职教高考文化基础课配套学习用书

数学滚动强训（拓展模块1·下）

主编　韩燕丽

周测+月考+综合测评

开明出版社

职教高考文化基础课配套学习用书
数学滚动强训（拓展模块1·下）
主编　韩燕丽
开明出版社

数学滚动强训（拓展模块1·下）

周测+月考+综合测评

ISBN 978-7-5131-8542-4
9 787513 185424
定价：29.90元

职教高考文化基础课配套学习用书

数学滚动强训

（拓展模块 1 · 下）

主　编　韩燕丽
副主编　张敬友

开明出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学滚动强训：拓展模块. 1 下 / 韩燕丽主编. —北京：开明出版社，2023.12

ISBN 978-7-5131-8542-4

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①韩… Ⅲ. ①数学课—中等专业学校—教学参考资料 Ⅳ. ①G634.603

中国国家版本馆 CIP 数据核字(2023)第 198957 号

责任编辑：张薇薇

SHUXUE GUNDONG QIANGXUN(TUOZHAN MOKUAI 1 • XIA)

数学滚动强训(拓展模块 1 • 下)

主　　编：韩燕丽
出　　版：开明出版社
（北京市海淀区西三环北路 25 号　邮编 100089）
印　　刷：三河市骏杰印刷有限公司
开　　本：787 mm×1092 mm　1/8
印　　张：10.5
字　　数：256 千字
版　　次：2023 年 12 月第 1 版
印　　次：2023 年 12 月第 1 次印刷
定　　价：29.90 元
印刷、装订质量问题，出版社负责调换。联系电话：(010)88817647

前　言

职业教育是我国现代教育的重要组成部分，中等职业学校必须依据教育要求与时俱进，不断进行教育教学改革. 本书以最新版的中等职业学校公共基础课程教材为编写依据，着重培养学生的课程核心素养，以深化学校教育教学改革、提高课堂教学实效性为目标，以细化解读有关课程标准要求为基础，充分落实学生的主体地位，进而激发学生的自信，挖掘学生的数学学习潜力，科学检测学生的知识点掌握程度，培养学生的解题能力.

全书划分为20周，在题型上注重与对口升学考试接轨，同时也设计了一些样式新颖的题目，旨在拓宽学生的视野，进一步培养学生的解题能力；在内容上注重知识的系统性、完整性、循序渐进性；在编排上注重体现科学性. 学生可以利用本书体验考试情境，巩固所学知识，学习必备的应试技巧，切实提高应试能力.

本书有利于学生构建完整的知识与能力体系，有利于提高学习成绩；同时也有利于教师发现教学中的问题，及时调整下一步的教学计划，帮助学生查漏补缺，重点强化.

因编者水平有限，书中难免存在不当之处，恳请广大师生在使用后提出宝贵的意见和建议，以便我们及时做出修订.

编　者

目　录

第1周　和角公式

第Ⅰ卷(选择题　共30分)

一、选择题(本题有10小题,每小题3分,共30分.在每小题所给出的选项中只有一个符合题目要求)

1. 已知$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,$\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$,则$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$等于　(　　)

A. $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{6}}{6}$　B. $1-\frac{\sqrt{6}}{6}$　C. $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{6}}{6}$　D. $-1+\frac{\sqrt{6}}{6}$

2. 已知$\tan\alpha$,$\tan\beta$是方程$x^2+3\sqrt{3}x+4=0$的两根,且$\alpha,\beta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,则$\alpha+\beta$的值为　(　　)

A. $\frac{\pi}{3}$　B. $-\frac{2\pi}{3}$　C. $\frac{\pi}{3}$或$-\frac{2\pi}{3}$　D. $-\frac{\pi}{3}$或$\frac{2\pi}{3}$

3. 已知$\tan\alpha=-\frac{4}{3}$,则$\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=$　(　　)

A. -7　B. 7　C. $-\frac{1}{7}$　D. $\frac{1}{7}$

4. 在$\triangle ABC$中,若$\sin A\cos B=1-\cos A\sin B$,则$\triangle ABC$是　(　　)

A. 锐角三角形　B. 钝角三角形　C. 直角三角形　D. 等腰三角形

5. 已知$\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$,则$\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)-\cos\left(\alpha+\frac{5\pi}{6}\right)=$　(　　)

A. $\frac{2+\sqrt{3}}{3}$　B. $-\frac{2+\sqrt{3}}{3}$　C. $\frac{2-\sqrt{3}}{3}$　D. $-\frac{2-\sqrt{3}}{3}$

6. 在$\triangle ABC$中,$\angle C=120^\circ$,$\tan A+\tan B=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,则$\tan A\tan B=$　(　　)

A. $\frac{1}{4}$　B. $\frac{1}{3}$　C. $\frac{1}{2}$　D. 1

7. $\frac{1-\tan 15^\circ}{1+\tan 15^\circ}=$　(　　)

A. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　C. $-\sqrt{3}$　D. $\sqrt{3}$

8. $\cos 57^\circ\cos 3^\circ-\sin 57^\circ\sin 3^\circ$的值为　(　　)

A. 0　B. $\frac{1}{2}$　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　D. $\cos 54^\circ$

9. 计算$\cos 105^\circ=$　(　　)

A. $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$　B. $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$　C. $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$　D. $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

10. 已知$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-\cos\alpha=\frac{4}{5}$,则$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=$　(　　)

A. $\frac{3}{5}$　B. $\frac{4}{5}$　C. $-\frac{3}{5}$　D. $-\frac{4}{5}$

第Ⅱ卷(非选择题　共70分)

二、填空题(本题有10个空,每空3分,共30分.请将正确答案填在题中横线上,不填、少填、错填均不得分)

11. 求值:$\sin 28^\circ\cos 73^\circ-\sin 62^\circ\cos 17^\circ=$__________;

12. 若$\tan 2\alpha=\frac{1}{4}$,则$\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=$__________.

13. 已知$\sin\alpha=\frac{1}{2}$,$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,则$\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=$__________.

14. $\sin 7^\circ\cos 23^\circ+\sin 83^\circ\cos 67^\circ=$__________.

15. 已知$5\sqrt{3}\sin x+5\cos x=6$,$\sqrt{2}\sin y+\sqrt{6}\cos y=1$且$x\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$,$y\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$,则$\cos(x+y)$的值是__________.

16. 已知$\cos\alpha=\frac{4}{5}$,$\cos(\alpha-\beta)=-\frac{4}{5}$,$\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$,$\frac{\pi}{2}<\alpha-\beta<\pi$,则$\cos\beta=$__________.

17. 若$\cos\alpha=-\frac{3}{5}$,α是第三象限的角,则$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=$__________.

18. 已知$\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=2$,则$\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=$__________.

19. 在$\triangle ABC$中,若$\cos A=\frac{4}{5}$,$\cos B=-\frac{3}{5}$,则$\cos C$的值为__________.

20. 已知α,β为锐角,且$\cos\alpha=\frac{4}{5}$,$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{16}{65}$,则$\cos\beta$的值为__________.

三、解答题(本题有5小题,每小题8分,共40分)

21. 求证:$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\alpha$.

22. 已知 α 是第二象限角，$\sin\alpha=\frac{3}{5}$，β 是第四象限角，$\cos\beta=\frac{4}{5}$，求 $\cos(\alpha+\beta)$ 的值.

23. 已知函数 $f(x)=2\sin\left(\frac{1}{3}x-\frac{\pi}{6}\right)$，$x\in\mathbf{R}$.

(1)求 $f\left(\frac{5\pi}{4}\right)$ 的值；

(2)设 $\alpha,\beta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，$f\left(3\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{10}{13}$，$f(3\beta+2\pi)=\frac{6}{5}$. 求 $\cos(\alpha+\beta)$ 的值.

