

第一章

集合与条件

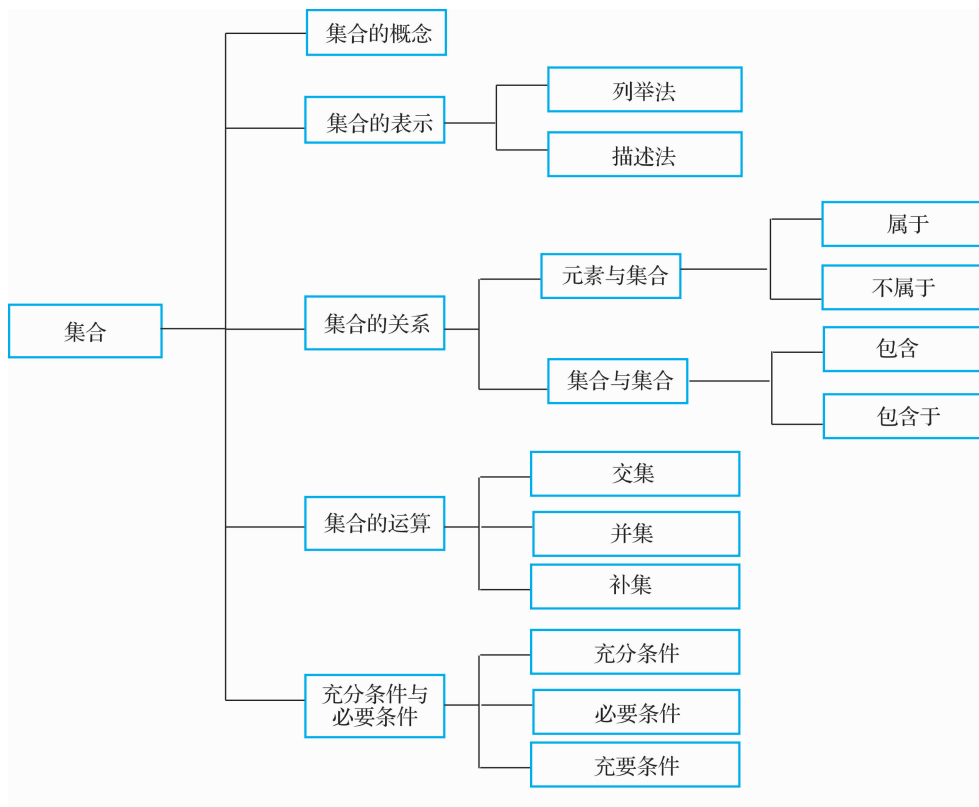
考纲要求

知识内容	考试层次要求		
	了 解	理 解	掌 握
集合的概念	√		
集合的表示法			√
集合之间的关系(子集、真子集、相等)			√
集合的运算(交、并、补)		√	
充要条件	√		

命题趋势

命题规律	考点	近几年常考题型及分值				
		2018	2019	2020	2021	2022
命题规律	集合的概念与运算	选择题,4分	选择题,4分	选择题,4分	选择题,4分	选择题,4分
	充要条件	选择题,4分	选择题,4分	选择题,4分	选择题,4分	选择题,4分
命题趋势	本章内容在历年真题中多以选择题形式出现(题目基本保持在两道),其分值比例约占5%,要求不高,难度不大.涉及的知识点有:集合间的关系;集合的运算;充分条件、必要条件与充要条件的判定定理.常与不等式、函数、数列等内容相交汇					

知识结构



第一节 集 合

真题在线

- (2018年·四川对口升学) 设集合 $A=\{a,b\}$, $B=\{b,c\}$, 则 $A\cup B=(\quad)$.
A. \emptyset B. $\{b\}$
C. $\{a,c\}$ D. $\{a,b,c\}$
- (2019年·四川对口升学) 设集合 $A=\{-2,2\}$, $B=\{-1,2\}$, 则 $A\cup B=(\quad)$.
A. $\{2\}$ B. $\{-2,-1\}$
C. $\{-2,2\}$ D. $\{-2,-1,2\}$
- (2020年·四川对口升学) 设集合 $M=\{-1,0,1,2\}$, $N=\{-2,0,1\}$, 则 $M\cap N=(\quad)$.
A. $\{0\}$ B. $\{0,1\}$
C. $\{-2,-1,0,1,2\}$ D. $\{-1,0,1\}$
- (2021年·四川对口升学) 设集合 $P=\{-1,0\}$, $Q=\{0,1,2\}$, 则 $P\cup Q=(\quad)$.
A. $\{0\}$ B. $\{-1,0\}$

- C. $\{0,1,2\}$ D. $\{-1,0,1,2\}$
 5. (2022年·四川对口升学) 设集合 $X=\{-1,0,1\}$, $Y=\{1,2\}$, 则 $X \cap Y =$ ().
 A. \emptyset B. $\{1\}$
 C. $\{-1,2\}$ D. $\{-1,0,1,2\}$

知识清单

知识点一 集合的概念与表示法

1. 集合

把具有某种属性的一些确定的对象看成一个整体,便形成一个集合,常用大写的拉丁字母 A, B, C 等表示.

