Contents

目录

预备章

基 础 知 识

第一节 数 与 式

备考要点

实数	理解实数的分类；
	掌握数轴、相反数、绝对值、倒数、平方根的概念；
	会进行有关计算，能比较有理数的大小.
代数式	理解代数式的分类；
	掌握多项式的乘法公式；
	掌握分解因式的方法，并能选择恰当的方法分解因式.

命题分析

实数、代数式是数学知识中的基础，在每年的考试中都会涉及，是考试的热点之一，考点多为绝对值、算术平方根、代数式的表示及计算，考查形式多为选择题和填空题.

母题探究

1.（2022·云南高职招生）设 $a<b<0$，则 $\sqrt{a^2}+\sqrt{(a-b)^2}+\sqrt{(a+b)^2}=$（　　）.

A. $-3a$　　　　B. $3a$

C. $-2a$　　　　D. $2a$

【参考答案】A

【解题分析】$\because a<b<0$，$\therefore a-b<0$，$a+b<0$，$\therefore \sqrt{a^2}+\sqrt{(a-b)^2}+\sqrt{(a+b)^2}=-a-a+b-a-b=-3a$. 故选 A.

2.（2022 • 云南高职招生）某商品的价格为 p，从 p 降价到$\frac{p}{2}$，降价的百分率记为 m，再从$\frac{p}{2}$提价到 p，提价的百分率记为 n，则$\frac{m}{n}=$（　　）.

A. $\frac{1}{3}$　　　　B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{2}{3}$　　　　D. 2

【参考答案】B

【解题分析】由 p 降价到$\frac{p}{2}$，则降价的百分率 $m=\frac{p-\frac{p}{2}}{p}\times 100\%=50\%$，由$\frac{p}{2}$提价到 p，则提价的百分率 $n=\frac{p-\frac{p}{2}}{\frac{p}{2}}\times 100\%=100\%$，所以$\frac{m}{n}=\frac{1}{2}$. 故选 B.

3.（2021 • 云南高职招生）若 $|2x-1|=1-2x$，则 x 的取值范围是（　　）.

A. $x\leqslant\frac{1}{2}$　　　　B. $x\geqslant\frac{1}{2}$

C. $x\geqslant 0$　　　　D. $x\leqslant 0$

【参考答案】A

【解题分析】由绝对值的性质得 $1-2x\geqslant 0$，解得 $x\leqslant\frac{1}{2}$. 故选 A.

4.（2020 • 云南高职招生）若实数 a，b 在数轴上的位置如图 Y-1 所示，则化简 $|a-b|-\sqrt{a^2}=$（　　）.

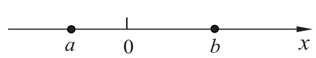

图 Y-1

A. $-b$　　　　B. $2a-b$

C. b　　　　D. $2a+b$

【参考答案】C

【解题分析】由题图知 $a<0$，$b>0$，所以 $a-b<0$，所以 $|a-b|-\sqrt{a^2}=-(a-b)-(-a)=-a+b+a=b$. 故选 C.

知识精讲

知识点一 实数

1. 实数的分类

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\left.\begin{array}{l}\text{正整数}\\\text{零}\end{array}\right\}\text{自然数}\\\text{负整数}\end{cases}\\\text{分数}\end{cases}\\\text{无理数}\end{cases}$$

(1)素数(质数):在大于 1 的自然数中,除了 1 和该数自身外,无法被其他自然数整除的数称为素数(质数).

(2)数轴的三要素:原点、正方向和单位长度(原点左边的点代表负数,原点右边的点代表正数,原点代表 0).

(3)实数与数轴的关系:实数表示的点都可以在数轴上表示,数轴上的每个点都对应一个实数.

(4)有理数的表现形式:整数、分数(有限小数、无限循环小数).

(5)无理数的表现形式:无限不循环小数,如 π;e;$\sqrt{3}$;$\log_3 2$ 等.

2. 绝对值

绝对值是数轴上一个点到原点的距离,用 $|a|$ 表示,$|a|\geqslant 0$.

$$|a|=\begin{cases}a, a>0,\\0, a=0,\\-a, a<0.\end{cases}$$

3. 相反数

只有符号不同的两个数,称它们互为相反数. 若 a,b 互为相反数,则有 $a+b=0$.