24. 已知 $\sin(\alpha+\beta)=\frac{1}{3}$，$\sin(\alpha-\beta)=\frac{1}{4}$，求 $\frac{\tan\alpha}{\tan\beta}$ 的值.

25. 已知 $\sin\theta-2\cos\theta=0$，其中 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

(1)求 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 的值；

(2)若 $5\cos(\theta-\varphi)=3\sqrt{5}\cos\varphi$，$0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，求 $\cos\varphi$ 的值.

第 2 周　二倍角公式

第Ⅰ卷(选择题　共 30 分)

一、选择题(本题有 10 小题,每小题 3 分,共 30 分.在每小题所给出的选项中只有一个符合题目要求)

1. 已知 $\sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{2}$,$\alpha\in(0,\pi)$,则 $\sin 2\alpha=$　(　　)

A. -1　B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　D. 1

2. 已知 α 是第二象限角,且 $\sin\alpha=\frac{5}{13}$,则 $\tan 2\alpha$ 的值是　(　　)

A. $\frac{5}{12}$　B. $-\frac{5}{12}$　C. $\frac{120}{119}$　D. $-\frac{120}{119}$

3. $\frac{2\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}\cdot\frac{\cos^2\alpha}{\cos 2\alpha}=$　(　　)

A. $\tan\alpha$　B. $\tan 2\alpha$　C. 1　D. $\frac{1}{2}$

4. 已知 $\sin\theta=\frac{3}{4}$,且 θ 为第二象限角,那么 2θ 为　(　　)

A. 第一象限角　B. 第二象限角　C. 第三象限角　D. 第四象限角

5. 已知 $\frac{1+\cos 2\theta}{\sin 2\theta}=2$,则 $\tan\theta=$　(　　)

A. 2　B. -2　C. $\frac{1}{2}$　D. $-\frac{1}{2}$

6. 式子 $\sqrt{1+\sin 40^\circ}+\sqrt{1-\sin 40^\circ}$ 化简的结果是　(　　)

A. $2\sin 20^\circ$　B. $2\cos 20^\circ$　C. $\pm 2\sin 20^\circ$　D. $\pm\cos 20^\circ$

7. 已知 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{2}$,则 $\sin 2\alpha=$　(　　)

A. $\frac{1}{4}$　B. $-\frac{1}{4}$　C. $\frac{3}{4}$　D. $-\frac{3}{4}$

8. 如果 $\sin\theta=\frac{3}{5}$ 且 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$,那么 $\tan\frac{\theta}{2}=$　(　　)

A. 3　B. $\frac{1}{3}$　C. 5　D. 6

9. 如果 $x=\frac{\pi}{12}$,那么 $\cos^4x-\sin^4x=$　(　　)

A. 0　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　D. $\frac{1}{2}$

10. $\sin 15^\circ\cos 15^\circ=$　(　　)

A. $\frac{\sqrt{3}}{4}$　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　C. $\frac{1}{4}$　D. $\frac{1}{2}$

第Ⅱ卷(非选择题　共 70 分)

二、填空题(本题有 10 个空,每空 3 分,共 30 分.请将正确答案填在题中横线上,不填、少填、错填均不得分)

11. 求值:$\cos^2 75^\circ+\cos^2 15^\circ+\cos 75^\circ\cos 15^\circ=$__________.

12. 已知 $\cos 2\theta=\frac{\sqrt{2}}{3}$,则 $\sin^4\theta+\cos^4\theta=$__________.

13. 若 $\frac{\cos 2\alpha}{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$,则 $\sin\alpha+\cos\alpha=$__________.

14. $\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\sin^2 22.5^\circ=$__________.

15. 已知 $\sin x=\frac{\sqrt{5}-1}{3}$,则 $\cos 2x=$__________.

16. 若角 α 的终边经过点 $P\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,则 $\sin 2\alpha=$__________.

17. 若 $\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=2\ 023$,则 $\frac{1}{\cos 2\alpha}+\tan 2\alpha=$__________.

18. 若 $\tan\alpha=\frac{-\cos\alpha}{3+\sin\alpha}$,则 $\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=$__________.

19. 已知 $\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{3}$,则 $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$ 的值为__________.

20. 已知 $\tan\theta=2$,则 $\frac{1-\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta}$ 的值是__________.

三、解答题(本题有 5 小题,每小题 8 分,共 40 分)

21. 化简:$\dfrac{2\cos^2\alpha-1}{2\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)}$.

22. 已知 $\tan\alpha=2$.

(1)求 $\tan 2\alpha$ 的值;

(2)求$\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$的值.

23. 已知 $\alpha,\beta\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$,且 $\sin\dfrac{\alpha}{2}+\cos\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

(1)求 $\cos\alpha$ 的值;

(2)若 $\sin(\alpha-\beta)=-\dfrac{3}{5}$,求 $\cos\beta$ 的值.

24. 已知 $\tan\alpha=-3$,$\cos\beta=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$且$\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$,$\dfrac{3\pi}{2}<\beta<2\pi$.

(1)求 $\tan 2\alpha$ 的值;

(2)求 $\alpha+\beta$ 的值.

25. 设 $f(x)=2\sin x\cos x-2\sin^2\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$. 当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$时,$f\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{1}{3}$,求 $\cos 2x$ 的值.

第 3 周　正弦型函数的图像和性质

第Ⅰ卷(选择题　共 30 分)

一、选择题(本题有 10 小题,每小题 3 分,共 30 分. 在每小题所给出的选项中只有一个符合题目要求)

1. 函数 $y=\sin 2x$ 的最小正周期是　(　　)

A. $\frac{\pi}{2}$　　B. π　　C. 2π　　D. 4π

2. 函数 $y=1-2\sin\frac{\pi}{2}x$ 的最小值、最大值分别是　(　　)

A. $-1,3$　　B. $-1,1$　　C. $0,3$　　D. $0,1$

3. 将函数 $y=\sin 2x$ 的图像向左平移$\frac{\pi}{4}$个单位长度,再向上平移 1 个单位长度,所得图像的函数解析式是　(　　)

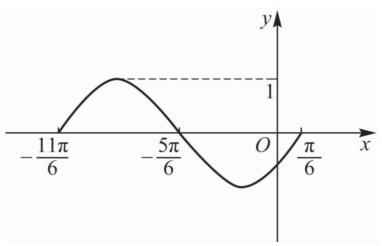
A. $y=\cos 2x$　　B. $y=2\cos^2 x$

C. $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+1$　　D. $y=2\sin^2 x$

4. 既是偶函数又在区间$(0,\pi)$上单调递减的函数是　(　　)

A. $y=\sin x$　　B. $y=\sin 2x$　　C. $y=\cos x$　　D. $y=\cos 2x$

5. 函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$的图像如图所示,其中 $A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,则下列关于函数 $f(x)$的说法正确的是　(　　)



A. 对称轴方程是 $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$

B. $\varphi=\frac{\pi}{6}$

C. 最小正周期是 π

D. 在区间$\left(\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right)$上单调递减

6. 若函数 $f(x)$同时满足下列三个性质:①最小正周期为 π;②图像关于直线 $x=\frac{\pi}{3}$对称;③在区间$\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$上是增函数. 则 $f(x)$的解析式可以是　(　　)

A. $f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$　　B. $f(x)=\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$

C. $f(x)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$　　D. $f(x)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$

7. 下列函数中,最小正周期为$\frac{\pi}{2}$的偶函数是　(　　)

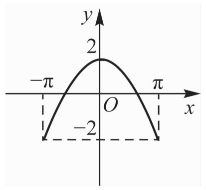
A. $y=\sin 4x$　　B. $y=\cos 4x$

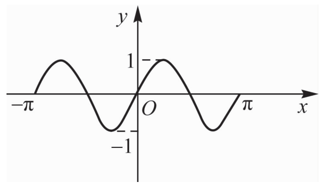
C. $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$　　D. $y=\cos 2x$

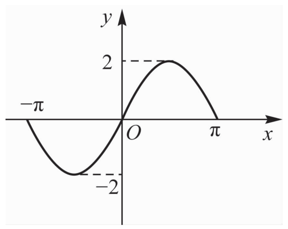
8. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$既是偶函数又是周期函数. 若 $f(x)$的最小正周期是 π,且当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$时,$f(x)=\sin x$,则 $f\left(\frac{5\pi}{3}\right)$的值为　(　　)

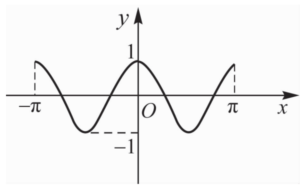
A. $-\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

9. 函数 $y=2\sin x$ 在区间$[-\pi,\pi]$上的图像是　(　　)

A. 

