数 学

（拓展模块一）下册

选题策划：金颖杰
责任编辑：苏　莉
封面设计：刘文东

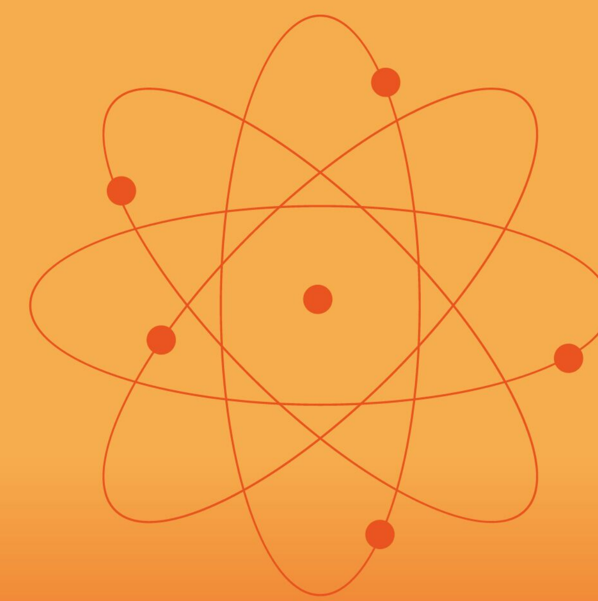
ISBN 978-7-5661-4067-8

定价：35.00元

数学（拓展模块一）下册

主编 赵培勇

哈尔滨工程大学出版社
Harbin Engineering University Press



数 学

主　编　赵培勇

（拓展模块一）下册

哈尔滨工程大学出版社
Harbin Engineering University Press

前言 PREFACE

本教材是根据教育部颁布的2020年版《中等职业学校数学课程标准》(以下简称《课程标准》)中规定的课程目标和课程内容,紧密结合中等职业学校的教学实际编写而成的,旨在帮助学生掌握必要的数学基础知识,提升他们的计算技能、计算工具使用技能和数据处理技能,培养他们的观察能力、空间想象能力、分析与解决问题能力和数学思维能力,为他们学习专业知识、掌握职业技能、继续学习和终身发展奠定基础.

本教材所选取的内容均为《课程标准》中规定的学生必修的基础性内容,符合《课程标准》规定的"教学要求".

本教材的编写特色主要体现在以下几个方面.

1. 突出基础性,着眼于中职数学教学的实际

本教材的编写遵循学生认知的发展规律,在保证科学性的基础上,知识点的讲述由已知到未知,由浅入深,由具体到抽象;从学生的实际出发,既做到与九年义务教育阶段相衔接,又兼顾与专业课程相衔接.

2. 体现时代特征,突出数学与现代信息技术的结合

随着现代信息技术的不断发展,数学的教学手段和方法也在不断更新.本教材的编写不但落实了《课程标准》对计算器的使用要求,还落实了《课程标准》对计算机软件的使用要求,加强学生对数学的理解;同时,本教材利用软件的强大功能为教师教学提供更直观、更高效的教学手段.

3. 注重参与,紧密结合生活中的实际问题

本教材在编写过程中最大可能地强调学生的参与.因此,本教材在讲解知识的过程中不但设计了"想一想""议一议""做一做"等栏目,而且从生活实际问题入手引出数学概念,利用数学知识解决这些问题,让学生的思维活跃起来,以达到激发他们的学习兴趣、提升他们的数学知识应用能力的目的.

本教材的内容主要包括立体几何、复数、排列组合、随机变量及其分布、统计.本教材由赵培勇(郑州财税金融职业学院)担任主编.

由于编者水平有限,书中难免存在不妥之处,敬请读者批评指正,提出宝贵的意见和建议.

编　者

目录

CONTENTS

第6单元 立体几何

6.1 平面的基本性质

我们平常所见到的平静的湖面、校园内的操场、教室内的黑板等,都给人以平面的直观印象,但实际上,它们只是平面的一部分,几何中所说的平面是这些平面的无限延展,是没有边界的.

6.1.1 平面的表示

想一想

我们用平行四边形来表示立体空间中的平面,是否可以说平行四边形就是平面呢?

因为平面是无限延展的,所以我们无法将其在纸上表示出来. 通常用一个平行四边形来表示平面,并用希腊字母 $\alpha,\beta,\gamma,\cdots$写在平行四边形的一个角上来表示不同的平面,如图 6-1(a),(b)所示的平面 α、平面 β;也可用平行四边形四个顶点的字母或者对角线的字母来表示,如图 6-1(c)所示的平面 $ABCD$ 或平面 AC.

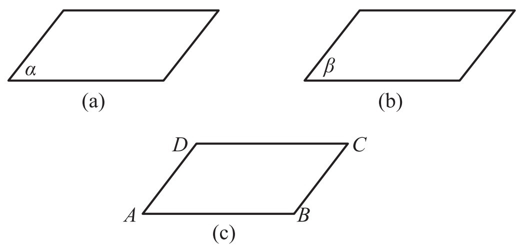


图 6-1

水平的平面可以画成一个平行四边形,锐角画成 45°,钝角画成 135°,横边是邻边的 2 倍;竖直的平面常画成矩形,如图 6-2 所示. 具体的可根据实际需要来画,只要便于

分析与研究即可.

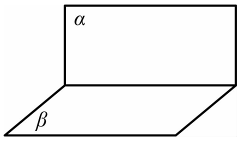


图 6-2

做一做

1. 举出生活中平面的实例.

2. 画出一个平面,并用字母表示出来.

6.1.2 平面的三条基本性质

在初中,我们学过了点和直线的基本性质,即

(1)在所有连接两点的线中,线段最短;

(2)过两点有且只有一条直线.

几何中的点和直线都是抽象的概念,所画出的点不考虑其大小,所画出的直线也不考虑其粗细. 同样,几何中的平面也是抽象的概念,尽管在日常生活中我们知道什么样的物体表面是平的,什么样的物体表面是凸凹不平的,但这只是对平面形象的直观认识. 人们在长期的观察和社会实践中,总结出了关于平面的三条基本性质.

基本性质 1　如果一条直线上的两个点在一个平面内,那么这条直线上的所有点都在这个平面内.

此时称直线 AB 在平面 α 内或平面 α 经过直线 AB,记作 $AB\subset\alpha$,如图 6-3 所示.

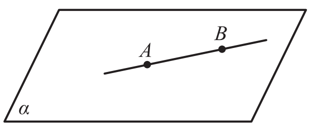


图 6-3

利用平面的这一基本性质可以判断直线是否在平面内，也可以检验一个面是不是“平的”，因为弯曲的面不具备这种性质.