2. 元素

集合中的每一个确定的对象叫作这个集合的元素,常用小写字母 a, b, c 等来表示.

3. 元素与集合的关系及性质

如果 a 是集合 A 的一个元素,就说 a 属于 A ,记作 $a \in A$;如果 a 不是集合 A 的元素,就说 a 不属于 A ,记作 $a \notin A$. 集合中的元素具有确定性、互异性、无序性的特征.

4. 常用的集合

空集(\emptyset)、正整数集(\mathbf{Z}^+ 或 \mathbf{N}^*)、自然数集(\mathbf{N})、整数集(\mathbf{Z})、有理数集(\mathbf{Q})、实数集(\mathbf{R}).

5. 集合的两种表示法

(1)列举法. 把集合的元素一一列举出来,写在大括号内,这种表示集合的方法叫作列举法.

注意:用列举法表示集合时,要注意以下几点:

- ①元素之间用逗号“,”隔开.
- ②元素不能重复(满足集合中元素的互异性).
- ③元素不能遗漏.
- ④当集合中的元素较少时用列举法比较简单;若集合中的元素较多或无限,但存在一定的规律性,在不发生误解的情况下,也可以用列举法表示.

(2)描述法. 用集合所含元素的共同特性表示集合的方法称为描述法.

描述法表示的一般形式是 $\{x | p(x)\}$,其中“ x ”是集合中元素的代表形式,“ $p(x)$ ”是集合中元素的共同特征,两者之间的竖线不可省略.

注意:用描述法表示集合时,要注意以下几点:

- ①写清楚集合中元素的代表形式(一般用小写字母表示).
- ②写明集合中元素的特征或性质.
- ③用于描述元素特征的语句要力求简明、准确,不产生歧义;多层描述时,应当准确使用“且”“或”等关联词.
- ④所有描述的内容都要写在大括号内.
- ⑤在不引起混淆的情况下,用描述法表示集合时也可以省去竖线和竖线左边的部分.例如,正整数的集合可简记为{正整数},但是,集合 $\{x | x > 1\}$ 就不能省略竖线及其左边的 x .

知识点二 集合间的关系

1. 子集

一般地,对于两个集合 A, B ,如果集合 A 中任何一个元素都是集合 B 的元素,就称集合 A 就叫作

集合 B 的子集,记作 $A \subseteq B$ 或者 $B \supseteq A$,读作“ A 包含于 B ”,或“ B 包含 A ”.

当集合 A 不包含于集合 B ,或集合 B 不包含集合 A 时,记作 $A \not\subseteq B$ 或 $B \not\supseteq A$.

性质:任何一个集合是它本身的子集,即 $A \subseteq A$;空集是任何集合的子集,即 $\emptyset \subseteq A$;对集合 A, B, C ,若 $A \subseteq B, B \subseteq C$,则 $A \subseteq C$.

注意:不能把子集说成由原来集合中的部分元素组成的集合,因为 A 的子集包括它本身,而这个子集由 A 的全体集合组成;空集也是 A 的子集,但这个子集中不包括 A 中的任何元素.

2. 真子集

如果 A 是 B 的子集,并且 B 中至少有一个元素不属于 A ,就称 A 是 B 的真子集(A 包含于 B 但不等于 B),记作 $A \subsetneq B$ 或 $B \supsetneq A$.

性质:空集是任何非空集合的真子集;对于集合 A, B, C ,若 $A \subsetneq B, B \subsetneq C$,则 $A \subsetneq C$.

注意:元素与集合之间是属于关系,集合与集合之间是包含关系.

3. 集合相等

一般地,对于两个集合 A 与 B ,如果集合 A 中的任何一个元素都是集合 B 的元素,同时集合 B 中的任何一个元素都是集合 A 的元素,我们就说集合 A 等于集合 B ,记作 $A = B$ (A, B 的所有元素均相等).

注意:(1)若两个集合相等,则两个集合所含元素完全相同,反之亦然.

