 = \dfrac{D_2}{D} = 2, x_3 = \dfrac{D_3}{D} = 7.$

1.1.3 n 阶行列式

由上节二阶、三阶行列式的定义，用递推法来定义 n 阶行列式.

定义 1 由 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 排成 n 行 n 列的数表，并在数表的左右两侧各加一条竖线所构成的式子称为 n **阶行列式**，记为 D_n，即

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{1.1.5}$$

在 n 阶行列式 D_n 中任意选定 m 行 m 列，位于这些选定行、列交叉处的元素按原次序所组成的 m 阶行列式，称为 D_n 的一个 m **阶子式**. 例如，在

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

中选择第一、第二行和第一、第二列，则位于第一、第二行和第一、第二列交叉处的元素按其在 D_n 中的次序组成的二阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 就是 D_n 的一个二阶子式.

定义 2 在 n 阶行列式 D_n 中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列，剩下的元素按原来的次序所构成的 $(n-1)$ 阶子式，称为元素 a_{ij} 的**余子式**，记为 M_{ij}；元素 a_{ij} 的余子式 M_{ij} 乘上 $(-1)^{i+j}$ 称为元素 a_{ij} 的**代数余子式**，记为 A_{ij}，即 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$. 这样，

$$\begin{aligned} D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}M_{11}-a_{12}M_{12}+a_{13}M_{13} \\ &= a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}, \end{aligned}$$

即三阶行列式等于第一行所有元素与其对应代数余子式的乘积之和.

事实上，行列式表示一个由递推运算关系所得的数：

当 $n=1$ 时，规定 $D_1=|a_{11}|=a_{11}$；

当 $n=2$ 时，$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$；

当 $n>2$ 时，$D_n=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}$.

例 1.1.5 在三阶行列式

$$D_3=\begin{vmatrix} 4 & 3 & 11 \\ -6 & 8 & 10 \\ -3 & -2 & 6 \end{vmatrix}$$

中，求元素 a_{12} 的余子式 M_{12} 和代数余子式 A_{12}.

解 元素 a_{12} 的余子式 M_{12} 是从 D_3 中划去第 1 行和第 2 列的元素后剩下的元素构成的二阶行列式

$$M_{12}=\begin{vmatrix} -6 & 10 \\ -3 & 6 \end{vmatrix},$$

元素 a_{12} 的代数余子式 A_{12} 是在余子式 M_{12} 前再乘上 $(-1)^{1+2}$，则

$$A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-\begin{vmatrix} -6 & 10 \\ -3 & 6 \end{vmatrix}.$$

例 1.1.6 用定义计算下列四阶行列式

$$D_4=\begin{vmatrix}3 & 0 & -2 & 0\\ -4 & 1 & 0 & 2\\ 1 & 5 & 7 & 0\\ -3 & 0 & 2 & 4\end{vmatrix}.$$

解 由定义将行列式 D_4 按第 1 行展开,即

$$\begin{aligned}D_4&=(-1)^{1+1}\times 3\begin{vmatrix}1 & 0 & 2\\ 5 & 7 & 0\\ 0 & 2 & 4\end{vmatrix}+(-1)^{1+3}\times(-2)\begin{vmatrix}-4 & 1 & 2\\ 1 & 5 & 0\\ -3 & 0 & 4\end{vmatrix}\\ &=3\times(28+20)-2\times(-80+30-4)=144+108=252.\end{aligned}$$

习题 1.1

1. 计算下列二阶行列式的值.

(1) $\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 5\end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix}2 & 3\\ -1 & 4\end{vmatrix}$; (3) $\begin{vmatrix}a & b\\ a^2 & b^2\end{vmatrix}$.

2. 计算下列三阶行列式的值.

(1) $\begin{vmatrix}-2 & -4 & 1\\ 3 & 0 & 3\\ 5 & 4 & -2\end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 3 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}$; (3) $\begin{vmatrix}2 & 3 & 6\\ 1 & -1 & 0\\ 4 & -5 & -3\end{vmatrix}$.