4. 倒数

一个数与另外一个数相乘,积为 1,则称它们互为倒数. 若 a,b 互为倒数,则有 $ab=1$.

典型例题

例 1 已知 a 与 4 互为相反数,则 a 的倒数是(　　).

A. 4　　B. -4

C. $\frac{1}{4}$　　D. $-\frac{1}{4}$

【参考答案】D

【解题分析】$\because a$ 与 4 互为相反数,$\therefore a=-4$,$\therefore a$ 的倒数是 $-\frac{1}{4}$. 故选 D.

【解题技巧】本题考查了相反数、倒数的含义,掌握相反数、倒数的含义是解本题的关键.

例 2 如图 Y-2，在数轴上，点 A，B 分别表示数 a，b，且 $a+b=0$. 若 $AB=4$，则点 A 表示的数为（　　）.

图 Y-2

A. -4　　B. -2

C. 2　　D. 4

【参考答案】B

【解题分析】∵在数轴上，点 A，B 分别表示数 a，b，且 $a+b=0$，∴$a=-b$，$a<0$，$b>0$. ∵$AB=4$，∴$a=-2$，$b=2$，∴点 A 表示的数为 -2，故选 B.

例 3 若 a，b 互为相反数，m，n 互为倒数，k 的平方等于 4，则 $100a+99b+mnb+k^2$ 的值为（　　）.

A. -4　　B. 4

C. -96　　D. 104

【参考答案】B

【解题分析】∵a，b 互为相反数，∴$a+b=0$. ∵m，n 互为倒数，∴$mn=1$. 又∵k 的平方等于 4，∴原式 $=100a+99b+b+4=100a+100b+4=100(a+b)+4=0+4=4$. 故选 B.

知识点二　代数式

1. 代数式的分类

$$\text{代数式}\begin{cases}\text{有理式}\begin{cases}\text{整式}\begin{cases}\text{单项式}\\\text{多项式}\end{cases}\\\text{分式}\end{cases}\\\text{无理式}\end{cases}$$

(1)单项式的表现形式：单独一个数、字母或数与字母的乘积.

(2)多项式的表现形式：单项式±单项式.

(3)分式的表现形式：分母中含有字母，且分母不等于 0；特别地，分子等于 0 时，分式的值为 0.

(4)无理式的表现形式：被开方数含有字母的根式. $\sqrt{a}$叫二次根式($a\geqslant0$)，$\sqrt[3]{a}$叫三次根式.

(5)同类根式：被开方数相同，根指数也相同的最简根式.

2. 分式

(1)分式的性质.

$$\frac{A}{B}=\frac{nA}{nB}(n\neq0)\text{或}\frac{nA}{nB}=\frac{A}{B}(n\neq0).$$

(2)分式的符号法则.

$$\frac{-A}{-B}=\frac{A}{B},\frac{-A}{B}=\frac{A}{-B}=-\frac{A}{B}.$$

(3)分式的运算.

$$\text{加减法：}\begin{cases}\text{同分母}\quad\dfrac{A}{B}\pm\dfrac{C}{B}=\dfrac{A\pm C}{B};\\\text{异分母}\quad\dfrac{A}{B}\pm\dfrac{C}{D}=\dfrac{A\cdot D\pm B\cdot C}{B\cdot D}.\end{cases}$$

$$\text{乘法：}\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{A\cdot C}{B\cdot D}.$$

$$除法:\frac{A}{B}\div\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\cdot\frac{D}{C}=\frac{A\cdot D}{B\cdot C}(C\neq0).$$

$$乘方:\left(\frac{A}{B}\right)^n=\frac{A^n}{B^n}.$$

3. 二次根式的运算

(1)加减法:合并同类二次根式.

(2)乘法:$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ $(a\geqslant0,b\geqslant0)$.

(3)除法:$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$ $(a\geqslant0,b>0)$或$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{ab}}{b}(a\geqslant0,b>0)$.

4. 整式的运算

(1)加减法:实质为合并同类项，即系数相加减,字母和字母的指数不变.

(2)乘法:①单项式×单项式:把它们的系数相乘,同底数幂分别相乘;

②单项式×多项式:转化为单项式×单项式,例如 $a(b+c)=ab+ac$;

③多项式×多项式:先转化为单项式×多项式,再转化为单项式×单项式,例如$(a+b)(c+d)=a(c+d)+b(c+d)=ac+ad+bc+bd$.