B. 

C. 

D. 

10. 若将函数 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$的图像变为函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$的图像,则需将第一个函数的图像　(　　)

A. 向左平移$\frac{5\pi}{12}$个单位长度　　B. 向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度

C. 向右平移$\frac{5\pi}{12}$个单位长度　　D. 向右平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度

第Ⅱ卷(非选择题　共70分)

二、填空题(本题有10个空,每空3分,共30分.请将正确答案填在题中横线上,不填、少填、错填均不得分)

11. 函数 $y=4\cos\omega x(\omega>0)$ 的最小正周期为 $\frac{3\pi}{2}$,则 $\omega=$__________.

12. 函数 $y=3\sin\left(-2x-\frac{\pi}{6}\right)(x\in[0,\pi])$ 的增区间为__________.

13. 函数 $y=\sqrt{3}\sin x+\cos x$ 的最大值是__________.

14. 函数 $y=2-\frac{3}{5}\cos x$ 取得最大值时,对应的 x 的值为__________.

15. 函数 $y=A\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{2}(A>0)$ 的最大值是 $\frac{7}{2}$,最小值是 $-\frac{5}{2}$,则 $A=$__________.

16. 函数 $y=4\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的最小正周期是__________,最大值是__________,最小值是__________.

17. 函数 $y=\sin^4x+\cos^4x$ 的最大值是__________,最小正周期是__________.

三、解答题(本题有5小题,每小题8分,共40分)

18. 已知函数 $f(x)=1+2\sin x\cos x$.

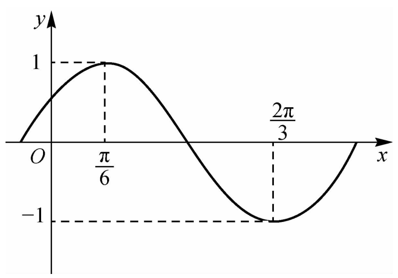
(1)求函数 $f(x)$ 的最小正周期;

(2)求函数 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}\right]$ 上的最大值和最小值.

19. 函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的部分图像如图所示.

(1)求 $f(x)$ 的最小正周期及解析式;

(2)设 $g(x)=f(x)-\cos 2x$,求函数 $g(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值和最小值.



20. 求函数 $y=3\sin\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的单调区间.

21. 已知函数 $y=2\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{3}\right)(\omega>0)$ 的最小正周期为 π. 求:

(1)ω 的值;

(2)函数的最大值及取得最大值时相应的 x 的值.

22. 已知函数 $f(x)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$,$x\in\mathbf{R}$.

(1)作出函数 $f(x)$ 在一个周期上的简图;

(2)根据图像求解不等式 $2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)>0$ 的解集.

第 4 周　解三角形与三角计算的应用

第Ⅰ卷(选择题　共 30 分)

一、选择题(本题有 10 小题,每小题 3 分,共 30 分.在每小题所给出的选项中只有一个符合题目要求)

1. 在△ABC 中,∠A,∠B,∠C 的对边分别为 a,b,c,已知∠$A=\frac{\pi}{3}$,$a=\sqrt{3}$,$b=1$,则 c 等于　(　　)

A. 1　　B. 2　　C. $\sqrt{3}-1$　　D. $\sqrt{3}$

2. 在△ABC 中,∠A,∠B,∠C 所对的边分别为 a,b,c,若 $c\cos C=b\cos B$,则△ABC 的形状是　(　　)

A. 等腰三角形　　B. 直角三角形

C. 等腰或直角三角形　　D. 等边三角形

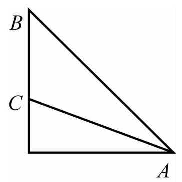
3. 在△ABC 中,∠A,∠B,∠C 的对边分别为 a,b,c,∠$A=60°$,且最大边长和最小边长是方程 $x^2-7x+11=0$ 的两个根,则第三边的长为　(　　)

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

4. △ABC 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,已知 $b=2$,∠$B=\frac{\pi}{6}$,∠$C=\frac{\pi}{4}$,则△ABC 的面积为　(　　)

A. $2\sqrt{3}+2$　　B. $\sqrt{3}+1$　　C. $2\sqrt{3}-2$　　D. $\sqrt{3}-1$

5. 如图,要测出山上石油钻井的井架 BC 的高,从山脚 A 测得 $AC=60$ m,架顶 B 的仰角为 45°,架底 C 的仰角为 15°,则井架 BC 的高为　(　　)



A. $20\sqrt{2}$ m　　B. $30\sqrt{2}$ m

C. $20\sqrt{3}$ m　　D. $30\sqrt{3}$ m

6. 已知三角形的三边长分别为 a,b,$\sqrt{a^2+ab+b^2}$,则三角形的最大内角是　(　　)

A. 135°　　B. 120°　　C. 60°　　D. 90°

7. 在△ABC 中,下列等式一定成立的是　(　　)

A. $a\sin A=b\sin B$　　B. $a\cos A=b\cos B$

C. $a\sin B=b\sin A$　　D. $a\cos B=b\cos A$

8. 在△ABC 中,∠A,∠B,∠C 的对边分别为 a,b,c,若$(a^2+c^2-b^2)\tan B=\sqrt{3}ac$,则∠$B$ 为(　　)

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{\pi}{6}$或$\frac{5\pi}{6}$　　D. $\frac{\pi}{3}$或$\frac{2\pi}{3}$

9. 在△ABC 中,若$\frac{\sin C}{\sin A}=2$,$b^2-a^2=\frac{3}{2}ac$,则 $\cos B=$　(　　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{5}$

10. 在△ABC 中,"∠A>∠B"是"$\sin A>\sin B$"的　(　　)

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

第Ⅱ卷(非选择题　共 70 分)

二、填空题(本题有 10 个空,每空 3 分,共 30 分.请将正确答案填在题中横线上,不填、少填、错填均不得分)

11. 在△ABC 中,∠A,∠B,∠C 所对的边分别为 a,b,c,已知 $a=3$,$b=2$,∠$A=60°$,则 $\cos B=$__________.

12. 在△ABC 中,已知 $a=4$,$b=5$,$c=7$,则△ABC 是__________三角形.

13. 在锐角△ABC 中,∠A,∠B 所对的边分别为 a,b,若 $2a\sin B=\sqrt{3}b$,则∠$A=$__________.

14. 在△ABC 中,∠A,∠B,∠C 的对边分别为 a,b,c,已知△ABC 的面积为$\frac{3}{2}$,$c=\sqrt{3}$,$b=2$,则∠A 等于__________.

15. 在△ABC 中,∠A,∠B,∠C 的对边分别是 a,b,c,若 a,b,c 成等差数列,∠$B=30°$,△ABC 的面积为$\frac{3}{2}$,则 $b=$__________.

16. 已知△ABC 的三边长分别为 a,b,c,且面积 $S=\frac{a^2+b^2-c^2}{4}$,则∠$C=$__________.

17. 在△ABC 中,$a^2=b^2+c^2+\sqrt{3}bc$,则∠$A=$__________.