3. 求位于行列式 $D_3=\begin{vmatrix}-2 & 18 & 1\\ 3 & 7 & 3\\ 5 & 4 & -2\end{vmatrix}$ 中第三行第二列的元素 4 的余子式和代数余子式;若第三行第二列元素不是 4 而是其他值,其余子式和代数余子式是否有变化?

4. 已知四阶行列式 D_4 中第二列元素依次为−1,2,0,1,它们的余子式依次为5,3,−9,4,求 D_4.

5. 证明:

$$\begin{vmatrix}y+z & z+x & x+y\\ x+y & y+z & z+x\\ z+x & x+y & y+z\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}x & y & z\\ z & x & y\\ y & z & x\end{vmatrix}.$$

6. 计算下列四阶行列式的值.

(1) $\begin{vmatrix} x_1 & -x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & -x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & -x_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 0 & a & b & a \\ a & 0 & a & b \\ b & a & 0 & a \\ a & b & a & 0 \end{vmatrix}$.

1.2 行列式的性质与计算

1.2.1 行列式的性质

二阶行列式和三阶行列式可用对角线法则或按照定义直接计算，但当 n 较大时，再从行列式的定义出发求行列式的值就比较麻烦了. 所以有必要先介绍行列式的一些基本性质，利用这些性质可以简化行列式的计算.

设 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

将此行列式的行和列互换，不改变它们的先后顺序得到的新行列式称为 D 的转置行列式，记为 D^{T}，即

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

为了便于理解，下面以三阶行列式为例来说明行列式的性质.

性质 1 行列式与其转置行列式相等，即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

由性质 1 可知，行列式的行与列所处的地位是对等的，故对行列式的行成立的性质，对列也成立；反之，对列成立的性质，对行也成立.

性质 2 对调行列式的某两行(列)，行列式仅改变符号，即

$$\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

推论　若行列式有两行(列)的对应元素相同,则此行列式等于零.

性质 3　若行列式的某一行(列)的元素全为零,则此行列式等于零.

性质 4(单行可提性)　行列式的某一行(列)的各个元素同乘以数 k,等于行列式乘以数 k,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

例 1.2.1　设行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 1,$$

求 $\begin{vmatrix} 6a_{11} & -2a_{12} & -10a_{13} \\ -3a_{21} & a_{22} & 5a_{23} \\ -3a_{31} & a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix}$.

解　$$\begin{vmatrix} 6a_{11} & -2a_{12} & -10a_{13} \\ -3a_{21} & a_{22} & 5a_{23} \\ -3a_{31} & a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} -3a_{11} & a_{12} & 5a_{13} \\ -3a_{21} & a_{22} & 5a_{23} \\ -3a_{31} & a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= (-2)\times(-3)\times 5\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 30.$$

推论　若行列式有两行(列)的对应元素成比例,则此行列式等于零.

性质 5　若行列式的某一行(列)的各个元素都是两数之和,则此行列式等于两个行列式的和,这两个行列式的这一行(列)的元素分别为相应的两数中的一个,其余元素与原来行列式的对应元素相同,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

推论　以数 k 乘行列式的某行(列)的所有元素,然后加到行列式的另一行(列)的对应元素上去,则行列式的值不变,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \xlongequal{r_2+kr_1} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11}+a_{21} & ka_{12}+a_{22} & ka_{13}+a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

其中数 k 乘第 i 行(列)加到第 j 行(列),记作 $r_j+kr_i(c_j+kc_i)$.

例 1.2.2 计算下列四阶行列式.

$$D_4=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

解 $D_4 \xlongequal[r_2+r_3]{r_2+r_4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 6 & 6 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=0.$

1.2.2 行列式的计算

1. 计算任意阶行列式的 Laplace 展开定理

事实上,行列式的计算除可按第一行展开外,可按任意行(或列)展开,即有下述定理.

