第一章 集　合

考纲解读

1. 了解集合与元素的概念,能判断所给的对象能否构成集合.

2. 理解符号$\in$,$\notin$,会用符号$\in$,$\notin$表示元素与集合之间的关系.

3. 掌握常用数集的符号表示,熟记空集及常用数集:$\varnothing$,$\mathbf{N}$,$\mathbf{N}^*$,$\mathbf{Z}$,$\mathbf{Q}$,$\mathbf{R}$.

4. 掌握集合的两种表示方法,会用列举法和描述法表示简单的集合,能利用集合表示方程(组)及不等式(组)的解集.

5. 了解子集、真子集、集合相等的定义,会用适当的符号表示集合与集合之间的关系.

6. 理解交集、并集、全集和补集的定义,识记符号$\cup$,$\cap$,$\complement_U A$.会求简单集合的交集、并集与补集.

7. 了解"充分条件""必要条件""充要条件",能判断已知条件和结论的关系.

命题分析

本章内容在历年考卷中多以选择题形式出现,要求不高,难度不大.涉及的知识点有:集合的有关概念与表示方法;集合间的关系;集合的运算;充分条件、必要条件与充要条件的判定.常与不等式、函数、数列等内容相交汇.

第一节　集合的概念与表示方法

知识聚焦

一、集合的概念

1. 集合

把具有某种属性的一些确定的对象看成一个整体,便形成一个集合,常用大写字母A,B,C表示.

2. 元素

集合中的每一个确定的对象称为这个集合的元素，常用小写字母 a，b，c 表示.

3. 元素与集合的关系及性质

如果 a 是集合 A 的一个元素，就说 a 属于 A，记作 $a\in A$；如果 a 不是集合 A 的元素，就说 a 不属于 A，记作 $a\notin A$. 集合中的元素具有确定性、互异性、无序性的特征.

4. 常用的集合

空集($\varnothing$)、正整数集($\mathbf{Z}^+$ 或 $\mathbf{N}^*$)、自然数集($\mathbf{N}$)、整数集($\mathbf{Z}$)、有理数集($\mathbf{Q}$)、实数集($\mathbf{R}$).

二、集合的表示方法

1. 列举法

把集合的元素一一列举出来，写在大括号内，这种表示集合的方法称为列举法.

2. 描述法

用集合所含元素的共同特性表示集合的方法称为描述法.

描述法表示的一般形式是$\{x\mid p(x)\}$，其中“x”是集合中元素的代表形式，“$p(x)$”是集合中元素的共同特征，两者之间的竖线不可省略.

典例解析

【例 1】下列语句能构成集合的是(　　).

A. 我班个子高的男生　　B. 与 0 接近的全体实数

C. 大于 π 的自然数　　D. 优秀的中等职业学校

【解析】由“集合元素的确定性”可知，“个子高”“与 0 接近”“优秀的”都是不确定的，故选 C.

【例 2】用合适的方法表示下列集合：

(1)$\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\cdots\right\}$；

(2)$\{1,4,9,16,25,36\}$.

【解析】(1)$\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\cdots\right\}=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{1}{n},n\in\mathbf{N}^*\right\}$.

(2)$\{1,4,9,16,25,36\}=\{x\mid x=n^2,1\leqslant n\leqslant 6 \text{ 且 } n\in\mathbf{Z}\}$.

【例 3】设集合 $A=\{0\}$，下列结论正确的是(　　).

A. $A=0$　　B. $A=\varnothing$　　C. $0\in A$　　D. $\varnothing\in A$

【解析】本题考查了元素与集合、集合与集合之间的关系. 答案选 C.

强化训练

一、选择题

1. 下列选项所列对象中能组成集合的是(　　).

A. 好人　　B. 非常小的数

C. 有趣的书　　D. 小于 5 的数

2. 用列举法表示集合$\{x|x^2-3x+2=0\}$的结果是(　　).

A. $(1,2)$

B. $1,2$

C. $\{1,2\}$

D. 以上都不是

3. 下列选项中表述正确的是(　　).

A. 由 1,3,5,7,5,3 组成的集合中有 6 个元素

B. 周长为 16 cm 的三角形组成的集合是有限集合

C. 集合$\{0\}$是空集

D. 一年级(3)班的所有同学可以组成集合

4. 已知集合$A=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 3,x\in\mathbf{Z},y\in\mathbf{Z}\}$,则$A$中元素的个数为(　　).

A. 9

B. 8

C. 5

D. 4

二、填空题

5. 用适当的符号($\in,\notin,\subseteq,\supseteq,=$)填空:

3 ________ $\{2,3\}$;　π ________ $\mathbf{Q}$;　$\{1,2,3\}$ ________ $\mathbf{Z}$;

$\mathbf{N}^*$ ________ $\mathbf{Z}$;　$\{-3,3\}$ ________ $\{x|x^2=9\}$.

6. 已知集合$P=\{x|2<x<a,x\in\mathbf{N}\}$,且集合$P$中恰有 3 个元素,则整数$a=$________.

7. 下列六个关系式:①$\{a,b\}\subseteq\{b,a\}$;②$\{a,b\}=\{b,a\}$;③$0=\varnothing$;④$0\in\{0\}$;⑤$\varnothing\in\{0\}$;⑥$\varnothing\subseteq\{0\}$. 其中正确的个数为________.

三、解答题

8. 已知集合$A=\{0,1,2\}$,集合$B=\{x|x=ab,a\in A,b\in A\}$.

(1)用列举法写出集合B;

(2)判断集合B和集合A的关系.

9. 已知集合$\{1,a,b\}$与$\{-1,-b,1\}$是同一集合，求实数 a,b 的值.

10. 已知集合 $A=\{x \mid ax^2+2x+1=0, x\in\mathbf{R}\}$.

(1)若 A 中只有一个元素，求 a 的值；

(2)若 A 中恰有两个元素，求 a 的取值范围；

(3)若 A 中至多只有一个元素，求 a 的取值范围.

第二节　集合之间的关系与运算

真题在线

【2018・四川省高职单招】 已知集合 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{1,a\}$，$A\cup B=\{1,2,3,4\}$，则 $a=$ ________.