18. 在△ABC 中,若 $\sin A:\sin B=2:3$,则$\frac{a+b}{a}=$__________.

19. 已知在△ABC 中,$AB=\sqrt{3}$,$AC=1$,∠$B=30°$,则 $S_{\triangle ABC}=$__________.

20. 在△ABC 中,三个内角∠A,∠B,∠C 的对边分别为 a,b,c,已知 $a=\sqrt{2}b$,∠$A=2$∠B,则∠$B=$__________.

三、解答题(本题有 5 小题,每小题 8 分,共 40 分)

21. 在$\triangle ABC$中,$BC=7$,$AB=3$,且$\frac{\sin C}{\sin B}=\frac{3}{5}$.

(1)求 AC;

(2)求$\angle A$.

22. 在$\triangle ABC$中,D 为 BC 边上一点,$BD=33$,$\sin B=\frac{5}{13}$,$\cos\angle ADC=\frac{3}{5}$,求 AD.

23. 在$\triangle ABC$中,已知$\frac{a}{\cos A}=\frac{b}{\cos B}=\frac{c}{\cos C}$,求证:$\triangle ABC$是等边三角形.

24. 有一人欲测河的宽度,在一岸边选定 B,C 两点,望对岸岸边的标记物 A,测得$\angle ABC=45°$,$\angle ACB=75°$,$BC=120$ m,求河宽.(精确到 0.01 m)

25. 在$\triangle ABC$中,$\angle A$,$\angle B$,$\angle C$ 所对的边分别为 a,b,c,已知 $b+c=2a\cos B$.

(1)证明:$\angle A=2\angle B$;

(2)若 $\cos B=\frac{2}{3}$,求 $\cos C$ 的值.

数学滚动强训

（拓展模块 1 · 下）

参考答案及解析

目　　录

第1周 和角公式

一、选择题

1. A 解析：因为 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{6}}{3}$，所以 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\alpha\cos\frac{\pi}{6}-\sin\alpha\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{6}}{6}$. 故选 A.

2. C 解析：因为 $\tan\alpha,\tan\beta$ 是方程 $x^2+3\sqrt{3}x+4=0$ 的两根，所以 $\tan\alpha+\tan\beta=-3\sqrt{3}$，$\tan\alpha\tan\beta=4$，则 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\sqrt{3}$. 又因为 $\alpha,\beta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\alpha+\beta\in(-\pi,\pi)$，所以 $\alpha+\beta=-\frac{2\pi}{3}$ 或 $\frac{\pi}{3}$. 故选 C.

3. A 解析：$\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\alpha}{1+\tan\frac{\pi}{4}\cdot\tan\alpha}=-7$. 故选 A.

4. C

5. A

6. B

7. B

8. B 解析：原式 $=\cos 57^\circ\cos 3^\circ-\sin 57^\circ\sin 3^\circ=\cos(57^\circ+3^\circ)=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$.

9. B 解析：$\cos 105^\circ=\cos(45^\circ+60^\circ)=\cos 45^\circ\cdot\cos 60^\circ-\sin 45^\circ\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$.

10. D 解析：因为 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha+\frac{1}{2}\cos\alpha-\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha-\frac{1}{2}\cos\alpha=\frac{4}{5}$，即 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{4}{5}$，所以 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left[\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{2}\right]=-\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{4}{5}$.

二、填空题

11. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 解析：$\sin 28^\circ\cos 73^\circ-\sin 62^\circ\cos 17^\circ=\sin 28^\circ\cos 73^\circ-\sin(90^\circ-28^\circ)\cdot\cos(90^\circ-73^\circ)=\sin 28^\circ\cos 73^\circ-\cos 28^\circ\sin 73^\circ=\sin(28^\circ-73^\circ)=\sin(-45^\circ)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

12. $\frac{1}{2}$ 解析：$\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\alpha+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\alpha\tan\frac{\pi}{4}}+\frac{\tan\alpha-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan\alpha\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{\tan\alpha+1}{1-\tan\alpha}+\frac{\tan\alpha-1}{1+\tan\alpha}=\frac{(\tan\alpha+1)^2-(\tan\alpha-1)^2}{1-\tan^2\alpha}=\frac{4\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=2\times\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=2\tan 2\alpha=2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.

13. 0 解析：因为 $\sin\alpha=\frac{1}{2}$，$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，可求得 $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，故 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\alpha\cos\frac{\pi}{3}+\sin\alpha\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=0$.

14. $\frac{1}{2}$ 解析：$\sin 7^\circ\cos 23^\circ+\sin 83^\circ\cos 67^\circ=\cos 83^\circ\cdot\cos 23^\circ+\sin 83^\circ\sin 23^\circ=\cos(83^\circ-23^\circ)=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$.

15. $\frac{4\sqrt{2}-3\sqrt{14}}{20}$ 解析：已知 $5\sqrt{3}\sin x+5\cos x=6$，

$\sqrt{2}\sin y+\sqrt{6}\cos y=1$，

则 $10\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=6$，$2\sqrt{2}\sin\left(y+\frac{\pi}{3}\right)=1$，

即 $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{5}$，$\sin\left(y+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}$，

又 $x\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$，$y\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$，

则 $x+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$，$y+\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}\right)$，

则 $\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$，$\cos\left(y+\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2}=-\frac{\sqrt{14}}{4}$，

则 $\cos(x+y)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x+y\right)$

$=\sin\left[\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\left(y+\frac{\pi}{3}\right)\right]$

$=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(y+\frac{\pi}{3}\right)+$

$\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(y+\frac{\pi}{3}\right)$

$=\frac{3}{5}\times\left(-\frac{\sqrt{14}}{4}\right)+\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{4\sqrt{2}-3\sqrt{14}}{20}$.

16\. -1 **解析：**由已知得 $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$，$\sin(\alpha-\beta)=\frac{3}{5}$，所以 $\cos\beta=\cos[\alpha-(\alpha-\beta)]=\cos\alpha\cos(\alpha-\beta)+\sin\alpha\sin(\alpha-\beta)=\frac{4}{5}\times\left(-\frac{4}{5}\right)+\left(-\frac{3}{5}\right)\times\frac{3}{5}=-1$.

17\. $-\frac{\sqrt{2}}{10}$ **解析：**因为 $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$，α 是第三象限的角，则 $\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\frac{4}{5}$，所以 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(-\frac{4}{5}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(-\frac{3}{5}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{10}$.

18\. 2 **解析：**$\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{\tan\alpha-1}{\tan\alpha+1}=$

$\frac{\tan\alpha-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan\alpha\cdot\tan\frac{\pi}{4}}=\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=2$.

19\. $\frac{24}{25}$ **解析：**由于 $\cos B=-\frac{3}{5}<0$，所以 B 为钝角，则 A，C 为锐角，所以 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2A}=\frac{3}{5}$，$\sin B=\sqrt{1-\cos^2B}=\frac{4}{5}$，所以 $\cos C=-\cos(A+B)=\sin A\sin B-\cos A\cos B=\frac{3}{5}\times\frac{4}{5}-\frac{4}{5}\times\left(-\frac{3}{5}\right)=\frac{24}{25}$.

20\. $\frac{5}{13}$ **解析：**$\because 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$0<\beta<\frac{\pi}{2}$，

$\therefore 0<\alpha+\beta<\pi$.

由 $\cos(\alpha+\beta)=-\frac{16}{65}$，得 $\sin(\alpha+\beta)=\sqrt{1-\cos^2(\alpha+\beta)}=\sqrt{1-\left(-\frac{16}{65}\right)^2}=\frac{63}{65}$.

又 $\cos\alpha=\frac{4}{5}$，

$\therefore\sin\alpha=\frac{3}{5}$.

$\therefore\cos\beta=\cos[(\alpha+\beta)-\alpha]=\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha+\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha=\left(-\frac{16}{65}\right)\times\frac{4}{5}+\frac{63}{65}\times\frac{3}{5}=\frac{5}{13}$.