定理(Laplace 展开定理) 行列式 D_n 等于它的任意一行(列)的各元素与其对应代数余子式的乘积之和,即

$$D_n=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}\,(i=1,2,\cdots,n); \tag{1.2.1}$$

$$D_n=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}\,(j=1,2,\cdots,n). \tag{1.2.2}$$

例 1.2.3 计算行列式 $D_4=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b & a \\ 0 & c & b & a \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$.

解 由定理可知,计算行列式的值应按零最多的行或列展开. 注意到行列式 D_4 各元素的代数余子式的符号有如下规律:

$$\begin{matrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{matrix}$$

故按第一行展开，得

$$D_4=\begin{vmatrix}0&0&0&a\\0&0&b&a\\0&c&b&a\\d&c&b&a\end{vmatrix}=-a\begin{vmatrix}0&0&b\\0&c&b\\d&c&b\end{vmatrix}=-ab\begin{vmatrix}0&c\\d&c\end{vmatrix}=abcd.$$

推论 行列式的某一行(列)各个元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零，即

$$D=a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\cdots+a_{in}A_{kn}=0\ (i\neq k;i,k=1,2,\cdots,n); \tag{1.2.3}$$

$$D=a_{1j}A_{1k}+a_{2j}A_{2k}+\cdots+a_{nj}A_{nk}=0\ (j\neq k;j,k=1,2,\cdots,n). \tag{1.2.4}$$

例 1.2.4 验证 D_3 中第一行各元素与第三行对应元素的代数余子式乘积之和为零.

解 $D_3=\begin{vmatrix}1&-2&3\\2&-1&2\\3&2&4\end{vmatrix}$，$A_{31}=M_{31}=-1$，$A_{32}=-M_{32}=4$，$A_{33}=M_{33}=3$，则

$$1\cdot A_{31}+(-2)\cdot A_{32}+3\cdot A_{33}=1\times(-1)+(-2)\times4+3\times3=0.$$

主对角线上方元素全为零(即非零元素都位于主对角线及其下方)的行列式称为**下三角行列式**；主对角线下方元素全为零(即非零元素都位于主对角线及其上方)的行列式称为**上三角行列式**.

例 1.2.5 证明下三角行列式 D_n 的值等于其主对角线上元素之积.

证 将这个行列式按第一行展开，得

$$D_n=\begin{vmatrix}a_{11}&0&0&\cdots&0\\a_{21}&a_{22}&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&a_{n3}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&0&\cdots&0\\a_{32}&a_{33}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n2}&a_{n3}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix},$$

继续按第一行展开，即得

$$D_n=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=\prod_{i=1}^{n}a_{ii}.$$

上三角行列式 $D=D_n^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{21}&a_{31}&\cdots&a_{n1}\\0&a_{22}&a_{32}&\cdots&a_{n2}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$.

结论 上(下)三角行列式的值等于其主对角线上元素之积.

注意 计算高阶行列式时可利用性质想办法使其转化为上(下)三角行列式.

2. 利用行列式的性质计算任意阶行列式的值

利用行列式的性质计算行列式的值是行列式计算最常用的方法. 一般情况下,需根据行列式的特征选用合适的性质,使之转化为上(下)三角行列式,然后求值. 例如,行列式各行(列)数字之和都相同,可将各行(列)加到第一行(列),然后将第一行(列)提出公因子再计算. 事实上,计算行列式的规律是:想办法将不同元素转化成相同元素,将相同元素转化成零. 下面举例说明.

例 1.2.6 计算行列式 $D_4=\begin{vmatrix} a & a & a & b \\ a & a & b & a \\ a & b & a & a \\ b & a & a & a \end{vmatrix}$.