(3)除法:分子、分母分别进行因式分解,再化简(约分).

运算法则:有括号去括号,有乘方先算乘方,然后再算乘除,最后算加减(合并同类项).

同类项:所含字母相同,相同字母的指数也相同的单项式.

5. 乘法公式

(1)平方差公式:$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

(2)完全平方公式:$(a\pm b)^2=a^2\pm2ab+b^2$.

(3)立方公式:$(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3$.

(4)$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$.

6. 因式分解

(1)因式分解:把一个多项式在一定范围内化为几个整式的积的形式.

(2)因式分解的常用方法有以下四种.

①提公因式法:适用于多项式的各项都有公因式;

②公式法:适用于满足乘法公式的多项式的因式分解;

③十字相乘法:适用于形如 $x^2+(p+q)x+pq$ 的形式;

④分组分解法:一般适用于有 3 项以上的多项式.

对于形如 $ax^2+bx+c(a\neq0,b^2-4ac\geqslant0)$的二次三项式,也可以先求出方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根 x_1,x_2,再写成 $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$的形式.

典型例题

例 4 $\sqrt{9}$的平方根是(　　).

A. 3　　B. ±3

C. $\sqrt{3}$　　D. $\pm\sqrt{3}$

【参考答案】D

【解题分析】$\because\sqrt{9}=3$,$\therefore\sqrt{9}$ 的平方根是$\pm\sqrt{3}$. 故选 D.

例 5 分解因式$(a+b)^2-b^2$ 的结果是________.

【参考答案】$a(a+2b)$

【解题分析】原式$=(a+b+b)(a+b-b)=a(a+2b)$.

例 6 式子$\dfrac{1}{x-2}$在实数范围内有意义,则 x 的取值范围是(　　).

A. $x>2$　　　　B. $x\geqslant 2$

C. $x\neq 2$　　　　D. $x\neq -2$

【参考答案】C

【解题分析】由题意得,$x-2\neq 0$,解得 $x\neq 2$. 故选 C.

例 7 计算 $\sqrt{27}+\sqrt{\dfrac{1}{3}}$ 的结果是________.

【参考答案】$\dfrac{10\sqrt{3}}{3}$

【解题分析】原式$=3\sqrt{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{10\sqrt{3}}{3}$.

例 8 计算:$\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{3x-1}{x^2-1}$.

【解】原式$=\dfrac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)}-\dfrac{3x-1}{(x-1)(x+1)}$

$=\dfrac{x^2+x-3x+1}{(x-1)(x+1)}$

$=\dfrac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)}$

$=\dfrac{x-1}{x+1}$.

巩固训练

一、选择题

1. -1^4 的相反数是(　　).

A. 1　　　　B. -1

C. 4　　　　D. -4

2. 2 023 的倒数是(　　).

A. 2 023　　　　B. $-2\ 023$

C. $\dfrac{1}{2\ 023}$　　　　D. $-\dfrac{1}{2\ 023}$

3. 实数 a,b 在数轴上的位置如图 Y-3 所示,则 $a+b$ 是(　　).

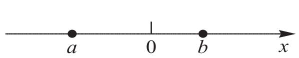

图 Y-3

A. 正数　　　　B. 零

C. 负数　　　　D. 都有可能

4. $|x+y-3|+(m-n+1)^2=0$,则 $n-m-2x-2y$ 的值为(　　).

A. -7　　B. 7

C. -5　　D. 5

5. $\sqrt{\frac{4}{9}}$的值等于(　　).

A. $\frac{2}{3}$　　B. $-\frac{2}{3}$

C. $\pm\frac{2}{3}$　　D. $\frac{16}{81}$

6. 已知 $a=4$,$|b|=6$,$a<b$,则 $a-b=$(　　).

A. -2　　B. 10

C. 2　　D. -10

7. 已知 x,y 互为相反数且均不为 0,a,b 互为倒数,$|m|=2$,则代数式$\frac{x+y}{m}-2\,022ab+m^2$ 的值为(　　).

A. $-2\,018$　　B. $-2\,019$

C. $-2\,021$　　D. $-2\,022$

8. 把式子 $a\sqrt{-\frac{1}{a}}$根号外的字母移入根号内,则原式等于(　　).