三、解答题

21\. **证明：**左边 $=\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$

$=\left(\cos\alpha\cos\frac{\pi}{4}-\sin\alpha\sin\frac{\pi}{4}\right)+\left(\cos\alpha\cos\frac{\pi}{4}+\sin\alpha\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$=2\cos\alpha\cos\frac{\pi}{4}$

$=\sqrt{2}\cos\alpha=$ 右边.

所以原等式成立.

22\. **解：**因为 α 是第二象限角，$\sin\alpha=\frac{3}{5}$，

所以 $\cos\alpha=-\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=-\frac{4}{5}$.

因为 β 是第四象限角，$\cos\beta=\frac{4}{5}$，

所以 $\sin\beta=-\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=-\frac{3}{5}$.

所以 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=-\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}-\frac{3}{5}\times\left(-\frac{3}{5}\right)=-\frac{7}{25}$.

23\. **解：**(1) $f\left(\frac{5\pi}{4}\right)=2\sin\left(\frac{1}{3}\times\frac{5\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)$

$=2\sin\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}$.

(2) $f\left(3\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=2\sin\left[\frac{1}{3}\left(3\alpha+\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\pi}{6}\right]=2\sin\alpha=\frac{10}{13}$，

所以 $\sin\alpha=\frac{5}{13}$.

$f(3\beta+2\pi)=2\sin\left[\frac{1}{3}(3\beta+2\pi)-\frac{\pi}{6}\right]=$

$2\sin\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)=2\cos\beta=\frac{6}{5}$,

所以 $\cos\beta=\frac{3}{5}$.

又因为 $\alpha,\beta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,

所以 $\cos\alpha=\frac{12}{13}$, $\sin\beta=\frac{4}{5}$,

所以 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{12}{13}\times\frac{3}{5}-\frac{5}{13}\times\frac{4}{5}=\frac{16}{65}$.

24. **解:** 由题意可得

$$\begin{cases}\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{3}①,\\ \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{4}②,\end{cases}$$

由①+②,①-②可得

$2\sin\alpha\cos\beta=\frac{7}{12}$, $2\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{12}$.

所以$\frac{\tan\alpha}{\tan\beta}=\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}=\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\sin\beta}=7$.

25. **解:** (1)因为 $\sin\theta-2\cos\theta=0$,即 $\sin\theta=2\cos\theta$,

又因为 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$,

所以 $4\cos^2\theta+\cos^2\theta=1$,

即 $\cos^2\theta=\frac{1}{5}$,所以 $\sin^2\theta=\frac{4}{5}$,

又 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,所以 $\cos\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\sin\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

(2)因为 $5\cos(\theta-\varphi)=5\cos\theta\cos\varphi+5\sin\theta\sin\varphi=5\times\frac{\sqrt{5}}{5}\times\cos\varphi+5\times\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\sin\varphi=\sqrt{5}\cos\varphi+2\sqrt{5}\sin\varphi=3\sqrt{5}\cos\varphi$,

所以 $\sin\varphi=\cos\varphi$,

所以 $\cos^2\varphi=\sin^2\varphi=1-\sin^2\varphi$,即 $\sin^2\varphi=\frac{1}{2}$,

又 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$,所以 $\cos\varphi=\sqrt{1-\sin^2\varphi}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

第 2 周　二倍角公式

一、选择题

1. A　**解析:** 将 $\sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{2}$的两端同时平方得 $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2$,整理得 $1-2\sin\alpha\cos\alpha=2$,于是 $2\sin\alpha\cos\alpha=\sin 2\alpha=-1$. 故选 A.

2. D　**解析:** 因为角 α 是第二象限角,利用同角关系式可知 $\cos\alpha=-\frac{12}{13}$,所以 $\tan\alpha=-\frac{5}{12}$,所以 $\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=-\frac{120}{119}$. 故选 D.

3. B　**解析:** 原式$=\frac{2\sin 2\alpha}{2-2\sin^2\alpha}\cdot\frac{1-\sin^2\alpha}{\cos 2\alpha}=\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\tan 2\alpha$. 故选 B.

4. C

5. C　**解析:** 由题意,得$\frac{1+\cos 2\theta}{\sin 2\theta}$

$=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta+\cos^2\theta-\sin^2\theta}{2\sin\theta\cos\theta}$

$=\frac{2\cos^2\theta}{2\sin\theta\cos\theta}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{1}{\tan\theta}=2$,所以 $\tan\theta=\frac{1}{2}$.

6. B　**解析:** $\sqrt{1+\sin 40^\circ}=\sqrt{\sin^2 20^\circ+\cos^2 20^\circ+2\sin 20^\circ\cos 20^\circ}=\sqrt{(\sin 20^\circ+\cos 20^\circ)^2}=|\sin 20^\circ+\cos 20^\circ|=\sin 20^\circ+\cos 20^\circ$,同理 $\sqrt{1-\sin 40^\circ}=|\sin 20^\circ-\cos 20^\circ|$. 因为 $\cos 20^\circ=\sin 70^\circ$且 $y=\sin x$ 在$[0^\circ,90^\circ]$上单调递增,所以 $\sin 20^\circ<\sin 70^\circ$,即 $\sin 20^\circ<\cos 20^\circ$,所以 $\sqrt{1-\sin 40^\circ}=\cos 20^\circ-\sin 20^\circ$,故 $\sqrt{1+\sin 40^\circ}+\sqrt{1-\sin 40^\circ}=2\cos 20^\circ$.

7. D

8. A　**解析:** $\tan\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$,故应求出 $\cos\theta$. 因为 $\sin\theta=\frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$,所以 $\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}=-\frac{4}{5}$, $\tan\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{1-\left(-\frac{4}{5}\right)}{\frac{3}{5}}=\frac{9}{5}\times\frac{5}{3}=3$. 故选 A.

9. B　**解析:** $\cos^4x-\sin^4x=(\cos^2x+\sin^2x)(\cos^2x-\sin^2x)=\cos 2x=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

10. C　**解析：**$\sin 15°\cos 15°=\frac{1}{2}\times 2\sin 15°\cos 15°=\frac{1}{2}\sin 30°=\frac{1}{4}$.

二、填空题

11. $\frac{5}{4}$　**解析：**原式$=\sin^2 15°+\cos^2 15°+\sin 15°\cos 15°=1+\frac{1}{2}\sin 30°=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$.

12. $\frac{11}{18}$　**解析：**根据二倍角公式可得 $\cos^2\theta=\frac{1}{2}(\cos 2\theta+1)=\frac{3+\sqrt{2}}{6}$,

$\sin^2\theta=\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)=\frac{3-\sqrt{2}}{6}$,

所以 $\sin^4\theta+\cos^4\theta=\left(\frac{3+\sqrt{2}}{6}\right)^2+\left(\frac{3-\sqrt{2}}{6}\right)^2=\frac{11}{18}$.

13. $\frac{1}{2}$　**解析：**将 $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$，$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha-\cos\alpha)$代入$\frac{\cos 2\alpha}{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}$,

得$\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha-\cos\alpha)}=-\sqrt{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$,

则 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{2}$.

14. $\frac{\sqrt{2}}{6}$

15. $\frac{4\sqrt{5}}{9}-\frac{1}{3}$

16. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　**解析：**由正弦、余弦函数的定义可得 $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos\alpha=\frac{1}{2}$，所以 $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

17. $\frac{1}{2\ 023}$　**解析：**因为$\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=2\ 023$，则 $\tan\alpha\neq 0$，

$\frac{1}{\cos 2\alpha}+\tan 2\alpha=\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$

$=\frac{\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$

$=\frac{(\cos\alpha+\sin\alpha)^2}{(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha)}$

$=\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=\frac{1}{2\ 023}$.