解 $$D_4 \xlongequal[r_1+r_4]{\substack{r_1+r_2\\ r_1+r_3}} \begin{vmatrix} 3a+b & 3a+b & 3a+b & 3a+b \\ a & a & b & a \\ a & b & a & a \\ b & a & a & a \end{vmatrix}$$

$$=(3a+b)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & a & b & a \\ a & b & a & a \\ b & a & a & a \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{c_2-c_4\\ c_1-c_4}]{c_3-c_4} (3a+b)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & b-a & a \\ 0 & b-a & 0 & a \\ b-a & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

$$=(3a+b)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & b-a & 0 & 0 \\ a & 0 & b-a & 0 \\ a & 0 & 0 & b-a \end{vmatrix}=(3a+b)(b-a)^3.$$

例 1.2.7 计算行列式 $\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 4 & -2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}$ 的值.

解 $$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 4 & -2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4+2r_1]{\substack{r_2+4r_1\\ r_3+3r_1}} \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 5 \\ 0 & 4 & -8 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-r_2]{r_3-2r_2}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & -13 \\ 0 & 0 & 6 & -4 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4-3r_3} \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 35 \end{vmatrix}=-140.$$

例 1.2.8 计算箭形行列式 $D_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n\end{vmatrix}$.

解 $$D_n\xlongequal[\substack{c_1-\frac{1}{3}c_3\\ \cdots\\ c_1-\frac{1}{n}c_n}]{c_1-\frac{1}{2}c_2}\begin{vmatrix}1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{n} & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n\end{vmatrix}=\left(1-\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\right)n!.$$

例 1.2.9 证明 $n(n\geqslant 2)$ 阶范德蒙(Vandermonde) 行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j).$$

其中，$\prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j)$ 等于 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 这 n 个数的所有可能的差$(a_i-a_j)(1\leqslant j< i\leqslant n)$ 的乘积.

证 用数学归纳法证明.

当 $n=2$ 时,$D_2=\begin{vmatrix}1 & 1\\ a_1 & a_2\end{vmatrix}=a_2-a_1$,显然成立.

假设对于$(n-1)$阶范德蒙行列式成立,对于 n 阶范德蒙行列式,从第 n 行开始,后一行减去前一行的 a_1 倍,得

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & a_2-a_1 & a_3-a_1 & \cdots & a_n-a_1\\ 0 & a_2^2-a_1a_2 & a_3^2-a_1a_3 & \cdots & a_n^2-a_1a_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & a_2^{n-1}-a_1a_2^{n-2} & a_3^{n-1}-a_1a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-1}-a_1a_n^{n-2}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a_2-a_1 & a_3-a_1 & \cdots & a_n-a_1\\ a_2^2-a_1a_2 & a_3^2-a_1a_3 & \cdots & a_n^2-a_1a_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_2^{n-1}-a_1a_2^{n-2} & a_3^{n-1}-a_1a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-1}-a_1a_n^{n-2}\end{vmatrix},$$

每列提出公因子 $a_i-a_1(i=2,3,\cdots,n)$，得

$$D_n=(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\a_2&a_3&\cdots&a_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_2^{n-2}&a_3^{n-2}&\cdots&a_n^{n-2}\end{vmatrix}$$

$$=(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)D_{n-1}$$

$$=(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)\prod_{2\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j)$$

$$=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j).$$

例 1.2.10　计算 $D_4=\begin{vmatrix}a&b&c&d\\a&a+b&a+b+c&a+b+c+d\\a&2a+b&3a+2b+c&4a+3b+2c+d\\a&3a+b&6a+3b+c&10a+6b+3c+d\end{vmatrix}$.