基本性质 2　经过不在同一条直线上的三点，有且只有一个平面.

这也可以简单地说成“**不共线的三点确定一个平面**”.

在实际生活中，我们见到过的三条腿的凳子和支撑照相机用的三脚架（图 6-4），都是平面的基本性质 2 的应用.

想一想

如何用两根细绳来检查一把椅子的 4 条腿的底端是否在同一平面内？

图 6-4

过不共线的三点 A，B，C 的平面常可记作平面 ABC，如图 6-5 所示.

图片

生活中确定平面

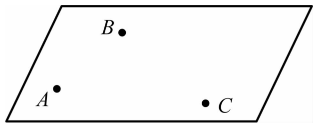
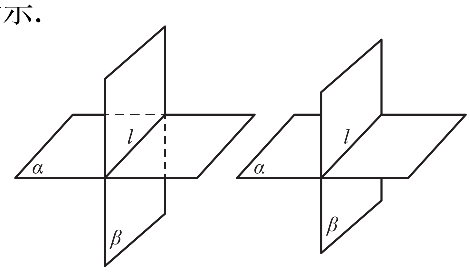


图 6-5

基本性质 3　如果两个不重合的平面有一个公共点，那么它们有且只有一条过这个点的公共直线.

平面的这一基本性质也说明，如果两个平面有一条公共直线，则称这**两个平面相交**. 这条公共直线叫作**两个平面的交线**. 如图 6-6 所示，平面 α 与平面 β 相交，交线为 l，记作 $\alpha \cap \beta = l$.

在画两个平面相交时，一定要画出它们的交线，图形中被遮住的部分要画成虚线，如图 6-6（a）所示；或者不画，如图 6-6（b）所示.



(a)　　(b)

图 6-6

根据平面的基本性质，可以得出以下三个推论：

推论 1　经过一条直线和这条直线外的一点，有且只有一个平面，如图 6-7(a)所示.

推论 2　经过两条相交直线，有且只有一个平面，如图 6-7(b)所示.

推论 3　经过两条平行直线，有且只有一个平面，如图 6-7(c)所示.

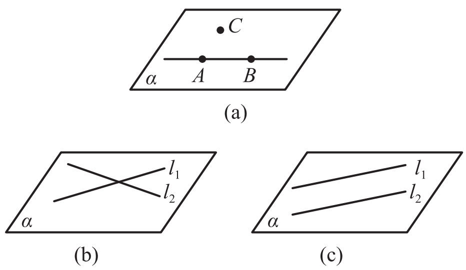


图 6-7

小提示

直线上的一个点可以将直线分成两部分，平面上的一条直线可以将平面分成两部分，空间中的一个平面可以将空间分成两部分.

例　如图 6-8 所示，已知△ABC 的各顶点在平面 α 外，直线 AB，BC，AC 分别交平面 α 于点 P，Q，R.

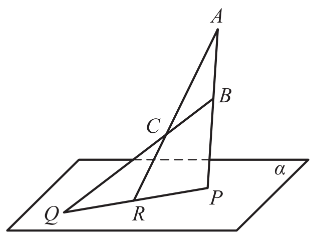


图 6-8

求证：P，Q，R 三点共线.

（说明：为了叙述的简便，这里将线段 AB，BC，AC 所在的直线直接写成直线 AB，BC，AC，将△ABC 所在的平面直接写成平面 ABC，本书在以后的叙述中都采用这种表述方法.）

证明　因为 $P\in AB$，$AB\subset$平面 ABC，

所以 $P\in$平面 ABC.

因为 $R\in AC$，$AC\subset$平面 ABC，

所以 $R\in$平面 ABC.

又因为 $P\in\alpha$，$R\in\alpha$，

由基本性质 3 得，平面 $ABC\cap\alpha=PR$.

因为 $Q\in BC$，$BC\subset$平面 ABC，

所以 $Q\in$平面 ABC.

又因为 $Q\in\alpha$，

所以 Q 在平面 ABC 与平面 α 的交线上，即 $Q\in PR$.

所以 P，Q，R 三点共线.

做一做

1. “平面 α 与平面 β 只有一个公共点”的说法正确吗?

2. 已知点 A，B，C 是直线 l 上的三个不同的点，点 D 不是直线 l 上的点，试判断直线 AD，BD，CD 是否在同一个平面内.

习题 6.1

1. 下列说法正确吗? 为什么?

(1)每个平面都有确定的面积;

(2)三点可以确定一个平面;

(3)一条直线和一个点可以确定一个平面.

2. 下面的选项中正确的一项是(　　).

A. 四条线段首尾连接所得的图形即为一个平面图形

B. 任何一个平面图形都是一个平面

C. 两条平行的直线可以确定一个平面

D. 两个平面的面积加起来要比一个平面的面积大

3. 根据下列各点、直线和平面之间的位置关系，画出相应的图形.

(1)点 A 在平面 α 内，点 B 不在平面 α 内;

(2)点 A 在直线 l 上，直线 l 在平面 α 内;

(3)直线 l 在平面 α 内，直线 m 与平面 α 交于 A 点，且点 A 不在直线 l 上;

(4)平面 α 与平面 β 交于直线 l，直线 m 在平面 α 内，且与直线 l 平行.

6.2　直线与直线、直线与平面、平面与平面平行的判定和性质

6.2.1　直线与直线平行的判定和性质

观察图 6-9 所示的长方体，可以看出，长方体的棱 AA_1 所在的直线与棱 CD 所在的直线既不相交也不平行，而且不同在一个平面内.

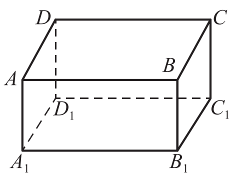


图 6-9

在空间中，同在一个平面内的直线叫作**共面直线**，平行或相交的直线都是共面直线；不同在任何一个平面内的两条直线叫作**异面直线**，图 6-9 中 AA_1 所在的直线与 CD 所在的直线就是两条异面直线.

这样，空间中两条直线的位置关系就有三种，即平行、相交和异面.

在画异面直线时，为了突出其不共面的特点，通常利用平面来衬托，如图 6-10 所示.

议一议

观察教室中的物体，你能否抽象出具有异面直线这种位置关系的两条直线？

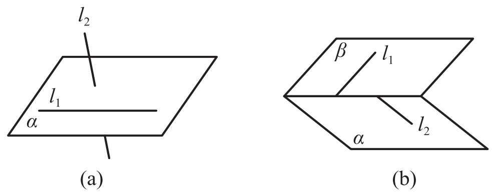


图 6-10

利用初中所学的平面几何知识,我们知道,在同一平面内,如果两条直线都和第三条直线平行,那么这两条直线也相互平行. 这一直线平行的性质在空间几何中也同样适用,即

定理 1　平行于同一条直线的两条直线互相平行.