18. $\frac{7}{9}$　**解析：**$\because \tan\alpha=\frac{-\cos\alpha}{3+\sin\alpha}$,

$\therefore \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{-\cos\alpha}{3+\sin\alpha}$,

即 $3\sin\alpha+\sin^2\alpha=-\cos^2\alpha$,

$\therefore 3\sin\alpha=-(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=-1$,

即 $\sin\alpha=-\frac{1}{3}$,

$\therefore \sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=\frac{7}{9}$.

19. $\frac{5}{3}$　**解析：**易知 $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left[2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\pi\right]$

$=-\cos\left[2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right]$,

由二倍角公式可得 $-\cos\left[2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right]=1-2\cos^2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=1-2\times\frac{1}{9}=\frac{7}{9}$,

即 $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{7}{9}$,

而 $\sin^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\sin^2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

$=1-\cos^2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$,

所以 $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\frac{7}{9}+\frac{8}{9}=\frac{5}{3}$.

20. $\frac{1}{2}$　**解析：**因为 $\tan\theta=2$,

所以$\frac{1-\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta-\sin^2\theta+\cos^2\theta}$

$=\frac{\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+1-2\times\frac{\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta}}{2}=\frac{\tan^2\theta-2\tan\theta+1}{2}$

$=\frac{4-4+1}{2}=\frac{1}{2}$.

三、解答题

21. **解：**$\frac{2\cos^2\alpha-1}{2\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}$

$=\frac{\cos 2\alpha}{2\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}$

$=\frac{\cos 2\alpha}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}$

$=\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+2\alpha\right)}=1.$

22. **解**:(1) $\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\dfrac{4}{1-4}=-\dfrac{4}{3}.$

(2) $\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\dfrac{\tan\alpha+1}{\tan\alpha-1}=\dfrac{2+1}{2-1}=3.$

23. **解**:(1)因为 $\left(\sin\dfrac{\alpha}{2}+\cos\dfrac{\alpha}{2}\right)^2$

$=1+2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{3}{2}$,

所以 $\sin\alpha=2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{2}.$

又因为 $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$,

所以 $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

(2)因为 $\alpha,\beta\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$,所以 $-\dfrac{\pi}{2}<\alpha-\beta<\dfrac{\pi}{2}$,

由 $\sin(\alpha-\beta)=-\dfrac{3}{5}$,

得 $\cos(\alpha-\beta)=\sqrt{1-\sin^2(\alpha-\beta)}=\dfrac{4}{5}$,

所以 $\cos\beta=\cos[\alpha-(\alpha-\beta)]$

$=\cos\alpha\cos(\alpha-\beta)+\sin\alpha\sin(\alpha-\beta)$

$=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{4}{5}+\dfrac{1}{2}\times\left(-\dfrac{3}{5}\right)$

$=-\dfrac{4\sqrt{3}+3}{10}.$

24. **解**:(1)因为 $\tan\alpha=-3$,

所以 $\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\dfrac{2\times(-3)}{1-(-3)^2}=\dfrac{3}{4}.$

(2)因为 $\cos\beta=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$,$\dfrac{3\pi}{2}<\beta<2\pi$,

所以 $\sin\beta=-\sqrt{1-\cos^2\beta}=-\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)^2}=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$,所以 $\tan\beta=\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}=\dfrac{-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}}{\dfrac{\sqrt{5}}{5}}=-2$,

所以 $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{-3-2}{1-(-3)\times(-2)}=1$,

因为 $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$,$\dfrac{3\pi}{2}<\beta<2\pi$,所以 $2\pi<\alpha+\beta<3\pi$,所以 $\alpha+\beta=\dfrac{9\pi}{4}.$

25. **解**:由题意得 $f(x)=\sin 2x+\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{2}\right)-1=2\sin 2x-1$,

$\because f\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)-1=-\dfrac{1}{3}$,

$\therefore \sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{3}$,

$\because x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,$\therefore 2x+\dfrac{\pi}{3}\in\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{4\pi}{3}\right).$

$\because$ 当 $2x+\dfrac{\pi}{3}\in\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 时,$\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)>\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}>\dfrac{1}{3}$,

$\therefore 2x+\dfrac{\pi}{3}\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$,

$\therefore \cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{1-\sin^2\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)}=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$,

$\therefore \cos 2x=\cos\left[\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)-\dfrac{\pi}{3}\right]$

$=\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)\cos\dfrac{\pi}{3}+\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)\sin\dfrac{\pi}{3}$

$=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{6}.$

第 3 周　正弦型函数的图像和性质

一、选择题

1. B　**解析**:最小正周期 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$. 故选 B.

2. A　**解析**:因为 $\sin\dfrac{\pi}{2}x\in[-1,1]$,所以 $-2\sin\dfrac{\pi}{2}x\in[-2,2]$,所以 $y=1-2\sin\dfrac{\pi}{2}x\in[-1,3]$,所以 $y_{\min}=-1$,$y_{\max}=3$.

3. B　**解析**:将函数 $y=\sin 2x$ 的图像向左平移 $\dfrac{\pi}{4}$ 个单位长度,得到函数 $y=\sin\left[2\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\right]=\cos 2x$ 的图像,再将其向上平移 1 个单位长度,所得图像的函数解析式为 $y=1+\cos 2x=2\cos^2 x$. 故选 B.

4. C　**解析**:结合余弦函数的图像易知 $y=\cos x$ 既是偶

函数，又在区间$(0,\pi)$上单调递减，$y=\sin 2x$，$y=\sin x$都是奇函数，$y=\cos 2x$在区间$(0,\pi)$上不单调. 故选 C.

5. D　**解析：**由题图可知，函数的最小正周期为2π，排除选项 C. 由$\dfrac{-\frac{11\pi}{6}-\frac{5\pi}{6}}{2}=-\dfrac{4\pi}{3}$，得对称轴方程为$x=-\dfrac{4\pi}{3}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，也就是$x=\dfrac{2\pi}{3}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，排除选项 A. 由题图知$A=1$，$\omega=\dfrac{2\pi}{T}=1$，所以$f(x)=\sin(x+\varphi)$，所以$f\left(-\dfrac{11\pi}{6}\right)=\sin\left(-\dfrac{11\pi}{6}+\varphi\right)=0$，所以$-\dfrac{11\pi}{6}+\varphi=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，由$|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$得$\varphi=-\dfrac{\pi}{6}$，排除选项 B. 故选 D.

6. A　**解析：**利用排除法，由性质①排除选项 B，由性质②排除选项 C，由性质③排除选项 D. 故选 A.

7. B　**解析：**选项 A 为奇函数，选项 C 为非奇非偶函数，选项 D 为偶函数，但其最小正周期$T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$. 故选 B.

8. D　**解析：**因为$f(x)$的最小正周期是π，

所以$f\left(\dfrac{5\pi}{3}\right)=f\left(\dfrac{5\pi}{3}-2\pi\right)=f\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

又因为函数$f(x)$是偶函数，

所以$f\left(\dfrac{5\pi}{3}\right)=f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 故选 D.

9. C

10. A　**解析：**根据“左加右减”的平移规律可得$y=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin\left[2\left(x+\dfrac{5\pi}{12}\right)-\dfrac{\pi}{3}\right]$. 故选 A.

二、填空题

11. $\dfrac{4}{3}$　**解析：**根据题意得$\dfrac{2\pi}{\omega}=\dfrac{3\pi}{2}$，解得$\omega=\dfrac{4}{3}$.

12. $\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{2\pi}{3}\right]$

13. 2　**解析：**$y=\sqrt{3}\sin x+\cos x=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\dfrac{1}{2}\cos x\right)=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$，所以最大值为 2.

14. $(2k+1)\pi(k\in\mathbf{Z})$　**解析：**当$\cos x=-1$，即$x=(2k+1)\pi(k\in\mathbf{Z})$时，函数$y=2-\dfrac{3}{5}\cos x$取得最大值.