解　注意到行列式中除第一行和第一列外，其他元素均为它前一行、前一列对应元素之和，故可根据行列式的性质，从最后一行开始，后一行减去前一行，即

$$D_4\xlongequal{r_4-r_3}\begin{vmatrix}a&b&c&d\\a&a+b&a+b+c&a+b+c+d\\a&2a+b&3a+2b+c&4a+3b+2c+d\\0&a&3a+b&6a+3b+c\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3-r_2}\begin{vmatrix}a&b&c&d\\a&a+b&a+b+c&a+b+c+d\\0&a&2a+b&3a+2b+c\\0&a&3a+b&6a+3b+c\end{vmatrix}\xlongequal{r_2-r_1}\begin{vmatrix}a&b&c&d\\0&a&a+b&a+b+c\\0&a&2a+b&3a+2b+c\\0&a&3a+b&6a+3b+c\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4-r_3}\begin{vmatrix}a&b&c&d\\0&a&a+b&a+b+c\\0&a&2a+b&3a+2b+c\\0&0&a&3a+b\end{vmatrix}\xlongequal{r_3-r_2}\begin{vmatrix}a&b&c&d\\0&a&a+b&a+b+c\\0&0&a&2a+b\\0&0&a&3a+b\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4-r_3}\begin{vmatrix}a&b&c&d\\0&a&a+b&a+b+c\\0&0&a&2a+b\\0&0&0&a\end{vmatrix}=a^4.$$

习题 1.2

1. 计算下列行列式的值.

(1) $\begin{vmatrix}1&1&1&0\\1&1&0&1\\1&0&1&1\\0&1&1&1\end{vmatrix}$;(2) $\begin{vmatrix}4&1&2&4\\1&2&0&2\\10&5&2&0\\0&1&1&7\end{vmatrix}$;(3) $\begin{vmatrix}1&1&2&3\\3&-1&-1&2\\2&3&-1&-1\\1&2&3&0\end{vmatrix}$;

(4) $\begin{vmatrix}1+x_1&1+x_2&1+x_3\\2+x_1&2+x_2&2+x_3\\3+x_1&3+x_2&3+x_3\end{vmatrix}$.

2.证明:

(1) $\begin{vmatrix}a^2&ab&b^2\\2a&a+b&2b\\1&1&1\end{vmatrix}=(a-b)^3$;(2) $\begin{vmatrix}(a+1)^2&a^2&a\\(b+1)^2&b^2&b\\(c+1)^2&c^2&c\\(d+1)^2&d^2&d\end{vmatrix}=0$;

(3) $\begin{vmatrix}1+x1&1&1&1\\1&1-x&1&1\\1&1&1+y&1\\1&1&1&1-y\end{vmatrix}=x^2y^2$.

1.3 克拉默法则

一般地,含有 n 个未知数 n 个方程的线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\\qquad\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n,\end{cases}\tag{1.3.1}$$

其中,系数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$及常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 均为已知数.令

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix},D_j=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1,j-1}&b_1&a_{1,j+1}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2,j-1}&b_2&a_{2,j+1}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{n,j-1}&b_n&a_{n,j+1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix},$$

D 称为式(1.3.1)的**系数行列式**,D_j 是把 D 中的第 j 列(即 x_j 的系数)替换为方程组右端的常数项而得到的行列式.可以证明此时有如下法则.

定理 1(克拉默法则) 若式(1.3.1)中的系数行列式 $D\neq0$,则该方程组存在唯

一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},\cdots,x_n=\frac{D_n}{D}.$$

例 1.3.1 解线性方程组$\begin{cases}x_1+x_2=2,\\x_2+x_3=0,\\x_1+x_3=0.\end{cases}$

解 系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{vmatrix}=2\neq 0,$$

故可用克拉默法则求解.

又因为

$$D_1=\begin{vmatrix}2&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{vmatrix}=2,\ D_2=\begin{vmatrix}1&2&0\\0&0&1\\1&0&1\end{vmatrix}=2,\ D_3=\begin{vmatrix}1&1&2\\0&1&0\\1&0&0\end{vmatrix}=-2,$$

所以

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1,x_2=\frac{D_2}{D}=1,x_3=\frac{D_3}{D}=-1.$$

当 n 元线性方程组(1.3.1)的常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 全为零时,方程组转化为

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\\qquad\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0.\end{cases}\tag{1.3.2}$$

式(1.3.2)称为 n **元齐次线性方程组**. 相应地,当方程组(1.3.1)中的常数项不全为零时称为 n **元非齐次线性方程组**.