【专家详解】根据并集运算可知 $a=4$.

【2019・四川省高职单招】 设集合 $A=\{1,3,5\}$，$B=\{3,6,9\}$，则 $A\cap B=$(　　).

A. $\varnothing$　　B. $\{3\}$

C. $\{1,5,6,9\}$　　D. $\{1,3,5,6,9\}$

【专家详解】集合 $A=\{1,3,5\}$，$B=\{3,6,9\}$，则 $A\cap B=\{3\}$. 故选 B.

【2020・四川省高职单招】 已知集合 $A=\{1,0\}$，$B=\{-1,a\}$，且 $A\cap B=\{1\}$，则 $a=$(　　).

A. -2　　B. 0

C. 1　　D. 2

【专家详解】由 $A\cap B=\{1\}$，得 $1\in B$，所以 $a=1$，故选 C.

【2021·四川省高职单招】 设集合 $A=\{-1,0,1\}$，$B=\{x \mid x^2-1=0\}$，则 $A\cap B=($　　$)$.

A. $\{-1\}$　　B. $\{1\}$

C. $\{-1,1\}$　　D. $\{-1,0,1\}$

【专家详解】因为集合 $A=\{-1,0,1\}$，$B=\{x|x^2-1=0\}=\{-1,1\}$，所以 $A\cap B=\{-1,1\}$. 故选 C.

【2022·四川省高职单招】 已知集合 $M=\{1,2,3\}$，$N=\{1,3,5\}$，则 $M\cup N=($　　$)$.

A. $\varnothing$　　B. $\{1,3\}$

C. $\{2,5\}$　　D. $\{1,2,3,5\}$

【专家详解】由并集的定义得 $M\cup N=\{1,2,3,5\}$，故选 D.

知识聚焦

一、集合间的关系

1. 子集

一般地，对于两个集合 A，B，如果集合 A 中任何一个元素都是集合 B 的元素，那么，集合 A 就称为集合 B 的子集，记作 $A\subseteq B$ 或者 $B\supseteq A$，读作"A 包含于 B"或"B 包含 A".

当集合 A 不包含于集合 B 或集合 B 不包含集合 A 时，记作 $A\not\subseteq B$ 或 $B\not\supseteq A$.

性质：任何一个集合是它本身的子集，即 $A\subseteq A$；空集是任何集合的子集，即 $\varnothing\subseteq A$；对于集合 A，B，C，若 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$.

2. 真子集

若 A 是 B 的子集，并且 B 中至少有一个元素不属于 A，则 A 是 B 的真子集(A 包含于 B 但不等于 B)，记作 $A\subsetneqq B$ 或 $B\supsetneqq A$.

性质：空集是任何非空集合的真子集；对于集合 A，B，C，若 $A\subsetneqq B$，$B\subsetneqq C$，则 $A\subsetneqq C$.

3. 集合相等

一般地，对于两个集合 A 与 B，如果集合 A 中的任何一个元素都是集合 B 的元素，同时集合 B 中的任何一个元素都是集合 A 的元素，我们就说集合 A 等于集合 B，记作 $A=B$(A，B 中的所有元素均相等).

二、集合的运算

1. 交集

一般地，由既属于集合 A 又属于集合 B 的所有元素组成的集合，称为集合 A 与集合 B 的交集，记作 $A\cap B$，即 $A\cap B=\{x|x\in A 且 x\in B\}$.

性质：

(1)$A\cap B=B\cap A$.

(2)$A\cap A=A$.

(3)$A\cap\varnothing=\varnothing$.

(4)$A\cap B\subseteq A$，$A\cap B\subseteq B$.

(5)若 $A\subseteq B$，则 $A\cap B=A$.

2. 并集

一般地，由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素组成的集合，称为集合 A 与集合 B 的并集，记作 $A\cup B$，即 $A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$.

性质：

(1) $A\cup B=B\cup A$.

(2) $A\cup A=A$.

(3) $A\cup\varnothing=A$.

(4) $A\subseteq A\cup B$，$B\subseteq A\cup B$.

(5) 若 $A\subseteq B$，则 $A\cup B=B$.

3. 全集

若一个集合含有我们所研究问题中涉及的所有元素，则称这个集合为全集，通常用 U 表示.

4. 补集

对于一个集合 A，由全集 U 中不属于集合 A 的所有元素组成的集合称为集合 A 相对于全集 U 的补集，简称为集合 A 的补集，记作 $\complement_U A$，即 $\complement_U A=\{x|x\in U$ 且 $x\notin A\}$.

性质：

(1) $\complement_U(\complement_U A)=A$.

(2) $\complement_U\varnothing=U$，$\complement_U U=\varnothing$.

(3) $A\cup(\complement_U A)=U$.

(4) $A\cap(\complement_U A)=\varnothing$.

典例解析

【例 1】下列说法正确的有（　　）.

①空集没有子集；②任何集合至少有两个子集；③空集是任何集合的真子集；④若 $\varnothing\subsetneqq A$，则 $A\neq\varnothing$.

A. 1 个　　　　B. 2 个

C. 3 个　　　　D. 4 个

【解析】由空集的性质可知，①、②、③是错误的，④是正确的，故选 A.

【例 2】若集合 $A=\{a,b\}$，$B=\{x|x\subseteq A\}$，$P=\{A\}$，则集合 B 与 P 的关系是（　　）.

A. $B=P$　　　　B. $B\subsetneqq P$

C. $P\subsetneqq B$　　　　D. $P\in B$

【解析】因为 $x\subseteq A$，所以 $B=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$，故选 C.

【例 3】已知集合 $A=\{x|x^2-x-2=0\}$，$B=\{x|x^2-4x+p=0\}$，若 $B\subseteq A$，求实数 p 的取值范围.

【解析】由题意得 $A=\{-1,2\}$. 因为 $B\subseteq A$，所以 $B=\varnothing$ 或 $B=\{-1\}$ 或 $B=\{2\}$ 或 $B=\{-1,2\}$.

又因为 $B=\{x|x^2-4x+p=0\}$，所以 $B=\{-1,2\}$ 不成立.

当 $B=\varnothing$ 时，$\Delta=(-4)^2-4p=16-4p<0$，解得 $p>4$.