这个性质称为空间平行线的传递性,常将其作为判断空间两条直线平行的依据.

注意: 顺次连接空间中不共面的四个点所构成的图形叫作空间四边形.

例 1　在图 6-11 所示的空间四边形 $ABCD$ 中,点 M, N, P, Q 分别是边 BC, CD, DA, AB 的中点. 试判断四边形 $MNPQ$ 是否为平行四边形.

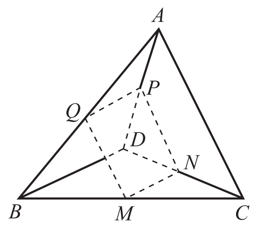


图 6-11

解　连接 CA、BD.

在△ABC 中,因为 M, Q 分别是 BC, AB 的中点,所以 MQ 是△ABC 的中位线,则

$$MQ /\!/ CA, 且\ MQ=\frac{1}{2}CA.$$

同理可得,在△ADC 中,

$$NP /\!/ CA, 且\ NP=\frac{1}{2}CA,$$

所以 $$NP /\!/ MQ, 且\ NP=MQ,$$

因此,四边形 $MNPQ$ 是平行四边形.

做一做

1. 结合教室及教室内的物品，举出空间两条直线平行的例子.

2. 把一张矩形的纸对折两次后打开，说明为什么这些折痕是互相平行的.

6.2.2 直线与平面平行的判定和性质

通过上节的学习我们知道，如果一条直线和一个平面有两个公共点，那么这条直线就在这个平面内[图 6-12(a)]，可记作 $l\subset\alpha$.

在空间中，直线和平面的位置关系还有另外两种情况，即直线与平面相交及直线与平面平行. 如果一条直线和一个平面只有一个公共点，则叫作**直线与平面相交**，这个公共点叫作直线与平面的**交点**. 如图 6-12(b)所示，直线 l 与平面 α 相交于 A 点，可记作 $l\cap\alpha=A$. 如果直线和平面没有公共点，则称**直线与平面平行**[图 6-12(c)]，可记作 $l/\!/\alpha$.

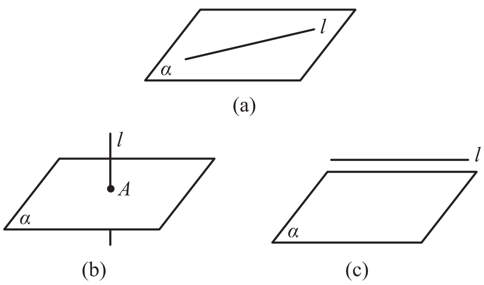


图 6-12

一般地，直线与平面平行的判定定理为

定理 2　如果平面外的一条直线和平面内的一条直线平行，那么这条直线和这个平面平行.

在画一条直线与已知平面平行时，通常把表示直线的线

议一议

如果直线 l_1 和直线 l_2 是异面直线，且直线 l_1 在平面 α 内，那么直线 l_2 与平面 α 会是什么样的位置关系呢？

段画在表示平面的平行四边形的外面,并且使其与平行四边形的一边平行[图 6-13(a)]或与平行四边形内的一条线段平行[图 6-13(b)].

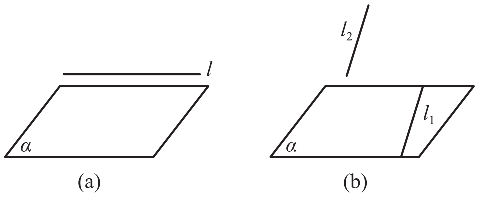


图 6-13

直线和平面平行有以下性质定理:

定理 3　如果一条直线和一个平面平行,且经过这条直线的平面和这个平面相交,那么这条直线就和两个平面的交线平行.

空间几何中经常应用这条定理,即根据"线与面平行"来判定"线与线平行". 如图 6-14 所示,已知平面 α 和平面 β 相交于直线 m,直线 l//平面 β 且在平面 α 内,则 l//m.

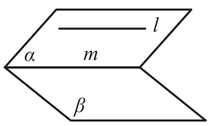


图 6-14

例 2　如图 6-15 所示,已知点 P 为平行四边形 $ABCD$ 外的一点,点 M 是 PD 的中点,平行四边形 $ABCD$ 的对角线 AC,BD 相交于 O 点.

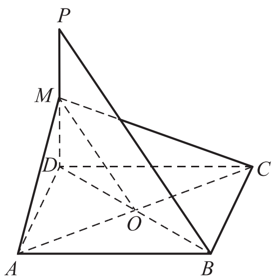


图 6-15

求证：直线 PB∥平面 MAC.

分析 根据直线与平面平行的性质，要想证得直线 PB 与平面 MAC 平行，首先要证得直线 PB 与平面 MAC 内的一条直线平行，观察图 6-15，需要作出辅助线，即连接 MO，然后进行求证.

证明 连接 MO.

在△PBD 中，因为 M 是 PD 的中点，O 是 BD 的中点，所以 MO 是△PBD 的中位线，则

$$MO /\!/ PB.$$

又因为直线 MO 在平面 MAC 内，所以

$$\text{直线 } PB /\!/ \text{平面 } MAC.$$

· 做一做 ·

下列说法是否正确，正确的说明理由，不正确的举出反例.

(1) 如果直线 l 上有无数个点不在平面 α 内，那么 $l /\!/ \alpha$；

(2) 如果直线 l 与平面 α 不平行，那么直线 l 一定与平面 α 相交；

(3) 如果直线 l 在平面 α 外，那么 $l /\!/ \alpha$；

(4) 如果直线 l∥平面 α，那么直线 l 与平面 α 内的所有直线都平行.

6.2.3 平面与平面平行的判定和性质

我们可以看到，教室的天花板和地面所在的平面无论怎么延展，都不会有共同的交点；而教室的墙壁与地面可以

相交于一条直线.

一般地,如果两个平面没有公共点,那么称**这两个平面互相平行**;如果两个平面有且只有一条公共直线,那么称这两个平面相交,即空间中两个平面的位置关系有平行和相交两种.

在画两个平面平行时,通常把表示平面的两个平行四边形的对应边画成平行线.平面 α 和平面 β 平行可记作 $\alpha /\!/ \beta$,如图 6-16 所示.

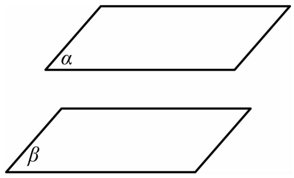


图 6-16

由两个平面平行的定义可归纳出两个平面平行的判定定理:

定理 4　如果一个平面内有两条相交直线平行于另一个平面,那么这两个平面平行.