若齐次线性方程组(1.3.2)的系数行列式 $D\neq 0$,则由克拉默法则知齐次线性方程组(1.3.2)有唯一解 $x_1=0,x_2=0,\cdots,x_n=0$(零解);若齐次线性方程组(1.3.2)除零解外还有不全为零的解(非零解),那么该齐次线性方程组(1.3.2)的系数行列式 D 必等于零,即有下面的推论.

定理 2 若齐次线性方程组(1.3.2)的系数行列式 $D\neq 0$,则该方程组仅有零解。

推论 若齐次线性方程组(1.3.2)有非零解,则系数行列式 D 必等于零.

例 1.3.2 问 λ 为何值时,齐次线性方程组

$$\begin{cases}(1-\lambda)x_1-2x_2+4x_3=0,\\2x_1+(3-\lambda)x_2+x_3=0,\\x_1+x_2+(1-\lambda)x_3=0.\end{cases}$$

有非零解？

解 由推论知，若所给齐次线性方程组有非零解，则其系数行列式 $D=0$. 其中

$$D=\begin{vmatrix}1-\lambda & -2 & 4\\2 & 3-\lambda & 1\\1 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal[c_3+2c_2]{c_1-c_2}\begin{vmatrix}3-\lambda & -2 & 0\\\lambda-1 & 3-\lambda & 7-2\lambda\\0 & 1 & 3-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(3-\lambda)\begin{vmatrix}3-\lambda & 7-2\lambda\\1 & 3-\lambda\end{vmatrix}-(\lambda-1)\begin{vmatrix}-2 & 0\\1 & 3-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=\lambda(3-\lambda)(\lambda-2).$$

令 $D=0$，得 $\lambda=0,2,3$，此时齐次线性方程组有非零解.

但是，用克拉默法则解线性方程组必须具备两个前提条件：

(1)方程个数与未知数个数相等；

(2)系数行列式 D 不等于零.

克拉默法则的优点是不仅指出了解的存在，而且还具体给出了解的表达式，表现了方程组的解与系数、常数项的关系，有助于分析问题，在理论上具有重要的意义. 但是克拉默法则将解的表达式用 $(n+1)$ 个 n 阶行列式表示，如果 n 很大，则计算量非常大；另外，在实际问题中遇到的线性方程组，方程个数与未知数个数常不相等，这就使得克拉默法则的应用受到了限制.

习题 1.3

1. 填空题.

(1)若线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2=1,\\\lambda x_1+x_2=2\end{cases}$ 有唯一解，则 λ 的值为__________.

(2)若齐次线性方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+3x_2=0,\\x_1+(\lambda-2)x_2=0\end{cases}$ 有非零解，则 λ 的值为________.

2. 用克拉默法则求下列线性方程组的解.

(1) $\begin{cases}2x_1-x_2-x_3=4,\\3x_1+4x_2-2x_3=11,\\3x_1-2x_2+4x_3=11;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}2x_1-3x_2+x_3=-1,\\x_1+x_2+x_3=6,\\3x_1+x_2-2x_3=-1.\end{cases}$

1.4 MATLAB 软件在行列式运算中的应用

行列式的计算在 MATLAB 中非常简单,其实现过程如下。

(1)将行列式的元素放在方括号[ ]内赋值给一个变量 a;

(2)调用命令 det(a)即可求出行列式的值.

例 1.4.1 计算二阶行列式$\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$的值.

输入:>> a=[5 7;3 6];

　　>>det(a)

输出:ans=

　　9

注意 (1)输入行列式的元素时,按行输入,同一行不同元素之间用空格或逗号分隔,不同行之间用分号分隔,即命令"a=[5 7;3 6];"中元素 7 后的分号起换行作用.

(2)在命令"a=[5 7;3 6];"中,最后的分号起抑制显示作用,用来隐藏不必显示的信息.如果没有分号,则输出 a =

　　5　　7

　　3　　6.

(3)ans 为系统默认的变量名,在没有定义变量时,系统将采用 ans.若想赋值给指定的变量,应指出.例如,命令 det(a)也可写成 d=det(a),此时则将行列式的值赋给指定的变量 d. MATLAB 将输出 d =9.