当 $B=\{-1\}$ 时，$\begin{cases}\Delta=16-4p=0\\(-1)^2-4\times(-1)+p=0\end{cases}$，无解.

当 $B=\{2\}$ 时，$\Delta=16-4p=0$，$2^2-4\times2+p=0$，解得 $p=4$.

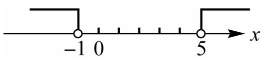
综上得，实数 p 的取值范围是 $[4,+\infty)$.

【例 4】设全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\mid 0\leqslant x<2\}$，集合 $B=\{x\mid x^2-2x-3<0\}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$，$\complement_U A\cap B$.

【解析】$B=\{x\mid x^2-2x-3<0\}=\{x\mid -1<x<3\}$，$\complement_U A=\{x\mid x<0$ 或 $x\geqslant2\}$，所以 $A\cap B=\{x\mid 0\leqslant x<2\}$，$A\cup B=\{x\mid -1<x<3\}$，$\complement_U A\cap B=\{x\mid -1<x<0$ 或 $2\leqslant x<3\}$.

【例 5】已知集合 $M=\{x\mid a\leqslant x\leqslant a+3\}$，$N=\{x\mid x<-1$ 或 $x>5\}$，若 $M\cap N=\varnothing$，求实数 a 的取值范围.

【解析】如图所示，要使 $M\cap N=\varnothing$，必须满足 $\begin{cases}a+3\leqslant5\\a\geqslant-1\end{cases}$，解得 $-1\leqslant a\leqslant2$，所以实数 a 的取值范围为 $\{a\mid -1\leqslant a\leqslant2\}$.



强化训练

一、选择题

1. 若集合 $A=\{x\mid x\leqslant0\}$，集合 $B=\{x\mid x\leqslant1\}$，则集合 A 与集合 B 的关系是（　　）.

A. $A=B$　　B. $A\subseteq B$　　C. $B\subseteq A$　　D. $A\in B$

2. 已知集合 $A=\{0,1,2\}$，集合 $B=\{x\mid x>0\}$，则 $A\cap B=$（　　）.

A. $\{0\}$　　B. $\{1\}$　　C. $\{1,2\}$　　D. $\{0,1,2\}$

3. 已知集合 $A=\{(x,y)\mid x+y=1\}$，集合 $B=\{(x,y)\mid 2x-y=2\}$，则 $A\cap B=$（　　）.

A. $\{1,0\}$　　B. $\{(1,0)\}$　　C. $\{(0,1)\}$　　D. $\{0,1\}$

4. 设全集 $U=\{1,2,3,4,5\}$，集合 $A=\{1,2,4\}$，则 $\complement_U A=$（　　）.

A. $\{1,2,4\}$　　B. $\{3,5\}$　　C. $\{1,2,3,4,5\}$　　D. $\{2,4\}$

5. 设集合 $A=\{x\mid 1<x<4\}$，集合 $B=\{x\mid 2\leqslant x\leqslant5\}$，则 $A\cup B=$（　　）.

A. $\{x\mid 1<x\leqslant5\}$　　B. $\{x\mid 2\leqslant x<4\}$　　C. $\{x\mid 1<x<4\}$　　D. $\{x\mid 2\leqslant x\leqslant5\}$

6. 已知全集 $A=\{2,3,a\}$，集合 $B=\{-1,4\}$，若 $A\cap B=\{4\}$，则 $a=$（　　）.

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. -1

二、填空题

7. 集合 $M=\{a,b,c\}$ 的真子集个数为________.

8. 设 $A=\{0,1,2\}$，$B=\{1,2,3\}$，则 $A\cap B=$________.

9. 已知全集 $U=\{x\mid x\in\mathbf{N}\}$，集合 $\complement_U A=\{1,2,3,4,\cdots,n,\cdots\}$，则集合 $A=$________.

三、解答题

10. 已知集合 $A=\{1,1+m,1+2m\}$，$B=\{1,n,n^2\}$，其中，$m,n\in\mathbf{R}$，若 $A=B$，求 m,n 的值.

11. 已知集合 $A=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x\mid ax+2=0\}$，且 $B\subseteq A$，求实数 a 的值组成的集合.

12. 设全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\mid x^2-x-2=0\}$，$B=\{x\mid |x|=y+1,y\in A\}$，求 $\complement_U B$.

第三节　充要条件

知识聚焦

一、充分必要条件的定义

(1)对于两个命题 p,q，若 $p\Rightarrow q$，则称 p 是 q 的充分条件，q 是 p 的必要条件.

注意：p 是 q 的充分条件，是指只要具备了条件 p，那么 q 就一定成立，即命题中的条件是充分的；q 是 p 的必要条件，是指如果不具备条件 q，则 p 就不能成立，即 q 是 p 成立的必不可少的条件.

(2)若 $p\Rightarrow q$ 且 $q\Rightarrow p$，即 $p\Leftrightarrow q$，则 p 是 q 的充分且必要条件，简称充要条件.

注意：①当 $p\Leftrightarrow q$ 时，也称 p 与 q 是等价的.

②与充要条件等价的词语有:“当且仅当”“等价于”“有且只有”“必须且只须”“……,反过来也成立”等.

二、充分必要条件的判断方法

1. 从逻辑推理关系上判断(定义法)

(1)若 $p\Rightarrow q$ 但 $q\nRightarrow p$,则 p 是 q 的充分不必要条件.

(2)若 $p\nRightarrow q$ 但 $q\Rightarrow p$,则 p 是 q 的必要不充分条件.

(3)若 $p\Rightarrow q$ 且 $q\Rightarrow p$,则 p 是 q 的必要且充分条件(充要条件).

(4)若 $p\nRightarrow q$ 且 $q\nRightarrow p$,则 p 是 q 的既不充分也不必要条件.

2. 从命题所对应的集合与集合之间的关系上判断(集合法)

设命题 p 对应的集合为 A,命题 q 对应的集合为 B.

(1)若 $A\subseteq B$,则 p 是 q 的充分条件;若 $A\subsetneqq B$,则 p 是 q 的充分不必要条件.