由这个定理可知,根据直线与平面平行可以判定平面与平面平行.

例 3　已知平面 α 的两条相交直线 l_1 和 l_2,m,n 是平面 β 内的两条直线,其中,$l_1 /\!/ m$,$l_2 /\!/ n$.

求证:$\alpha /\!/ \beta$.

证明　因为 $l_1 /\!/ m$,且 m 在平面 β 内,l_1 在平面 β 外,所以

$$l_1 /\!/ \beta.$$

同理 $$l_2 /\!/ \beta.$$

又因为 l_1 和 l_2 为平面 α 内的两条相交直线,所以由两个平面平行的判定定理得

$$\alpha /\!/ \beta.$$

一般地，两个平面平行有以下性质定理：

定理5 如果两个平行平面同时与第三个平面相交，那么它们的交线互相平行.

如图6-17所示，平面α//平面β，平面α，β与平面γ分别相交于直线l_1和l_2，因为直线l_1和l_2分别在平面α和平面β内，所以它们不相交；但它们又同在平面γ内，所以根据平行线的定义可知它们是平行的.

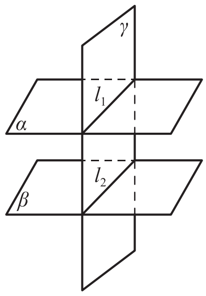


图 6-17

做一做

如图6-18所示，平面α//β，点M在平面α与平面β的同侧，过点M作直线a与直线b，直线a分别与平面α，β相交于点A，B，直线b分别与平面α，β相交于点C，D.

(1)判断直线AC与直线BD是否平行；

(2)如果$MA=4$ cm，$AB=5$ cm，$MC=3$ cm，求MD的长.

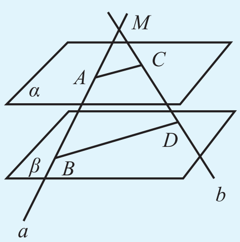


图 6-18

习题 6.2

1. 选择题.

(1)空间两条互相平行的直线是指(　　).

A. 在空间没有公共点的两条直线

B. 分别在两个平面内的两条直线

C. 在同一平面内且没有公共点的两条直线

D. 分别在两个不同的平面内且没有公共点的两条直线

(2)如果直线 m 平行于平面 α 内的一条直线 n，则直线 m 与平面 α 的位置关系为(　　).

A. $m\subset\alpha$　　　　B. $m/\!/\alpha$

C. $m/\!/\alpha$ 或 m 与 α 相交　　　　D. $m\subset\alpha$ 或 $m/\!/\alpha$

(3)若 m,n 是异面直线,l_1,l_2 也是异面直线,则 m 和 l_1(　　).

A. 不可能平行　　　　B. 不可能相交

C. 一定是异面直线　　　　D. 异面、共面都有可能

(4)下列叙述中错误的是(　　).

A. 平行于同一个平面的两个平面互相平行

B. 平行于同一条直线的两个平面互相平行

C. 一个平面与两个平行平面相交,则两条交线互相平行

D. 一条直线与两个平行平面中的一个相交,则必定与另一个平面也相交

2. 填空题.

在如图 6-19 所示的长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中：

相互平行的直线有________；

异面直线有________；

与平面 $ABCD$ 平行的直线有________.

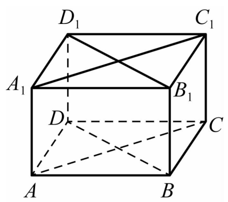


图 6-19

3. 如图 6-20 所示，已知空间四面体 $P\text{-}ABC$ 中，点 E,F,G 分别是棱 PA,PB,PC 的中点.

求证：平面 EFG∥平面 ABC.

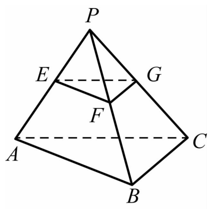


图 6-20

6.3 直线与直线、直线与平面、平面与平面所成的角

6.3.1 空间两条直线所成的角

观察图 6-21 中的长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$,我们知道,AB_1 与 CD 是两条异面直线,度量$\angle BAB_1$ 和$\angle CDC_1$,发现它们是相等的.

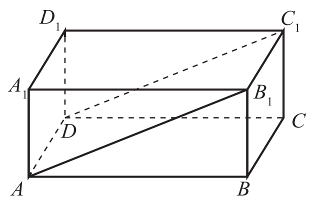


图 6-21

— 小提示 —

异面直线所成的角最终转化成了同一平面内的直线所成的角.

过空间任意一点分别作与两条异面直线平行的直线,则这两条相交直线所成的最小夹角即**两条异面直线所成的角**.

如图 6-22(a)所示,直线 m 与直线 n 是两条异面直线;在求 m 与 n 所成的角时,可通过空间任意一点 O 分别作直线 m,n 的平行线 m',n',则平行线 m',n'的夹角 θ 即异面直线 m,n 所成的角,如图 6-22(b)所示. 为方便起见,常将点 O 取在两条异面直线中的一条上[图 6-22(c)],只需过点 O 作出直线 m 的平行线 m',则直线 m'与直线 n 的夹角 θ 即异面直线 m,n 所成的角.

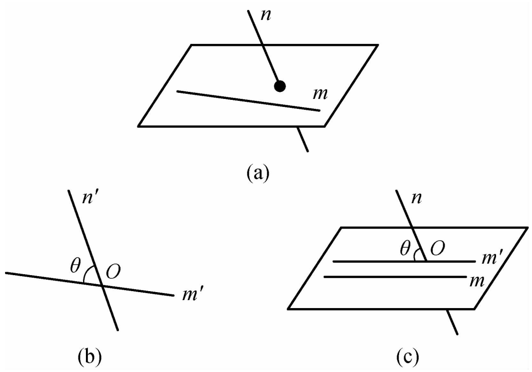


图 6-22

例 1 如图 6-23 所示，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，求异面直线 A_1B 与 B_1C 所成的角.

解 因为在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$A_1B \parallel D_1C$，所以 $\angle B_1CD_1$ 即异面直线 A_1B 与 B_1C 所成的角.

又因为 $B_1C=CD_1=D_1B_1$，所以 $\triangle B_1CD_1$ 为等边三角形，则 $\angle B_1CD_1=60°$，即异面直线 A_1B 与 B_1C 所成的角为 60°.

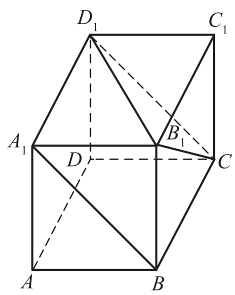


图 6-23

做一做

在如图 6-24 所示的长方体中，$\angle BAB_1=30°$，求下列异面直线所成的角的度数：

(1)AB_1 与 DC；

(2)AB_1 与 CC_1.