15. 3　**解析：**当$\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)=1$时，$y_{\max}=A+\dfrac{1}{2}=\dfrac{7}{2}$；当$\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)=-1$时，$y_{\min}=-A+\dfrac{1}{2}=-\dfrac{5}{2}$，解得$A=3$.

16. π；4；-4

17. 1；$\dfrac{\pi}{2}$

三、解答题

18. **解：**$f(x)=1+2\sin x\cos x=1+\sin 2x$.

(1)$T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$，函数$f(x)$的最小正周期为π.

(2)因为$x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{6}\right]$，$2x\in\left[-\pi,\dfrac{\pi}{3}\right]$，

所以$-1\leqslant\sin 2x\leqslant\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，从而有$0\leqslant 1+\sin 2x\leqslant\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$.

所以$f(x)=1+2\sin x\cos x$的最大值为$\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$，最小值为 0.

19. **解：**(1)由题图可知$A=1$，$\dfrac{T}{2}=\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$，所以$T=\pi$，所以$\omega=\dfrac{2\pi}{T}=2$. 当$x=\dfrac{\pi}{6}$时，$f(x)=1$，

即$\sin\left(2\times\dfrac{\pi}{6}+\varphi\right)=1$，因为$|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，所以$\varphi=\dfrac{\pi}{6}$，

所以$f(x)$的解析式为$f(x)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$.

(2)$g(x)=f(x)-\cos 2x=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)-\cos 2x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\dfrac{1}{2}\cos 2x=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$.

因为$0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}$，所以$-\dfrac{\pi}{6}\leqslant 2x-\dfrac{\pi}{6}\leqslant\dfrac{5\pi}{6}$.

当$2x-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$，即$x=\dfrac{\pi}{3}$时，$g(x)$有最大值，最大值为 1；当$2x-\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{\pi}{6}$，即$x=0$时，$g(x)$有最小值，最小值为$-\dfrac{1}{2}$.

20. **解：**由$-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 3x-\dfrac{\pi}{3}\leqslant\dfrac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，

得$-\frac{\pi}{18}+\frac{2}{3}k\pi\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{18}+\frac{2}{3}k\pi(k\in\mathbf{Z})$，

即原函数的递增区间为$\left[-\frac{\pi}{18}+\frac{2}{3}k\pi,\frac{5\pi}{18}+\frac{2}{3}k\pi\right]$ $(k\in\mathbf{Z})$.

由$\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 3x-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{3}{2}\pi+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，

得$\frac{5\pi}{18}+\frac{2}{3}k\pi\leqslant x\leqslant\frac{11\pi}{18}+\frac{2}{3}k\pi(k\in\mathbf{Z})$，

即原函数的递减区间为$\left[\frac{5\pi}{18}+\frac{2}{3}k\pi,\frac{11\pi}{18}+\frac{2}{3}k\pi\right]$ $(k\in\mathbf{Z})$.

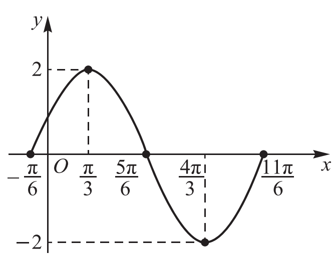
21. **解**:(1)由 $T=\frac{2\pi}{|\omega|}=\pi$ 且 $\omega>0$，得 $\omega=2$.

(2)当 $2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，即 $x=k\pi+\frac{5}{12}\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$时函数取得最大值，最大值为 2.

22. **解**:(1)列出表格.

$x+\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
x	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$
y	0	2	0	-2	0

描点:$\left(-\frac{\pi}{6},0\right)$，$\left(\frac{1}{3}\pi,2\right)$，$\left(\frac{5}{6}\pi,0\right)$，$\left(\frac{4}{3}\pi,-2\right)$，$\left(\frac{11}{6}\pi,0\right)$，连线，作出图像如图所示.



(2)由 $2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)>0$，得$-\frac{\pi}{6}+2k\pi<x<\frac{5}{6}\pi+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，故原不等式的解集为$\left(-\frac{\pi}{6}+2k\pi,\frac{5}{6}\pi+2k\pi\right)$，$k\in\mathbf{Z}$.

第 4 周　解三角形与三角计算的应用

一、选择题

1. B　**解析**:因为$\angle A=\frac{\pi}{3}$，$a=\sqrt{3}$，$b=1$，根据余弦定理可知 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，即 $1+c^2-c=3$，所以 $c=2(c=-1$ 舍). 故选 B.

2. C　**解析**:$c\cos C=b\cos B\Rightarrow c\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=b\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，所以有 $a^2c^2-c^4=a^2b^2-b^4\Rightarrow a^2(c^2-b^2)=(c^2-b^2)(c^2+b^2)$.

若 $c=b$，等式成立，三角形为等腰三角形；若 $c\neq b$，则 $a^2=c^2+b^2$，三角形为直角三角形. 故选 C.

3. C　**解析**:在$\triangle ABC$中，$\angle A=60°$，所以$\angle B$，$\angle C$不可能均大于$\angle A$或均小于$\angle A$，一角比$\angle A$大，一角比$\angle A$小，故 b，c 分别是最大边长和最小边长且为方程 $x^2-7x+11=0$ 的两个根，所以$b+c=7$，$bc=11$，第三边的长 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=(b+c)^2-2bc-bc=49-33=16$，所以 $a=4$. 故选 C.

4. B　**解析**:因为$\angle B=\frac{\pi}{6}$，$\angle C=\frac{\pi}{4}$，所以$\angle A=\frac{7\pi}{12}$.

由正弦定理得 $\frac{b}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{c}{\sin\frac{\pi}{4}}$，解得 $c=2\sqrt{2}$，所以$\triangle ABC$的面积为 $\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times2\times2\sqrt{2}\sin\frac{7\pi}{12}$，

因为 $\sin\frac{7\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)$，所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)=\sqrt{3}+1$. 故选 B.

5. B　**解析**:由题意可知，在$\triangle ABC$中，$AC=60$ m，$\angle B=45°$，$\angle BAC=45°-15°=30°$，所以由正弦定理得，$BC=\frac{AC\sin 30°}{\sin 45°}=30\sqrt{2}$(m). 故选 B.

6. B　**解析**:因为三角形的三边长分别为 a，b，$\sqrt{a^2+ab+b^2}$，其中 $\sqrt{a^2+ab+b^2}$ 最大，则三角形的最大内角是长为$\sqrt{a^2+ab+b^2}$的边所对的角，设为 θ.

由余弦定理可得 $\cos\theta=\frac{a^2+b^2-(a^2+ab+b^2)}{2ab}=-\frac{1}{2}$，所以 $\theta=120°$. 故选 B.

7. C　**解析**:由正弦定理得$\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin A}{a}$，所以 $a\sin B=$

$b\sin A$. 无法得到关于 $\cos A$ 与$\cos B$的关系式，所以仅有选项 C 正确. 故选 C.

8. D **解析:** 由$(a^2+c^2-b^2)\tan B=\sqrt{3}ac$，得$(a^2+c^2-b^2)\cdot\dfrac{\sin B}{\cos B}=\sqrt{3}ac$，利用余弦定理 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，得$\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，则$\angle B=\dfrac{\pi}{3}$或$\dfrac{2\pi}{3}$. 故选 D.

9. C **解析:** 若$\dfrac{\sin C}{\sin A}=2$，则由正弦定理可得 $c=2a$，将其代入 $b^2-a^2=\dfrac{3}{2}ac$，可得$b^2-a^2=\dfrac{3}{2}a\times 2a=3a^2$，即 $b^2=4a^2$，所以 $b=2a$. 由余弦定理可得 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{a^2+4a^2-4a^2}{4a^2}=\dfrac{1}{4}$. 故选 C.