(2)若 $A\supseteq B$,则 p 是 q 的必要条件;若 $A\supsetneqq B$,则 p 是 q 的必要不充分条件.

(3)若 $A\subseteq B$ 且 $A\supseteq B$,即 $A=B$,则 p 是 q 的充要条件.

(4)若 $A\nsubseteq B$ 且 $A\nsupseteq B$,则 p 是 q 的既不充分也不必要条件.

典例解析

【例 1】已知 p:$|3x-5|<4$,q:$(x-1)(x-2)<0$,则 p 是 q 的(　　).

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

【解析】p:$|3x-5|<4\Rightarrow p$:$\frac{1}{3}<x<3$,q:$(x-1)(x-2)<0\Rightarrow q$:$1<x<2$. 所以 $p\nRightarrow q$ 但 $q\Rightarrow p$,所以 p 是 q 的必要不充分条件. 选 B.

【例 2】已知集合 $A=\left\{y\middle| y=x^2-\frac{3}{2}x+1,x\in\left[\frac{3}{4},2\right]\right\}$,$B=\{x|x+m^2\geqslant 1\}$,$p$:$x\in A$,$q$:$x\in B$,并且 p 是 q 的充分条件,求实数 m 的取值范围.

【解析】由题意得 $A=\left[\frac{7}{16},2\right]$,$B=[1-m^2,+\infty)$,由于 p 是 q 的充分条件,所以 $A\subseteq B$,所以 $1-m^2\leqslant\frac{7}{16}$,解得 $m\geqslant\frac{3}{4}$ 或 $m\leqslant-\frac{3}{4}$,即实数 m 的取值范围是 $\left(-\infty,-\frac{3}{4}\right]\cup\left[\frac{3}{4},+\infty\right)$.

强化训练

一、选择题

1. $x<-2$ 是不等式 $x^2-4>0$ 成立的(　　).

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

2. $A\cap B=A$ 是 $A\subseteq B$ 的(　　).

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

3. 设甲是乙的充分不必要条件,乙是丙的充要条件,丁是丙的必要不充分条件,则甲是丁的(　　).

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. “$|x|\geqslant 1$”是“$x\geqslant 1$”的(　　).

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

5. “$\alpha=\frac{\pi}{4}$”是“$\tan\alpha=1$”的(　　).

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

二、填空题

6. “$x>0$”是“$x>3$”的________(填“充分”或“必要”)条件.

7. “a 是整数”是“a 是自然数”的________(填“充分”或“必要”)条件.

8. $x^2+y^2=0(x,y\in\mathbf{R})$的充要条件是________.

三、解答题

9. 求一个对于一切实数 x 都有 $ax^2-ax+1>0$ 成立的充要条件.

10. 已知 p:$-2\leqslant x\leqslant 10$,$q$:$x^2-2x+1-m^2\leqslant 0(m>0)$,若 p 是 q 的充分不必要条件,求实数 m 的取值范围.

第二章 不 等 式

考纲解读

1. 了解不等式的基本性质,会用作差法比较两个实数或代数式的大小.

2. 理解区间的概念,会用区间表示连续的实数集,会用区间表示不等式的解集,会进行区间的交、并、补集运算.

3. 掌握形如$(ax+b)(cx+d)>0(a>0,c>0)$的不等式,理解形如$ax^2+bx+c>0$或$ax^2+bx+c<0$(不含参数讨论)的一元二次不等式,了解一元二次不等式在简单实际问题中的应用.

4. 了解形如$|ax+b|>c$或$|ax+b|<c(c>0)$的含绝对值的不等式.

命题分析

本章内容在考题中多以选择题形式出现,要求不高,难度不大.不等式的基本性质和不等式的解法依然是考试的重点.

第一节　不等式的基本性质与区间

真题在线

【2015·四川省高职单招】 若$a<b<0$,则下列不等式中不成立的是(　　).

A. $-a>b$　　　　B. $a^3>b^3$

C. $|a|>|b|$　　　　D. $a^2>b^2$

【专家详解】取特殊值法,$a=-2,b=-1$,可知B不成立.

知识聚焦

一、不等式的基本性质

1. 实数的大小比较基本性质(作差法)

对于任意两个实数 a,b.

(1)$a-b>0\Leftrightarrow a>b$;

(2)$a-b=0\Leftrightarrow a=b$;

(3)$a-b<0\Leftrightarrow a<b$.

2. 不等式的定义

表示不等关系的式子称为不等式,满足不等式的未知数的取值的集合称为不等式的解集.

3. 不等式的基本性质

性质 1:如果 $a>b$,并且 $b>c$,那么 $a>c$.

性质 2:如果 $a>b$,那么 $a+c>b+c$.

性质 3:如果 $a>b,c>0$,那么 $ac>bc$;如果 $a>b,c<0$,那么 $ac<bc$.

推论:(1)$a>b,c>d\Leftrightarrow a+c>b+d$.(同向不等式可加性)

(2)$a>b,c<d\Leftrightarrow a-c>b-d$.(异向不等式可减性)

(3)$a>b>0,c>d>0\Rightarrow ac>bd$.

(4)$a>b>0\Rightarrow\sqrt{a}>\sqrt{b}$;$a>b>0\Rightarrow a^2>b^2$.

二、区间

设 $a,b\in\mathbf{R}$,且 $a<b$,我们规定:

(1)$\{x|a\leqslant x\leqslant b\}=[a,b]$,$[a,b]$称为闭区间.

(2)$\{x|a<x<b\}=(a,b)$,(a,b)称为开区间.

(3)$\{x|a\leqslant x<b\}=[a,b)$,$\{x|a<x\leqslant b\}=(a,b]$,$[a,b)$与$(a,b]$称为半开半闭区间.

典例解析

【例 1】试比较 $2x^2-3x+7$ 与 x^2+x+2 的大小.

【解析】(作差法)$2x^2-3x+7-(x^2+x+2)=x^2-4x+5=(x-2)^2+1>0$,因此 $2x^2-3x+7>x^2+x+2$.

【例 2】下列命题中正确的是(　　).