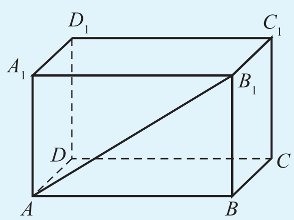


图 6-24

6.3.2 直线与平面所成的角

当直线和平面相交，但不互相垂直时，那么这条直线就叫作这个平面的**斜线**. 斜线与平面的交点叫作**斜足**. 过斜线上除斜足外的一点向平面引垂线，垂线与平面的交点叫作**垂足**. 过垂足与斜足的直线叫作斜线在这个平面上的**射影**.

如图 6-25 所示，直线 PB 是平面 α 的斜线，斜足为点 B，直线 PA 为平面 α 的垂线，垂足为点 A，直线 AB 即斜线 PB 在平面 α 内的射影.

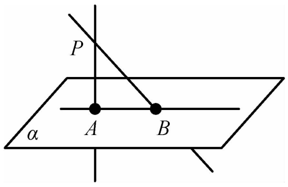


图 6-25

平面的一条斜线与它在平面上的射影所成的角叫作**这条斜线与这个平面所成的角**. 在图 6-25 中，$\angle PBA$ 即斜线 PB 与平面 α 所成的角.

我们知道，当直线与平面垂直时，直线与平面所成的角为直角；当直线与平面平行或直线在平面内时，直线与平面所成的角为 $0°$ 角. 显然，直线与平面所成角的范围是 $[0°, 90°]$.

例 2 如图 6-26 所示，已知 $\triangle ABC$ 的顶点在平面 α 外，底边 BC 在平面 α 内，点 D 是底边 BC 的中点. 已知底边长 $BC=30$ cm，$AB=AC=25$ cm，又知点 A 到平面 α 的垂线段 $AE=10$ cm，求斜线 AD 和平面 α 所成的角的大小.

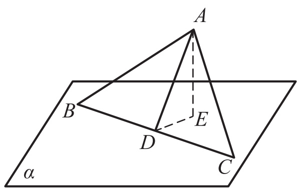


图 6-26

解 连接 DE，因为 AE 是平面 α 的垂线，AD 是平面 α 的斜线，所以 DE 是 AD 在平面 α 内的射影，因此，$\angle ADE$ 是 AD 和平面 α 所成的角.

因为 $AB=AC$，D 为 BC 中点，所以 $AD\perp BC$.

在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ADB=90^\circ$，所以

$$AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=\sqrt{25^2-15^2}=20\ \text{cm}.$$

在 Rt$\triangle ADE$ 中，

$$\sin\angle ADE=\frac{AE}{AD}=\frac{10}{20}=\frac{1}{2},$$

所以 $\angle ADE=30^\circ$，即斜线 AD 和平面 α 所成的角为 30°.

做一做

如图 6-27 所示，在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，高 $D_1D=4$ cm，底面是边长为 2 cm 的正方形. 求对角线 BD_1 与底面 $ABCD$ 所成角的大小(精确到 $1'$).

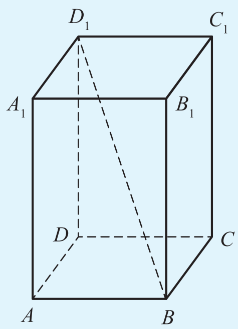


图 6-27

6.3.3 平面与平面所成的角

前面我们学习了直线与直线所成的角及直线与平面所成的角. 在实际生产与生活中，为了解决一些问题，我们常常需要研究两个平面所成的角. 例如，在修筑水坝时，为了使水坝牢固且耐用，必须使水坝的斜面与水平面形成适当

的角度,如图 6-28 所示.

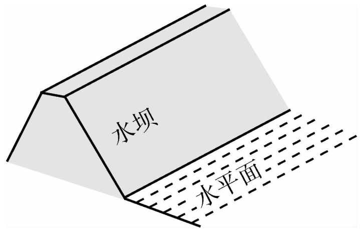


图 6-28

平面内的一条直线把平面分成两部分,其中的每部分叫作**半平面**.

从一条直线出发的两个半平面所组成的图形叫作**二面角**,这条直线叫作**二面角的棱**,这两个半平面叫作**二面角的面**.

如图 6-29(a)所示,以直线 l 为棱,两个半平面分别为 α,β 的二面角,可记作"二面角 α-l-β". 有时为了方便,也可在两个半平面内分别取两个点,如图 6-29(b)中的点 E,N,可将该二面角记作"二面角 E-AB-N".

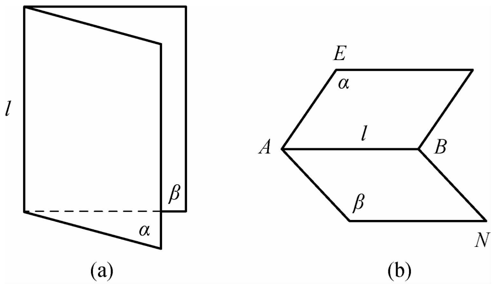


图 6-29

过棱上一点,分别在二面角的两个半平面内作垂直于棱的射线,由这两条射线构成的角叫作**二面角的平面角**. 如图 6-30 所示,在二面角 α-l-β 的棱 l 上取一点 O,在半平面 α 内作 $AO\perp l$,在半平面 β 内作 $BO\perp l$,则 $\angle AOB$ 即二面角 α-l-β 的平面角.

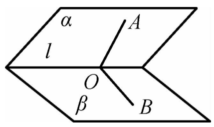


图 6-30

二面角的大小可以用它的平面角来度量，当二面角的两个半平面重合时，二面角为 $0°$角；当二面角的两个半平面在一个水平面上时，二面角为平角，即 $180°$角. 显然，二面角的取值范围为$[0°,180°]$.

当二面角的平面角为 $90°$时，二面角可称为**直二面角**，即表示二面角的两个半平面互相垂直.

做一做

如图 6-31 所示，在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，求二面角 $D_1\text{-}AD\text{-}B$ 的大小.

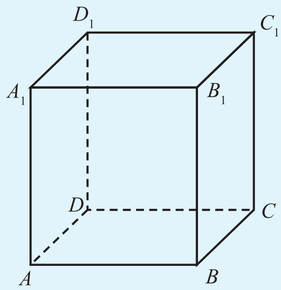


图 6-31

习题 6.3

1. 在图 6-32 所示的正方体中，

(1)指出哪些棱与 BB_1是异面直线，哪些棱与对角线 BD_1 是异面直线.

(2)分别求出直线 DD_1与 BC_1，A_1D_1及 DC_1所成的角.