(2)要判断两个集合是否相等,对于元素较少的有限集,主要看它们的元素是否完全相同;若是无限集,则从“互为子集”入手进行判断.

知识点三 集合的运算

1. 交集

一般地,由既属于集合 A 又属于集合 B 的所有元素组成的集合,称为集合 A 与集合 B 的交集,记作 $A \cap B$,即 $A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$.

性质:

- (1) $A \cap B = B \cap A$.
- (2) $A \cap A = A$.
- (3) $A \cap \emptyset = \emptyset$.
- (4) $A \cap B \subseteq A, A \cap B \subseteq B$.
- (5) 若 $A \subseteq B$,则 $A \cap B = A$.

2. 并集

一般地,由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素组成的集合,称为集合 A 与集合 B 的并集,记作 $A \cup B$,即 $A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$.

性质:

- (1) $A \cup B = B \cup A$.
- (2) $A \cup A = A$.
- (3) $A \cup \emptyset = A$.
- (4) $A \subseteq A \cup B, B \subseteq A \cup B$.
- (5) 若 $A \subseteq B$,则 $A \cup B = B$.

3. 图示两个集合的交集、并集

- (1)用 Venn 图表示两个集合的交集、并集(见图 1-1):
- (2)借助数轴表示数集的交集、并集(见图 1-2):

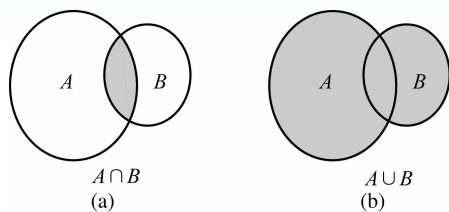


图 1-1

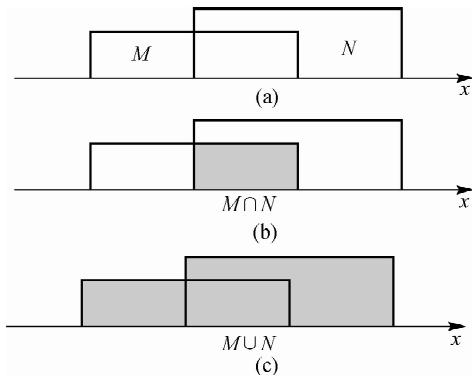


图 1-2

4. 全集

如果一个集合含有我们所研究问题中涉及的所有元素,那么就称这个集合为全集,通常用 U 表示.

注意:全集是一个相对的概念,在不同的情况下全集的概念也不同.

5. 补集

对于一个集合 A ,由全集 U 中不属于集合 A 的所有元素组成的集合称为集合 A 相对于全集 U 的补集,简称为集合 A 的补集,记作 $\complement_U A$,即 $\complement_U A = \{x | x \in U \text{ 且 } x \notin A\}$.

性质:

- (1) $\complement_U(\complement_U A) = A$.
- (2) $\complement_U \emptyset = U$, $\complement_U U = \emptyset$.
- (3) $A \cup (\complement_U A) = U$.
- (4) $A \cap (\complement_U A) = \emptyset$.

6. 常见的集合表示

- (1) 方程的解集: $\{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$ 或 $\{1, 2\}$, 一般用列举法表示.
- (2) 方程组的解集: $\{(3, 1)\}$ 或 $\{(x, y) | \begin{cases} x - 2y = 1, \\ x + 3y = 6 \end{cases}\} = \{(x, y) | \begin{cases} x = 3, \\ y = 1 \end{cases}\}$, 一般用后者表示.
- (3) 不等式的解集: $\{x | 3 \leq x < 5\}$ 或 $[3, 5)$, 一般用区间表示.
- (4) 点集: $\{(x, y) | y = 2x + 1\}$.
- (5) 具有某种性质的点集: $\{M | |PM| = a\}$ (P 为定点).
- (6) 三角函数中角的集合表示: $M = \{\alpha | 2k\pi < \alpha < 2k\pi + \pi, k \in \mathbf{Z}\}$.

典例解析

例 1 下列每组对象:

- (1) 我国著名的数学家;

变式训练 3

下列说法正确的有()个.

①空集没有子集;②任何集合至少有两个子集;③空集是任何集合的真子集;④若 $\emptyset \subseteq A$,则 $A \neq \emptyset$.

A. 1
C. 3

B. 2
D. 4

例 4 已知集合 $A = \{x | x^2 - x - 2 = 0\}$, $B = \{x | x^2 - 4x + p = 0\}$, 若 $B \subseteq A$, 求实数 p 的取值范围.