A. 若 $a>b$,则 $ac>bc$　　　　B. 若 $a>b$,且 $c>d$,则 $a+d>b+c$

C. 若 $ac^2>bc^2$,则 $a>b$　　　　D. 若 $a>b$,且 $c>d$,则 $ac>bd$

【解析】对于选项 A,若 $c=0$,则 $ac=bc=0$,选项 A 错误;对于选项 B 和选项 D,可以通过特殊值来判断,令 $a=0,b=-1,c=-2,d=-3$,可排除选项 B 和 D. 本题选项 C 正确.

【例 3】已知 $6<a<10,2<b<3$,求 $a+b,a-b,ab,\dfrac{a}{b}$ 的取值范围.

【解析】$a+b,ab$ 的取值范围可直接利用不等式的同向可加性和同向可乘性求出. 对 $a-b$ 和$\dfrac{a}{b}$的

取值范围,应先求出$-b$和$\frac{1}{b}$的取值范围.

根据不等式的同向可加性可知:$8<a+b<13$;根据不等式的同向可乘性可知:$12<ab<30$;

因为$2<b<3$,所以$-3<-b<-2$.

又因为$6<a<10$,所以$6-3<a-b<10-2$,即$3<a-b<8$.

又因为$\frac{1}{3}<\frac{1}{b}<\frac{1}{2}$,所以$\frac{6}{3}<\frac{a}{b}<\frac{10}{2}$,即$2<\frac{a}{b}<5$.

强化训练

一、选择题

1. 设$x\neq0$,则$(x^2+1)^2$与x^4+x^2+1的大小关系是(　　).

A. $(x^2+1)^2>x^4+x^2+1$　　B. $(x^2+1)^2<x^4+x^2+1$

C. $(x^2+1)^2=x^4+x^2+1$　　D. 不能确定

2. 若$a>b$,则下列式子中一定正确的是(　　).

A. $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$　　B. $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　　C. $a^2>b^2$　　D. $b-2<a-1$

3. 若$a>b>0$,则(　　).

A. $ac>bc$　　B. $-2b<-2a$　　C. $a^2>b^2$　　D. 以上均不对

4. 若$\frac{2a+3}{5}$不小于$\frac{a+2}{3}$,则实数a的取值范围是(　　).

A. $[1,+\infty)$　　B. $(-\infty,1]$　　C. $(-\infty,-1)$　　D. $(-1,+\infty)$

二、填空题

5. 若$a<-2a$,则a________0;若$a>2a$,则a________0.

6. 比较大小:$\frac{7}{9}$________$\frac{7}{11}$,$\frac{11}{8}$________$\frac{8}{11}$,a^2________0.

7. 集合$\{x|1<x\leqslant3\}$用区间表示为________;集合$\left\{x\middle|x\neq\frac{3}{5}\right\}$用区间表示为________.

三、解答题

8. 比较下列各式的大小:

(1)$(a+1)(a+3)$和$(a-1)(a+5)$;　(2)a^2+10和$6a$.

9. 已知 $-1<x+y<4$ 且 $2<x-y<3$，求 $z=2x-3y$ 的取值范围.

10. 已知 $a>0$ 时，比较 $\dfrac{a}{a+1}$ 与 $\dfrac{a+1}{a+2}$ 的大小.

第二节　一元一次不等式（组）的解法

知识聚焦

1. 一元一次不等式

经过去分母、去括号、移项、合并同类项等变形后，能化为 $ax<b$ 或 $ax>b$ 或 $ax\leqslant b$ 或 $ax\geqslant b$ 的形式，其中 x 是未知数，a，b 是已知数，并且 $a\neq 0$，这样的不等式称为一元一次不等式.

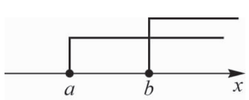
$ax<b$ 或 $ax>b$ 或 $ax\leqslant b$ 或 $ax\geqslant b(a\neq 0)$ 称为一元一次不等式的标准形式.

2. 解一元一次不等式

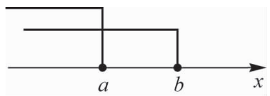
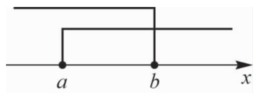
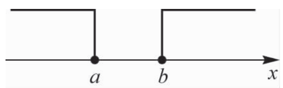
去分母→去括号→移项→合并同类项（化成 $ax<b$ 或 $ax>b$ 或 $ax\leqslant b$ 或 $ax\geqslant b$ 的形式）→系数化为 1（化成 $x>\dfrac{b}{a}$ 或 $x<\dfrac{b}{a}$ 或 $x\geqslant\dfrac{b}{a}$ 或 $x\leqslant\dfrac{b}{a}$ 的形式）.

一般地，几个一元一次不等式的解集的公共部分，称为由它们组成的一元一次不等式组的解集.

3. 由两个一元一次不等式组成的不等式组的解集的情况

不等式组（$a<b$）	图　示	解　集	口　诀
$\begin{cases}x\geqslant a\\x\geqslant b\end{cases}$		$x\geqslant b$	同大取大

（续表）

不等式组（$a<b$）	图 示	解 集	口 诀
$\begin{cases}x\leqslant a\\x\leqslant b\end{cases}$		$x\leqslant a$	同小取小
$\begin{cases}x\geqslant a\\x\leqslant b\end{cases}$		$a\leqslant x\leqslant b$	大小、小大中间找
$\begin{cases}x\leqslant a\\x\geqslant b\end{cases}$		空集	小小、大大找不到

典例解析

【例 1】一元一次不等式 $3x+9>0$ 的解集是(　　).

A. $\{x\mid x<3\}$　B. $\{x\mid x>3\}$　C. $\{x\mid x>-3\}$　D. $\{x\mid x<-3\}$

【解析】整理得 $x>-3$，因此选 C.

【例 2】不等式组 $\begin{cases}\dfrac{x-1}{2}\leqslant 3x\\\dfrac{2x+3}{3}\geqslant 6x\end{cases}$ 的解集为(　　).