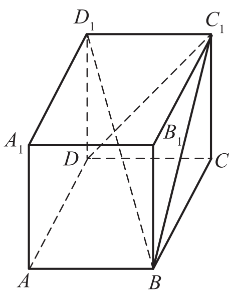


图 6-32

2. 如图 6-33 所示，在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，已知 $AB=\sqrt{3}$，$BC=\sqrt{3}$，$AA_1=1$. 求：

(1)直线 A_1C_1 与直线 BC 所成的角；

(2)直线 AD_1 与直线 C_1C 所成的角；

(3)直线 AB_1 与直线 C_1D_1 所成的角.

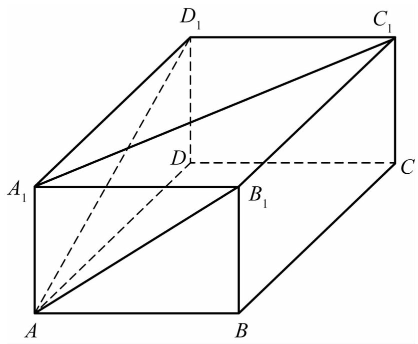


图 6-33

3. 如图 6-34 所示，在正方体 AC_1 中，求平面 ABC_1D_1 与平面 $ABCD$ 所成的二面角的大小.

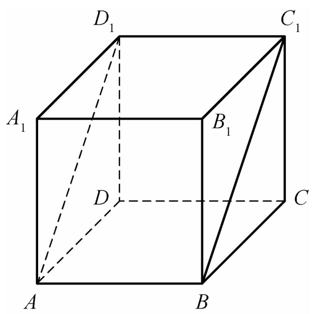


图 6-34

4. 15 m 高的旗杆 DA 直立在地面上，绳子 DB，DC 分别与杆身成 45°和 60°的角. 点 A，B，C 都在地面上.

(1)求线段 DB，DC 的长；

(2)求线段 DB，DC 在地面上射影的长.

6.4 直线与直线、直线与平面、平面与平面垂直的判定和性质

6.4.1 直线与直线垂直的判定和性质

当空间中两条异面直线 m，n 所成的角为 90°时，称这**两条异面直线互相垂直**，记作 $m \perp n$.

当两条异面直线所成的角为 0°时，称这两条直线互相平行或重合.

想一想

在空间中，垂直于同一条直线的两条直线是否平行?

例 1 如图 6-35 所示，在长方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中，直线 A_1A 与直线 DC 是否垂直?

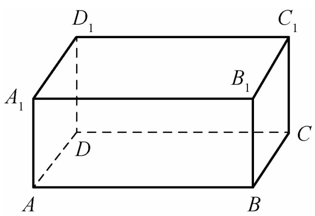


图 6-35

解 由图可知，直线 A_1A 与直线 DC 是异面直线.

因为在长方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中，$DC /\!/ AB$，所以 $\angle A_1AB$ 即异面直线 A_1A 与 DC 所成的角.

又因为 $\angle A_1AB$ 为直角，因此 $A_1A \perp DC$.

做一做

在图 6-35 所示的长方体中，找出与直线 AB 垂直的棱，并指出它们与平面 $ABCD$ 的关系.

6.4.2 直线与平面垂直的判定和性质

在实际中所看到的旗杆与地面的位置关系，放在课桌上的粉笔盒的每个棱与课桌的位置关系，等等，都给出了一条直线与平面垂直的形象.

如果一条直线和一个平面内的任何一条直线都垂直，那么就说**这条直线和这个平面垂直**，这条直线叫作**平面的垂线**，直线与平面的交点叫作**垂足**，这个平面叫作**直线的垂面**. 垂线上的任意一点与垂足之间的连线叫作**这个点到这个平面的垂线段**，垂线段的长度叫作**这个点到这个平面的距离**.

画直线与平面垂直时，通常把直线画成与表示平面的平行四边形的一条边垂直. 如图 6-36 所示，直线 l 与平面 α 互相垂直，记作 $l\perp\alpha$，垂足为点 O.

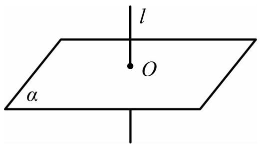


图 6-36

直线与平面垂直的判定定理为：

定理 1　如果一条直线与一个平面内的两条相交直线都垂直，那么这条直线垂直于这个平面.

由空间中直线与平面垂直的定义可知直线与平面垂直的性质定理为：

定理 2　如果两条直线都垂直于同一个平面，那么这两条直线互相平行.

由一条直线和一个平面互相垂直可得出以下结论：

(1)如果一条直线垂直于一个平面，那么它和平面内的任意一条直线都互相垂直；

议一议

过平面外一点有几条直线与该平面垂直？过直线上一点有几个平面与该直线垂直？

(2)如果两条平行直线中的一条垂直于一个平面,那么另一条也垂直于这个平面.

做一做

如图 6-37 所示,$\triangle ABC$ 在平面 α 内,$\angle BAC=90^\circ$,且 $PA\perp\alpha$ 于点 A,那么 AC 与 PB 是否垂直? 为什么?

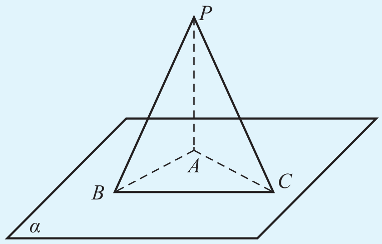


图 6-37

6.4.3 平面与平面垂直的判定和性质

一般地,当两个平面相交时,如果它们所成的二面角是直二面角,那么这两个平面互相垂直. 若平面 α 与平面 β 互相垂直,则可记作 $\alpha\perp\beta$.

如图 6-38 所示,在画两个互相垂直的平面时,常把直立平面的竖边画成与水平平面的横边垂直.

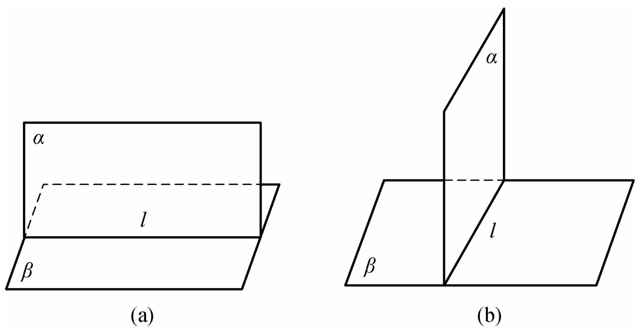


图 6-38

两个平面互相垂直有以下判定定理:

定理 3　如果一个平面经过另一个平面的一条垂线,那么这两个平面互相垂直.