10. C **解析:** 在$\triangle ABC$ 中，$\sin A>\sin B$ 等价于 $a>b$，大角对大边. 故选 C.

二、填空题

11. $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ **解析:** 由正弦定理$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，可得 $\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. 因为 $a>b$，所以$\angle A>\angle B$.

所以 $\cos B=\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

12. 钝角 **解析:** 因为 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{16+25-49}{2\times4\times5}=-\dfrac{1}{5}<0$，又因为$\angle C$ 是$\triangle ABC$ 的一个内角，则$\angle C$ 是钝角，所以$\triangle ABC$ 是钝角三角形.

13. 60° **解析:** 利用正弦定理化简已知等式得 $2\sin A\sin B=\sqrt{3}\sin B$. 因为 $\sin B\neq0$，所以 $\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 又因为$\angle A$ 为锐角，所以$\angle A=60^\circ$.

14. 60°或 120° **解析:** 由 $\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{3}{2}$，得 $\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，则$\angle A=60^\circ$或 120°.

15. $1+\sqrt{3}$ **解析:** 由已知得 $2b=a+c$，$\dfrac{1}{2}ac\sin 30^\circ=\dfrac{3}{2}$，所以$ac=6$，$b^2=(a+c)^2-2ac(1+\cos B)=4b^2-12\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，解得 $b^2=4+2\sqrt{3}$. 所以 $b=1+\sqrt{3}$.

16. 45°

17. 150°

18. $\dfrac{5}{2}$

19. $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$或$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

20. 45° **解析:** 由题意得$\dfrac{a}{b}=\dfrac{\sin A}{\sin B}=\sqrt{2}$，即$\sqrt{2}\sin B=\sin A$. 因为$\angle A=2\angle B$，所以$\sqrt{2}\sin B=\sin 2B$，即$\dfrac{\sin 2B}{\sin B}=\dfrac{2\sin B\cos B}{\sin B}=\sqrt{2}$，解得 $\cos B=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. 因为$\angle B$ 为$\triangle ABC$ 的内角，故$\angle B=45^\circ$.

三、解答题

21. **解:** (1) 根据正弦定理得 $\dfrac{AC}{\sin B}=\dfrac{AB}{\sin C}$，得$\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{\sin C}{\sin B}=\dfrac{3}{5}$. 又 $AB=3$，所以 $AC=\dfrac{5\times3}{3}=5$.

(2) 由余弦定理得 $\cos A=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=\dfrac{9+25-49}{2\times3\times5}=-\dfrac{1}{2}$，所以$\angle A=120^\circ$.

22. **解:** 由 $\cos\angle ADC=\dfrac{3}{5}>0$，知 $0<\angle B<\dfrac{\pi}{2}$，

由已知$\sin B=\dfrac{5}{13}$，得 $\cos B=\dfrac{12}{13}$，$\sin\angle ADC=\dfrac{4}{5}$，

从而$\sin\angle BAD=\sin(\angle ADC-B)=\sin\angle ADC\cos B-\cos\angle ADC\sin B=\dfrac{4}{5}\times\dfrac{12}{13}-\dfrac{3}{5}\times\dfrac{5}{13}=\dfrac{33}{65}$.

在$\triangle ABD$ 中，由正弦定理得$\dfrac{AD}{\sin B}=\dfrac{BD}{\sin\angle BAD}$，

所以 $AD=\dfrac{BD\cdot\sin B}{\sin\angle BAD}=\dfrac{33\times\dfrac{5}{13}}{\dfrac{33}{65}}=25$.

23. **证明:** 因为$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$($R$ 为$\triangle ABC$ 外接圆半径)，

所以 $a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$.

因为$\dfrac{a}{\cos A}=\dfrac{b}{\cos B}$，

所以$\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\sin B}{\cos B}$,即 $\sin A\cos B-\cos A\sin B=0$,

所以 $\sin(A-B)=0$.

因为 $0<\angle A<\pi, 0<\angle B<\pi$,

所以 $-\pi<\angle A-\angle B<\pi$,

所以$\angle A-\angle B=0$,即$\angle A=\angle B$.

同理可证$\angle B=\angle C$,所以$\angle A=\angle B=\angle C$.

所以$\triangle ABC$是等边三角形.

24. **解:**设河宽为 h m.

在$\triangle ABC$中,$\angle ABC=45°$,$\angle ACB=75°$,所以$\angle BAC=60°$.由正弦定理得$\frac{AC}{\sin\angle ABC}=\frac{BC}{\sin\angle BAC}$,

得 $AC=\frac{120\sin 45°}{\sin 60°}=40\sqrt{6}$(m).

用等面积法可得$\frac{1}{2}\times 120\times 40\sqrt{6}\sin 75°=\frac{1}{2}\times 120\times h$,解得 $h=40\sqrt{6}\sin 75°=40\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=20\sqrt{3}+60\approx 94.64$(m).

25. (1)**证明:**因为 $b+c=2a\cos B$,

所以 $\sin B+\sin C=2\sin A\cos B$.

因为在$\triangle ABC$中,$A+B+C=\pi$,$\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$,

所以 $\sin B=\sin A\cos B-\cos A\sin B=\sin(A-B)$.

又因为$\angle A,\angle B\in(0,\pi)$,

所以 $0<\angle A-\angle B<\pi$,

所以$\angle B=\angle A-\angle B$或$\angle B=\pi-(\angle A-\angle B)$,化为$\angle A=2\angle B$或$\angle A=\pi$(舍去),所以$\angle A=2\angle B$.

(2)**解:**因为 $\cos B=\frac{2}{3}$,所以 $\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

由(1)知$\angle A=2\angle B$,所以 $\cos A=\cos 2B=2\cos^2 B-1=-\frac{1}{9}$,$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{4\sqrt{5}}{9}$,

所以 $\cos C=-\cos(A+B)=-\cos A\cos B+\sin A\sin B=\frac{1}{9}\times\frac{2}{3}+\frac{4\sqrt{5}}{9}\times\frac{\sqrt{5}}{3}=\frac{22}{27}$.

第 5 周　第 6 章强训卷

一、选择题

1. D　**解析:**因为最小正周期是$\frac{\pi}{2}$,即$\frac{2\pi}{|\omega|}=\frac{\pi}{2}$,解得$|\omega|=4$,所以只有选项 D 符合题意.

2. C　**解析:**$f(x)=2\sin x\cos x+1=\sin 2x+1\leqslant 2$,故$f(x)$的最大值为 2,故选 C.

3. D　**解析:**根据余弦定理可知 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$,即$\frac{12}{13}=\frac{12^2+13^2-a^2}{2\times 12\times 13}$,解得 $a=5$.

4. C　**解析:**因为$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$,所以 $b=\frac{1\times\sin 45°}{\sin 30°}=\sqrt{2}$.

5. B　**解析:**由 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{1}{2}$,$b^2=ac$ 得$a^2+c^2-2ac=0$,即 $a=c$,所以 $a=b=c$. 故选 B.

6. A

7. A　**解析:**将点$\left(\cos\frac{\pi}{3},\sin\frac{\pi}{3}\right)$代入直线方程得$a\cos\frac{\pi}{3}+b\sin\frac{\pi}{3}=1$.

即 $\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\frac{\pi}{3}+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\frac{\pi}{3}\right)=1$,令 $\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$,$\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$,

则 $\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\frac{\pi}{3}+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{a^2+b^2}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=1$.

从而 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

由于$-1\leqslant\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)\leqslant 1$,所以$-1\leqslant\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\leqslant 1$,化简得$a^2+b^2\geqslant 1$.

8. A　**解析:**因为 $\omega>0$,所以$\frac{2\pi}{\omega}=\pi$,故 $\omega=2$,

则 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$,则向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度后得到 $y=2\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=2\sin 2x$.

9. C

10. C