A. $\left\{x\,\middle|\,x\leqslant\dfrac{3}{16}\right\}$　B. $\left\{x\,\middle|\,x\leqslant-\dfrac{3}{16}\right\}$　C. $\left\{x\,\middle|\,\dfrac{1}{5}\leqslant x\leqslant\dfrac{3}{16}\right\}$　D. $\left\{x\,\middle|\,-\dfrac{1}{5}\leqslant x\leqslant\dfrac{3}{16}\right\}$

【解析】经整理得 $\begin{cases}x\leqslant\dfrac{3}{16}\\x\geqslant-\dfrac{1}{5}\end{cases}$，所以解集为 $\left\{x\,\middle|\,-\dfrac{1}{5}\leqslant x\leqslant\dfrac{3}{16}\right\}$. 因此选 D.

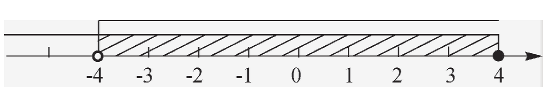
【例 3】命题“$x\geqslant3$”是命题“$16-2x\leqslant0$”的(　　).

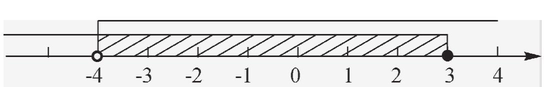
A. 充要条件　　B. 充分不必要条件

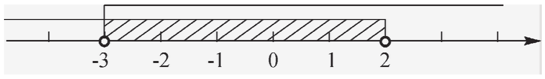
C. 必要不充分条件　　D. 即不充分也不必要条件

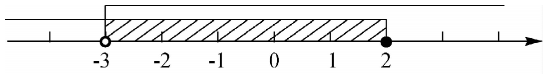
【解析】本题考查充分，必要条件的判断方法. 答案选 C.

【例 4】不等式组 $\begin{cases}x+1>-2\\3-x\geqslant1\end{cases}$ 的解集在数轴上表示为(　　).

A. 

B. 

C. 

D. 

【解析】根据原不等式可得$-3<x\leqslant 2$. 答案选 D.

强化训练

一、选择题

1. 不等式 $5-3x>2x$ 的解集为(　　).

A. $\{x|x>1\}$　　B. $\{x|x>-1\}$　　C. $\{x|x<1\}$　　D. $\{x|x<-1\}$

2. 不等式组$\begin{cases}x<5\\x-3\leqslant 0\end{cases}$的解集为(　　).

A. $\{x|x<5\}$　　B. $\{x|x\leqslant 5\}$　　C. $\{x|x<3\}$　　D. $\{x|x\leqslant 3\}$

3. 不等式$\frac{17}{2x-8}>0$ 的解集(　　).

A. $\{x|x>-4\}$　　B. $\{x|x>4\}$　　C. $\{x|x\leqslant -4\}$　　D. $\{x|x\leqslant 4\}$

4. “$x>-2$”是“$3x+20>11$”的(　　).

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件　　C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

5. 已知关于 x 的不等式组$\begin{cases}x-a>0\\3-x\geqslant -1\end{cases}$无解，则 a 的取值范围是(　　).

A. $a>-2$　　B. $a>2$　　C. $a\geqslant -4$　　D. $a\geqslant 4$

二、填空题

6. 一元一次不等式$-5x+15<0$ 的解集是____________.

7. 不等式组$\begin{cases}x+3>5\\x-4<4\end{cases}$的解集为____________.

8. 不等式 $5-2x>0$ 的正整数解集为____________.

三、解答题

9. 解不等式$\frac{7-2x}{3}+3>\frac{3x+8}{4}-x$，并把解集在数轴上表示出来.

10. 若不等式组$\begin{cases}x>a\\x<b\end{cases}$无解，求不等式组$\begin{cases}x>3-a\\x<3-b\end{cases}$的解集.

第三节　一元二次不等式的解法

真题在线

【2018·四川省高职单招】 不等式$(x-1)(x-2)<0$的解集为(　　).

A. $(1,2)$　　B. $[1,2]$

C. $(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$　　D. $(-\infty,1]\cup[2,+\infty)$

【专家详解】$(x-1)(x-2)<0\Leftrightarrow 1<x<2$，故选 A.

【2021·四川省高职单招】 一元二次不等式$x^2+x-2>0$的解集为(　　).

A. $(-2,1)$　　B. $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$

C. $[-2,1]$　　D. $(-\infty,-2]\cup[1,+\infty)$

【专家详解】由$x^2+x-2>0$得$(x+2)(x-1)>0$，解得$x<-2$或$x>1$. 故选 B.

【2022·四川省高职单招】 一元二次不等式$x^2+x-12\leqslant 0$的解集是(　　).

A. $[-4,3]$　　B. $(-\infty,-4]\cup[3,+\infty)$

C. $(-4,3)$　　D. $(-\infty,-4)\cup(3,+\infty)$

【专家详解】由$x^2+x-12\leqslant 0$得$(x+4)(x-3)\leqslant 0$，解得$-4\leqslant x\leqslant 3$，故选 A.

知识聚焦

1. 一元二次不等式的定义

只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是 2 的不等式，称为一元二次不等式. 例如，$x^2-5x<0$.

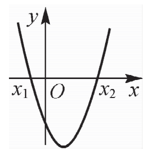
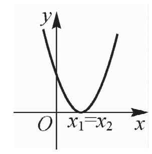
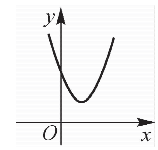
任意的一元二次不等式，总可以化为一般形式：$ax^2+bx+c>0(a>0)$或$ax^2+bx+c<0(a>0)$.

2. 一般的一元二次不等式的解法

一元二次不等式$ax^2+bx+c>0$或$ax^2+bx+c<0(a\neq 0)$的解集可以联系二次函数$y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$的图像，图像在x轴上方部分对应的横坐标x值的集合为不等式$ax^2+bx+c>0$的解集，图像在x轴下方部分对应的横坐标x值的集合为不等式$ax^2+bx+c<0$的解集.

若一元二次方程$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$的两根为x_1,x_2且$x_1\leqslant x_2$，$\Delta=b^2-4ac$，则相应的不等式

的解集的各种情况见下表.