两个平面互相垂直有以下性质定理:

定理 4　如果两个平面互相垂直,那么在一个平面内垂直于它们交线的直线垂直于另一个平面.

例 2　如图 6-39 所示,求证:在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,平面 $BB_1D_1D \perp$ 平面 AA_1C_1C.

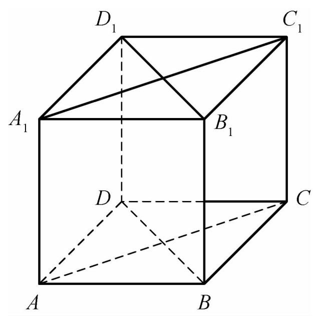


图 6-39

证明　在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,

因为 $CC_1 \perp B_1C_1$,$CC_1 \perp C_1D_1$,且 $B_1C_1 \subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$,$C_1D_1 \subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$,$B_1C_1 \cap C_1D_1 = C_1$,

所以 $CC_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$.

所以 $CC_1 \perp B_1D_1$.

又因为 $B_1D_1 \perp A_1C_1$,$A_1C_1 \cap CC_1 = C_1$,

所以 $B_1D_1 \perp$ 平面 AA_1C_1C.

因为 $B_1D_1 \subset$ 平面 BB_1D_1D,

所以平面 $BB_1D_1D \perp$ 平面 AA_1C_1C.

做一做

在检查工件相邻的两个面是否垂直时,只要用曲尺的一边卡在工件的一个面上,另一边在工件的另一个面上转动一下,观察尺边是否和这个面密合就可以了.这是为什么?

习题 6.4

1. 选择题.

(1)若空间中的一条直线和一个三角形的两边同时垂直,则这条直线和三角形的第三边的位置关系是(　　).

A. 垂直　　B. 相交但不垂直　　C. 平行　　D. 不确定

(2)在空间中,下列叙述正确的是(　　).

A. 平行于同一条直线的两个平面平行

B. 垂直于同一个平面的两个平面平行

C. 垂直于同一个平面的两条直线平行

D. 垂直于同一条直线的两个平面垂直

(3)已知平面 $\alpha\perp$平面 β,直线 $m\subset\alpha$,直线 $n\subset\beta$,且$m\perp n$,则 m 与 β 的位置关系是(　　).

A. $m\perp\beta$　　B. $m/\!/\beta$

C. $m\subset\beta$　　D. 上述情况都有可能

2. 如图 6-40 所示,已知 $PA\perp$平面 ABC,$AB\perp BC$,$AE\perp PB$,$AF\perp PC$.

求证:$PC\perp EF$.

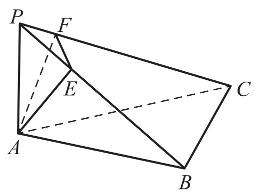


图 6-40

3. 如图 6-41 所示,已知点 P 为正方形 $ABCD$ 外的一点,且 $PB=PD$. 点 O 为正方形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 的交点.

求证:平面 $PBD\perp$平面 $ABCD$.

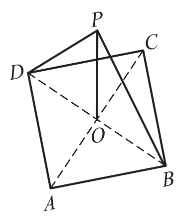
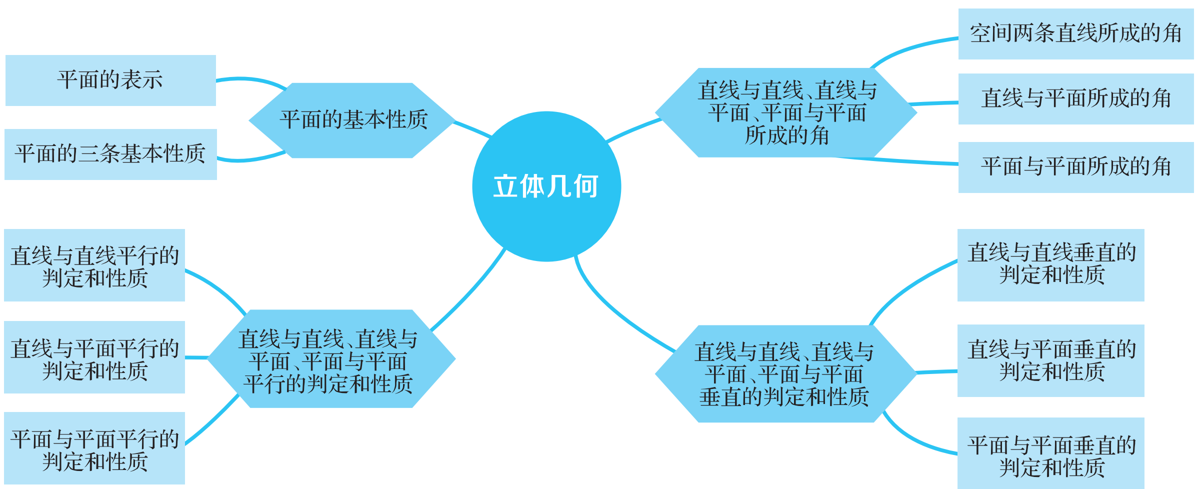


图 6-41

整理与复习

知识脉络图



主要知识点

1. 平面的基本性质及推论

基本性质 1　如果一条直线上的两个点在一个平面内，那么这条直线上的所有点都在这个平面内.

基本性质 2　经过不在同一条直线上的三点，有且只有一个平面.

基本性质 3　如果两个不重合的平面有一个公共点，那么它们有且只有一条过这个点的公共直线.

根据平面的基本性质，可以得出以下三个推论：

推论 1　经过一条直线和这条直线外的一点，有且只有一个平面.

推论 2　经过两条相交直线，有且只有一个平面.

推论 3　经过两条平行直线，有且只有一个平面.

2. 直线与直线、直线与平面、平面与平面平行的判定和性质

(1)直线与直线平行的判定和性质.

定理 1　平行于同一条直线的两条直线互相平行.

(2)直线与平面平行的判定和性质.

定理 2　如果平面外的一条直线和平面内的一条直线平行，那么这条直线和这个平面平行.

定理 3　如果一条直线和一个平面平行，且经过这条直线的平面和这个平面相交，那么这条直线就和两个平面的交线平行.

(3)平面与平面平行的判定和性质.

定理 4　如果一个平面内有两条相交直线平行于另一个平面，那么这两个平面平行.

定理 5　如果两个平行平面同时与第三个平面相交，那么它们的交线互相平行.

3. 直线与直线、直线与平面、平面与平面所成的角

(1)直线与直线所成的角. 过空间任意一点分别作与两条异面直线平行的直线，则这两条相交直线所成的最小夹角即为两条异面直线所成的角.