【解析】 由题意得 $A = \{-1, 2\}$, 因为 $B \subseteq A$, 所以 $B = \emptyset$ 或 $B = \{-1\}$ 或 $B = \{2\}$ 或 $B = \{-1, 2\}$. 又因为 $B = \{x | x^2 - 4x + p = 0\}$, 所以 $B = \{-1, 2\}$ 不成立.

当 $B = \emptyset$ 时, $\Delta = (-4)^2 - 4p = 16 - 4p < 0$, 解得 $p > 4$;

当 $B = \{-1\}$ 时, $\begin{cases} \Delta = 16 - 4p = 0, \\ (-1)^2 - 4 \times (-1) + p = 0, \end{cases}$ 无解;

当 $B = \{2\}$ 时, $\begin{cases} \Delta = 16 - 4p = 0, \\ 2^2 - 4 \times 2 + p = 0, \end{cases}$ 解得 $p = 4$.

综上, 实数 p 的取值范围是 $p \in [4, +\infty)$.

【技巧点拨】 两个集合包含或相等关系的问题, 通过建立方程(组), 然后解出未知数, 最后利用集合元素的特征进行检验即可.

变式训练 4

已知集合 $A = \{1, 1+m, 1+2m\}$, $B = \{1, n, n^2\}$, 其中 $m, n \in \mathbf{R}$, 若 $A = B$, 求 m, n 的值.

例 5 已知集合 $A = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 3, x \in \mathbf{Z}, y \in \mathbf{Z}\}$, 则 A 中元素的个数为().

A. 9

B. 8

C. 5

D. 4

【解析】 由 $x^2 + y^2 \leq 3$, 知 $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$, $-\sqrt{3} \leq y \leq \sqrt{3}$. 又 $x \in \mathbf{Z}, y \in \mathbf{Z}$, 所以 $x \in \{-1, 0, 1\}, y \in \{-1, 0, 1\}$. 所以 A 中元素的个数为 9.

【技巧点拨】 对于求解集合中元素个数的题目, 首先求出集合, 然后根据集合中元素的互异性求出集合中元素的个数, 或利用数形结合的方法求出集合中元素的个数.

变式训练 5

已知集合 $A = \{1, 2, 4\}$, 集合 $B = \{x | x = a + b, a \in A, b \in A\}$, 则集合 B 中元素的个数为 _____.

例 6 设全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x | 0 \leq x < 2\}$, 集合 $B = \{x | x^2 - 2x - 3 < 0\}$, 求 $A \cap B, A \cup B, \complement_U A \cap B$.

【解析】 $B = \{x | x^2 - 2x - 3 < 0\} = \{x | -1 < x < 3\}$, $\complement_U A = \{x | x < 0 \text{ 或 } x \geq 2\}$,
所以 $A \cap B = \{x | 0 \leq x < 2\}$, $A \cup B = \{x | -1 < x < 3\}$, $\complement_U A \cap B = \{x | -1 < x < 0 \text{ 或 } 2 \leq x < 3\}$.

【技巧点拨】 考查对集合运算的理解及性质的运用.

变式训练 6

设全集 $U = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, 集合 $A = \{0, 1, 2, 3\}$, 集合 $B = \{2, 3, 4\}$, 求 $A \cap B, A \cup B, \complement_U A \cup \complement_U B$.

例 7 已知集合 $M = \{x | a \leq x \leq a + 3\}$, $N = \{x | x < -1 \text{ 或 } x > 5\}$, 若 $M \cap N = \emptyset$, 求实数 a 的取值范围.

【解析】 如图 1-3 所示, 要使 $M \cap N = \emptyset$, 必须满足 $\begin{cases} a + 3 \leq 5, \\ a \geq -1, \end{cases}$ 解得 $-1 \leq a \leq 2$, 所以实数 a 的取值范围为 $\{a | -1 \leq a \leq 2\}$.

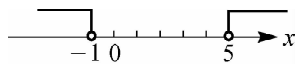


图 1-3

【技巧点拨】 解题时利用数轴表示集合, 便于寻求满足条件的实数 a . 特别需要注意的是“端点值”的问题, 是能取“=”还是不能取“=”.

变式训练 7

已知 $A = \{x | a \leq x \leq a + 3\}$, $B = \{x | x > 1 \text{ 或 } x < -6\}$.

- (1) 若 $A \cap B = \emptyset$, 求 a 的取值范围;
- (2) 若 $A \cup B = B$, 求 a 的取值范围.

例 8 已知 U 为全集, 集合 $M \subseteq U, N \subseteq U$, 且 $N \subseteq M$, 则().