$\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
二次函数 $y=ax^2+bx+c(a>0)$的图像			
$ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$的解集	有两相异实根 $x_1,x_2(x_1<x_2)$	有两相等实根 $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$	无实根
$ax^2+bx+c>0$ $(a>0)$的解集	$\{x\mid x<x_1$或$x>x_2\}$	$\left\{x\,\middle\vert\, x\neq-\dfrac{b}{2a}\right\}$	**R**
$ax^2+bx+c<0$ $(a>0)$的解集	$\{x\mid x_1<x<x_2\}$	$\varnothing$	$\varnothing$

典例解析

【例 1】解下列不等式:

(1)$x^2+4x+3>0$;

(2)$2x^2-5x+2\leqslant 0$;

(3)$x^2-4x+4>0$;

(4)$-x^2+3x-4>0$.

【解析】(1)因为方程 $x^2+4x+3=0$ 的两根为$-1,-3$,

所以不等式 $x^2+4x+3>0$ 的解集为$(-\infty,-3)\cup(-1,+\infty)$.

(2)因为方程 $2x^2-5x+2=0$ 的两根为$\dfrac{1}{2},2$,

所以不等式 $2x^2-5x+2\leqslant 0$ 的解集为$\left[\dfrac{1}{2},2\right]$.

(3)因为方程 $x^2-4x+4=0$ 的根为 2,

所以不等式 $x^2-4x+4>0$ 的解集为$(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$.

(4)首先将不等式$-x^2+3x-4>0$ 化为 $x^2-3x+4<0$,

而方程 $x^2-3x+4=0$ 中由于其 $\Delta<0$,故方程无解.

因此不等式$-x^2+3x-4>0$ 的解集为$\varnothing$.

【例 2】当 x 为什么实数时,$\sqrt{3-x-2x^2}$有意义?

【解析】由题意得 $3-x-2x^2\geqslant 0$,化为 $2x^2+x-3\leqslant 0$,解得$-\dfrac{3}{2}\leqslant x\leqslant 1$.

【例 3】已知不等式 $ax^2+bx+2>0$ 的解集为$\left\{x\,\middle\vert\,-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1}{3}\right\}$,求 a,b 的值.

【解析】根据题意可知$-\dfrac{1}{2}$和$\dfrac{1}{3}$是方程 $ax^2+bx+2=0$ 的两根,因此$\begin{cases}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}=-\dfrac{b}{a}\\ \left(-\dfrac{1}{2}\right)\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{a}\end{cases}$,解得$\begin{cases}a=-12\\ b=-2\end{cases}$.

【例 4】若关于 x 的不等式 $ax^2+2x+2>0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立,求实数 a 的取值范围.

【解析】当 $a=0$ 时,原不等式可化为 $2x+2>0$,其解集为 $\{x|x>-1\}$. 故 $a=0$ 不合题意,舍去.

当 $a\neq 0$ 时,要使原不等式 $ax^2+2x+2>0$ 的解集为 $\mathbf{R}$,

只需 $\begin{cases} a>0 \\ 2^2-4\times 2a<0 \end{cases}$,解得 $a>\frac{1}{2}$.

综上,所求实数 a 的取值范围为 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.

强化训练

一、选择题

1. 一元二次不等式 $x^2+4x+3\leqslant 0$ 的解集为(　　).

A. $(-3,-1)$　　B. $(-\infty,-3)\cup(-1,+\infty)$

C. $[-3,-1]$　　D. $(-\infty,-3)\cup[-1,+\infty)$

2. 一元二次不等式 $2x^2+15x+7\leqslant 0$ 的解集为(　　).

A. $(-\infty,-7)\cup\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$　　B. $(-\infty,-7)\cup\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)$

C. $\left[-7,-\frac{1}{2}\right]$　　D. $\left(-7,-\frac{1}{2}\right)$

3. 若不等式 $ax^2+bx-4>0$ 的解集为 $\left\{x\,\middle|\,-2<x<-\frac{1}{4}\right\}$,则 a,b 的值分别为(　　).

A. $a=-8,b=-18$　　B. $a=-8,b=18$　　C. $a=\frac{16}{9},b=-\frac{8}{9}$　　D. $a=\frac{16}{9},b=\frac{8}{9}$

4. 已知一元二次不等式 $mx^2+2x+3\leqslant 0$ 的解集为 $\varnothing$,则实数 m 的取值范围是(　　).

A. $m<\frac{1}{3}$　　B. $m\geqslant\frac{1}{3}$　　C. $m>\frac{1}{3}$　　D. $m\leqslant\frac{1}{3}$

二、填空题

5. 一元二次不等式 $3x^2+8x-3<0$ 的解集为____________.

6. 若 $0<a<1$,则不等式 $x^2-\left(a+\frac{1}{a}\right)x+1<0$ 的解是____________.

7. 一元二次不等式 $(x-a)(x-b)>0$ 的解集为 $\{x|x<0$ 或 $x>4\}$,则 $ab=$____________.

三、解答题

8. 求函数 $y=\sqrt{2x^2+2x-12}$ 的定义域.

9. 设一元二次不等式 $ax^2+bx+3>0(a\neq0)$ 的解集为 $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$，求 a,b 的值.

10. 如果以 x,y 为未知数的方程组 $\begin{cases}x^2-2y^2=25\\x+y=k\end{cases}$ 有实数解，求 k 的取值范围.

第四节　含绝对值的不等式的解法

真题在线

【2017·四川省高职单招】 不等式 $|x-3|<1$ 的解集为(　　).

A. $(1,3)$　　B. $(2,4)$

C. $(1,4)$　　D. $(-\infty,2)\cup(4,+\infty)$

【专家详解】由 $|x-3|<1$ 得 $-1<x-3<1$，解得 $2<x<4$，故选 B.

【2019·四川省高职单招】 不等式 $|x|<1$ 的解集为(　　).

A. $[-1,1]$　　B. $(-\infty,1]\cup[1,+\infty)$

C. $(-1,1)$　　D. $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$

【专家详解】由 $|x|<1$ 解得 $-1<x<1$. 故选 C.

【2020·四川省高职单招】 不等式 $|x+1|>2$ 的解集为(　　).

A. $[-3,1]$　　B. $(-\infty,-3]\cup[1,+\infty)$

C. $(-3,1)$　　D. $(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$

【专家详解】原不等式可化为 $x+1<-2$ 或 $x+1>2$，解得 $x<-3$ 或 $x>1$，故选 D.