(2)直线与平面所成的角. 当直线和平面相交，但不互相垂直时，那么这条直线就叫作这个平面的斜线，斜线与平面的交点叫作斜足. 过斜线上除斜足外的一点向平面引垂线，那么垂线与平面的交点叫作垂足. 过垂足与斜足的直线叫作斜线在这个平面上的射影. 平面的一条斜线与它在平面上的射影所成的角叫作这条斜线与这个平面所成的角.

(3)平面与平面所成的角. 平面内的一条直线把平面分成两部分，其中的每部分叫作半平面. 从一条直线出发的两个半平面所组成的图形叫作二面角，这条直线叫作二面角的棱，这两个半平面叫作二面角的面.

4. 直线与直线、直线与平面、平面与平面垂直的判定和性质

(1)直线与直线垂直的判定和性质.

当空间中两条异面直线 m，n 所成的角为 90° 时，称这两条异面直线互相垂直，记作 $m \perp n$.

(2)直线与平面垂直的判定和性质.

定理 1　如果一条直线与一个平面内的两条相交直线都垂直，那么这条直线垂直于这个平面.

定理 2　如果两条直线都垂直于同一个平面，那么这两条直线互相平行.

(3)平面与平面垂直的判定和性质.

定理 3　如果一个平面经过另一个平面的一条垂线，那么这两个平面互相垂直.

定理 4　如果两个平面互相垂直，则在一个平面内垂直于它们交线的直线垂直于另一个平面.

本单元练习题

A 组

1. 选择题.

(1)如果两条直线没有公共点，则这两条直线的位置关系为(　　).

A. 平行　　B. 共面　　C. 异面　　D. 平行或异面

(2)平行于同一条直线的所有直线(　　).

A. 互相平行　　B. 都相交

C. 既不平行也不相交　　D. 都共面

(3)不在同一个平面内的两条直线之间的位置关系是(　　).

A. 互相平行　　B. 相交　　C. 异面　　D. 以上都有可能

(4)过直线外两点作与已知直线平行的平面，可以作(　　).

A. 1 个　　B. 0 个或无数个　　C. 1 个或无数个　　D. 0 个，1 个或无数个

(5)下面说法错误的是(　　).

A. 垂直于同一个平面的两条直线互相平行

B. 垂直于同一条直线的两条直线互相平行

C. 垂直于同一条直线的两个平面互相平行

D. 垂直于三角形两边的直线必垂直于第三边

2. 求在图 6-42 所示的正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，平面 ABC_1D_1 与平面 $ABCD$ 所成的二面角的度数.

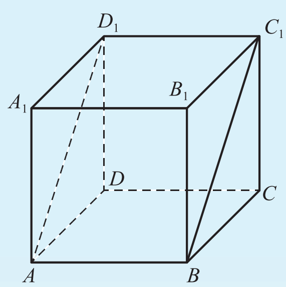


图 6-42

3. 如图 6-43 所示，已知空间四边形 $ABCD$，$AB=AC$，$DB=DC$，点 M 为 BC 的中点. 求证：$BC\perp$平面 AMD.

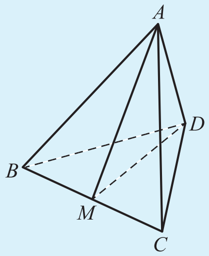


图 6-43

B 组

1. 判断下列命题是否正确，并说明理由.

(1)过直线外一点，可以作无数个平面与这条直线平行；

(2)过不在平面内的一条直线，有且只有一个平面与这个平面平行；

(3)过空间中的任意三点，有且只有一个平面.

2. 如图 6-44 所示，平面 $ECD\perp$平面 $ABCD$，$\angle DEC=90°$，四边形 $ABCD$ 为矩形.

(1)求证：$DE\perp BE$；

(2)如果 $AD=DE=\frac{1}{2}AB$，求平面 BDE 与平面 CDE 所成角的大小.

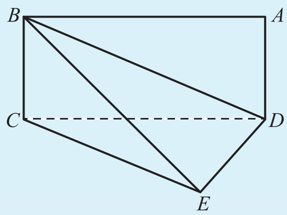


图 6-44

阅读与拓展

20 世纪最伟大的几何学家之一——陈省身

陈省身（1911—2004），祖籍浙江嘉兴，是 20 世纪最伟大的几何学家之一，被誉为“整体微分几何之父”. 他曾先后当选为“前中央研究院”首届院士、美国国家科学院院士、第三世界科学院（现更名为“发展中国家科学院”）创始院士、英国皇家学会外籍会员、意大利林琴科学院外籍院士、法国科学院外籍院士、中国科学院首批外籍院士.

1911 年 10 月 28 日，陈省身出生于浙江嘉兴秀水县，他少年时就喜爱数学，觉得数学既有趣又较容易，并且喜欢独立思考，自主发展，常常“自己主动去看书，不是老师指定什么参考书才去看”. 1930 年，陈省身毕业于南开大学数学系. 1931 年，考入清华大学研究院，成为中国国内最早的数学研究生之一. 1934 年，获清华大学理学硕士学位，成为中国自己培养的第一名数学研究生. 1936 年获德国汉堡大学理学博士学位.

1936 年至 1937 年，陈省身在法国几何学大师 E · Cartan 处从事研究. E · Cartan 每两个星期约陈省身去他家里谈一次，大师面对面的指导使陈省身学到了老师的数学语言及思维方式，终身受益. 1937 年夏，陈省身受聘为清华大学的数学教授.

1985 年，南开数学研究所正式成立，陈省身随即以南开为基地，亲自主持举办学术活动，在中国数学界的支持下，培养了许多优秀的青年数学家.

陈省身给出了高维 Gauss-Bonnet（高斯-博内）公式的内蕴证明，被通称为 Gauss-Bonnet-Chern（高斯-博内-陈公式）；他提出的“Chern Class（陈氏示性类）”成为经典杰作；他发展了纤维丛理论，其影响遍及数学的各个领域；他建立了高维复流形上的值分布理论，包括 Bott-Chern（博特-陈）定理，影响及于代数数论；他为广义的积分几何奠定基础，获得基本运动学公式；他所引入的陈氏示性类与 Chern-Simons（陈-西蒙斯）微分式已深入数学以外的其他领域，成为理论物理的重要工具.

陈省身曾先后任教于西南联合大学、美国芝加哥大学和加州大学伯克利分校，是

“前中央研究院”数学所、美国国家数学科学研究所、南开数学研究所的创始所长. 培养了包括廖山涛、吴文俊、丘成桐、郑绍远，李伟光等在内的著名数学家. 其中，丘成桐是取得国际数学联盟的菲尔兹奖(Fields Medal)的第一个华人，也是继陈省身之后第二个获沃尔夫奖的华人.