- A. $(\complement_U M) \supseteq (\complement_U N)$ B. $(\complement_U M) \supseteq N$
 C. $(\complement_U M) \subseteq (\complement_U N)$ D. $M \supseteq (\complement_U N)$

【解析】 根据各集合之间的关系作图(如图 1-4), 这样就很容易做出判断, 故选 C.

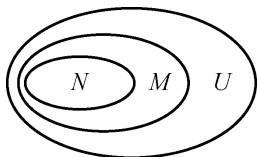


图 1-4

【技巧点拨】 (1) 考虑集合之间的关系, 用图形解答比较方便.

(2) 在数学中利用“数形结合”的思想, 往往能使问题简单化.

变式训练 8

已知 U 为全集, M, N 为两个非空集合, 且满足 $M \cap N = M$, 则下列正确的是().

- A. $M \subseteq N$ B. $N \subseteq M$
 C. $M = N$ D. $M \cap (\complement_U N) = \emptyset$

巩固练习

基础训练

一、选择题

- 下列命题所列对象中能组成集合的是().
 A. 好人 B. 非常小的数
 C. 有趣的书 D. 小于 5 的数
- 给出下面四个关系: ① $0 \in \mathbf{Q}$; ② $\sqrt{3} \notin \mathbf{Q}$; ③ $\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Q}$; ④ $\emptyset \subseteq \{0\}$, 其中正确的个数为().
 A. 4 B. 3 C. 2 D. 1
- 用列举法表示集合 $\{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$ 的结果是().
 A. (1, 2) B. 1, 2
 C. $\{1, 2\}$ D. 以上都不是
- 集合 $\{1, 2, 3, 4\}$ 所有子集的个数是().
 A. 8 B. 14 C. 15 D. 16
- 下列选项中表述正确的是().
 A. 由 1, 3, 5, 7, 5, 3 组成的集合中有 6 个元素
 B. 周长为 16 cm 的三角形组成的集合是有限集合
 C. 集合 $\{0\}$ 是空集
 D. 一年级(3)班的所有同学可以组成集合
- 用列举法表示“大于 2 且小于 9 的偶数的全体”构成的集合是().
 A. \emptyset B. $\{4, 6, 8\}$
 C. $\{3, 5, 7\}$ D. $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

二、填空题

1. 用适当的符号($\in, \notin, \subseteq, \supseteq, =$)填空.

3 _____ $\{2, 3\}$; π _____ \mathbf{Q} ; $\{1, 2, 3\}$ _____ \mathbf{Z} ;

\mathbf{N}^* _____ \mathbf{Z} ; $\{-3, 3\}$ _____ $\{x|x^2=9\}$;

2. 绝对值等于 1 的所有整数组成的集合是_____.

3. 已知集合 $P = \{x|2 < x < a, x \in \mathbf{N}\}$, 且集合 P 中恰有 3 个元素, 则整数 $a =$ _____.

4. 下列六个关系式: ① $\{a, b\} \subseteq \{b, a\}$; ② $\{a, b\} = \{b, a\}$; ③ $0 = \emptyset$; ④ $0 \in \{0\}$; ⑤ $\emptyset \in \{0\}$; ⑥ $\emptyset \subseteq \{0\}$. 其中正确的个数为_____.

三、解答题

1. 已知集合 $A = \{0, 1, 2\}$, 集合 $B = \{x|x = ab, a \in A, b \in A\}$.

(1) 用列举法写出集合 B ;

(2) 判断集合 B 的元素和集合 A 的关系.

2. 写出集合 $\{-3, -1, 1, 3\}$ 的所有子集, 并指出哪些是真子集.

3. 已知集合 $\{1, a, b\}$ 与 $\{-1, -b, 1\}$ 是同一集合, 求实数 a, b 的值.

4. 设全集 $U=\mathbf{R}$, 集合 $A=\{x|x^2-x-2=0\}$, $B=\{x||x|=y+1, y\in A\}$, 求 $\complement_U B$.

提升训练

1. 满足 $\{a,b\}\subsetneq A\subseteq\{a,b,c,d,e\}$ 的集合 A 的个数是().

A. 9

B. 8

C. 7

D. 6

2. 已知集合 $A=\{x|ax^2+2x+1=0, x\in\mathbf{R}\}$.

(1) 若 A 中只有一个元素, 求 a 的值;

(2) 若 A 中恰有两个元素, 求 a 的取值范围;

(3) 若 A 中至多只有一个元素, 求 a 的取值范围.

3. 已知集合 $A=\{x|x^2-3x+2=0\}$, $B=\{x|ax+2=0\}$, 且 $B\subseteq A$, 求实数 a 的值组成的集合.