知识聚焦

1. 绝对值的定义

(1)代数意义.

一个数的绝对值是非负数,即$|a|=\begin{cases}a, & a\geqslant 0\\ -a, & a<0\end{cases}$.

(2)几何意义.

一个数的绝对值$|a|$表示这个数a在数轴上对应的点到原点的距离.

2. 含绝对值不等式的解法

解含绝对值不等式的关键在于去掉绝对值符号,而去掉绝对值符号的常用方法有以下几种:

(1)根据绝对值的定义:$|a|=\begin{cases}a, & a\geqslant 0\\ -a, & a<0\end{cases}$.

(2)零点分段讨论法:通常用于解含有两个或两个以上的绝对值符号的不等式.

(3)利用不等式的性质:$|x|<a(a>0)\Leftrightarrow -a<x<a$;$|x|>a(a>0)\Leftrightarrow x<-a$ 或 $x>a$.

(4)两边平方法:$|f(x)|<a(a>0)\Leftrightarrow f^2(x)<a^2$;$|f(x)|>a(a>0)\Leftrightarrow f^2(x)>a^2$.

典例解析

【例 1】求下列含绝对值不等式的解集:

(1)$|2x-1|\leqslant 5$;　　(2)$3|1-x|>12$;　　(3)$|x|+3<0$.

【解析】(1)$|2x-1|\leqslant 5\Leftrightarrow -5\leqslant 2x-1\leqslant 5$,即$-2\leqslant x\leqslant 3$,所以原不等式解集为$[-2,3]$.

(2)$3|1-x|>12\Leftrightarrow |1-x|>4\Leftrightarrow 1-x<-4$ 或 $1-x>4$,即 $x<-3$ 或 $x>5$,所以原不等式的解集为$(-\infty,-3)\cup(5,+\infty)$.

(3)由$|x|+3<0$得$|x|<-3$,与绝对值为非负矛盾,所以原不等式解集为$\varnothing$.

【例 2】解不等式组:$\begin{cases}|2x+3|\leqslant 5\\ x^2-3>2x\end{cases}$.

【解析】由不等式$|2x+3|\leqslant 5\Leftrightarrow -5\leqslant 2x+3\leqslant 5$,即$-4\leqslant x\leqslant 1$;又由不等式$x^2-3>2x\Leftrightarrow x^2-2x-3>0\Leftrightarrow (x+1)(x-3)>0$,即$x<-1$ 或 $x>3$,

求交集$\begin{cases}-4\leqslant x\leqslant 1\\ x<-1 \text{ 或 } x>3\end{cases}$,得原不等式组的解集为$[-4,-1)$.

【例 3】已知不等式$|x-a|<b$的解集为$(-1,8)$,求a,b的值.

【解析】因为$|x-a|<b$,所以$-b<x-a<b$,

即$a-b<x<a+b$.

又因为$|x-a|<b$的解集为$(1,8)$,所以$\begin{cases}a-b=-1\\ a+b=8\end{cases}$.

解得$a=\frac{7}{2}$,$b=\frac{9}{2}$.

强化训练

一、选择题

1. 不等式 $|3x-1|\geqslant 5$ 的解集为(　　).

A. $\left(-\infty,-\dfrac{4}{3}\right]$　　B. $[2,+\infty)$

C. $\left(-\infty,-\dfrac{4}{3}\right]\cup[2,+\infty)$　　D. $\left[-\dfrac{4}{3},2\right]$

2. 不等式 $|x+1|+2>0$ 的解集是(　　).

A. $\mathbf{R}$　　B. $\varnothing$　　C. $(-1,+\infty)$　　D. $(-1,0)$

3. 在数轴上与原点距离不大于 3 的点的坐标的集合是(　　).

A. $\{x\,|\,x\leqslant -3$ 或 $x\geqslant 3\}$　　B. $\{x\,|\,-3\leqslant x\leqslant 3\}$

C. $\{x\,|\,x\leqslant -3\}$　　D. $\{x\,|\,x\geqslant 3\}$

4. 不等式 $|2x-3|\leqslant 1$ 的整数解的个数是(　　).

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

二、填空题

5. 不等式 $|1-3x|<2$ 的解集为________.

6. 不等式 $|2x+3|-7>0$ 的解集是________.

7. 已知集合 $A=\{x\,|\,|x-1|<3\}$，$B=\{x\,|\,|x+2|\geqslant 5\}$，则 $A\cap B=$________.

三、解答题

8. 求不等式 $|1-4x|\leqslant 7$ 的解集.

9. 解不等式组：$\begin{cases}|x+2|\leqslant 5\\x^2-4x-5<0\end{cases}$.

10. 关于 x 的不等式 $|x+a|<1$ 的解集是 $\{x|1<x<3\}$，求实数 a 的值.

第三章　函　数

考纲解读

1. 了解函数的定义，会求形如 $f(x)=\sqrt{ax+b}$ 或 $f(x)=\frac{1}{ax+b}$ 的函数的定义域.

2. 了解符号 $f(a)$ 的含义，会求函数值.

3. 理解函数的三种表示方法(列表法、图像法、解析式法)，会用解析式法表示函数；会用待定系数法求一次函数的解析式.

4. 理解函数单调性的定义，会根据函数的单调性比较同一单调区间内的函数值大小；能根据函数图像判断函数的单调性并写出函数的单调区间.

5. 理解函数的奇偶性的定义，会判断简单函数的奇偶性.

6. 了解函数的简单应用，能借助函数的知识和方法解决简单实际问题.

命题分析

本章内容一直是考查的重点，既有选择题，也有解答题，其考查的知识点主要集中在：

1. 函数 $f(x)$ 的定义、函数的三种表示法，求简单函数的定义域、函数值.

2. 单调函数、奇偶函数的概念和图像特点，会判断简单函数的奇偶性、单调性，并应用单调性、奇偶性求值，比较函数值的大小.

3. 一元二次函数是高职考试考查的重点，一般放在解答题中，通过实际应用问题，建立函数关系式，综合应用二次函数的图像、性质以及方程、不等式等知识解决.