例 1.4.2 计算行列式$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 & 5 \\ 1 & 4 & -2 & 3 \\ 7 & -1 & 5 & 4 \\ 0 & 5 & 8 & 6 \end{vmatrix}$.

输入:>> a=[3 -2 0 5;1 4 -2 3;7 -1 5 4;0 5 8 6];

　　>>det(a)

输出:ans =

　　1658

例 1.4.3 求行列式$\begin{vmatrix} -2 & 2 & -4 & 0 \\ 4 & -1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}$第 3 行第 1 列元素 3 的余子式与代数余子式.

输入：

```
>>a=[-2 2 -4 0;4 -1 3 5;3 1 -2 -3;2 0 5 1];
>>a(3,:)=[ ];
>>a(:,1)=[ ];
>>det(a)
```

输出：

```
ans=
      -48
```

注意 (1)命令"a(3,:)=[ ]"将行列式第 3 行元素删除,其中 3 表示取行列式的第 3 行元素,":"表示取行列式所有列的元素,等号右端的"[ ]"表示赋值空,即删除. 类似可得,命令"a(:,1)=[ ]"将行列式第 1 列的元素删除. 于是删除第 3 行、第 1 列元素后所得行列式即为原行列式的余子式.

(2)在对变量赋值时,系统总是以最后所赋的值作为变量的值进行运算,从而 det(a)的结果−48,即为所求余子式,从而代数余子式为$(-1)^{3+1}\times(-48)=-48$.

例 1.4.4 解线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2=2, \\ x_2+x_3=0, \\ x_1+x_3=0. \end{cases}$

输入：

```
>>a=[1 1 0;0 1 1;1 0 1];  % 输入方程组中未知数的系数所组成的
                          % 行列式
>>b=[2;0;0];              % 输入常数项
>>d=det(a);               % 计算系数行列式
>>a(:,1)=b;               % 用右端常数项替换系数行列式的第一列
>>d1=det(a);              % 计算替换后的行列式并赋值给 d1
>>x1=d1/d
```

输出：

```
x1=
      1
```

类似可求得 $x_2=1, x_3=-1$.

注意 %后面的内容是注释说明部分,MATLAB 不执行%后面的内容.

复习题一

1．填空题.

(1)若行列式各行数字之和均为零,则此行列式的值为________.

(2)设 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$,则 $\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & \cdots & ka_{nn} \end{vmatrix}=$________.

(3)设 $m\neq 0$,则方程 $\begin{vmatrix} a & a & x \\ m & m & m \\ x & b & b \end{vmatrix}=0$ 的解为________.

(4)含有 n 个未知数 n 个方程的齐次线性方程组,当系数行列式 D ________时,方程组仅有零解;当 D ________时,方程组有非零解.

2．已知三阶行列式 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=1$,求下列行列式的值.

(1) $\begin{vmatrix} a & 2b & c \\ 2x & 4y & 2z \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix}$; (3) $\begin{vmatrix} \frac{1}{2}a+2 & \frac{1}{2}b+2 & \frac{1}{2}c+2 \\ x-1 & y-1 & z-1 \\ 6 & 6 & 6 \end{vmatrix}$.

3．计算下列行列式的值.

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1-a \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} 1 & 1+\cos\theta & 1+\sin\theta \\ 1 & 1-\sin\theta & 1+\cos\theta \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} -x & 1 & x \\ 0 & -x & -1 \\ x & 1 & -x \end{vmatrix}$; (4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$;

(5) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; (6) $\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix}$.

4．用克拉默法则解方程组.

(1) $\begin{cases} x+y+z=a+b+c, \\ ax+by+cz=a^2+b^2+c^2, \\ bcx+acy+abz=3abc, \end{cases}$ 其中，a，b，c 是互不相等的实数；

(2) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=10, \\ x_2+2x_3+3x_4=6, \\ x_3+2x_4=3, \\ x_1+2x_2+3x_3+5x_4=11. \end{cases}$