A. $\sqrt{-a}$　　B. $\sqrt{a}$

C. $-\sqrt{-a}$　　D. $-\sqrt{a}$

9. 若 $a>1$,化简$|1-a|+\sqrt{(1+a)^2}$的结果为(　　).

A. $2a$　　B. 2

C. $-2a$　　D. -2

10. 下列代数式的值总不为 0 的是(　　).

A. $x+2$　　B. x^2-2

C. $\frac{1}{x+2}$　　D. $(x+2)^2$

二、填空题

1. 写出一个有理数,使这个数的绝对值等于它的倒数:________.

2. 16 的平方根是________;16 的立方根是________.

3. 计算:$\sqrt[3]{-8}+|-3|=$________.

4. 若$|m-3|$与$(n-4)^2$ 互为相反数,则$(-m)^n$ 的值为________.

5. 代数式 $4+5y$,7,m,$\sqrt[3]{mn}$,$\frac{1}{y^2}+\frac{1}{x^2}$,$-3a^2b$,$x^2-xy$ 中,

(1)属于整式的有:____________________________;

(2)属于单项式的有:____________________________;

(3)属于多项式的有:____________________________.

6. 分解因式$(a-b)(a+4b)-3ab$ 的结果是____________________________.

7. 若 a,b 为实数,且 $b=\frac{\sqrt{a^2-1}+\sqrt{1-a^2}}{a+7}$,则 $a+b=$________.

8. 已知分式$\frac{x^2-1}{x^2-2x-3}$.

(1)当 x ____________________________时,分式无意义;

(2)当 x ____________________________时,分式值为 0.

三、解答题

1. 已知 a,b 为实数，且满足 $(a-2)^2+\sqrt{a-b+1}=0$，求 $a+b$ 的值.

2. 先化简，再求值：$\left(\frac{a}{a+2}-\frac{2a+3}{a^2-4}+\frac{2}{a-2}\right)\div\frac{a-1}{a-2}$，其中 $a=\sqrt{3}-2$.

3. 已知 $a=2+\sqrt{3}$，$b=2-\sqrt{3}$，试求下列各式的值.

(1) a^2-b^2；

(2) $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+4$.

4.按要求解答下列各题：

(1)计算：$(a+b)(a-b)+(4ab^3-8a^2b^2)\div 4ab$；

(2)因式分解：$a^2(m-n)+b^2(n-m)$.

5.按要求解答下列各题：

(1)计算：$\sqrt{12}\times(\sqrt{75}+3\sqrt{\frac{1}{3}}-\sqrt{48})$；

(2)已知 $a=2+\sqrt{5}$，$b=2-\sqrt{5}$，求代数式 a^2b+ab^2 的值；

(3)先化简，再求值：$\left(x-1-\frac{x^2+4x+4}{x+1}\right)\div\frac{3}{x+1}$，其中 x 是方程 $x^2+x=0$ 的解.

第二节　方程与方程组

备考要点

一元一次方程及二元一次方程(组)	理解方程(组)的解、解方程(组)的概念;
	掌握一元一次方程及二元一次方程(组)的解法;
	掌握多元一次方程组的解题思路.
一元二次方程	理解一元二次方程的概念,记住一元二次方程根的判别式、根与系数的关系,并能依题意求出待定系数;
	掌握一元二次方程的解法,记住求根公式.
分式方程和根式方程	掌握简单的分式方程和根式方程的解法.

命题分析

方程和方程组是数学知识中的基础,在每年的考试中都会涉及,是考试的热点之一,考点多为一元一次方程、二元一次方程(组)、一元二次方程、分式方程的计算,考查形式多为选择题.

母题探究

1.(2021·云南高职招生)分式方程$\frac{x-3}{x+1}=\frac{x-4}{2x+1}$的解的情况是(　　).

A. 有两个实数根　　B. 无实数根

C. 有一个整数根　　D. 有一个分数根

【参考答案】C

【解题分析】分式的分母不能为0,即$x\neq-1,x\neq-\frac{1}{2}$.分式方程$\frac{x-3}{x+1}=\frac{x-4}{2x+1}$可以转化为$\frac{x-3}{x+1}-\frac{x-4}{2x+1}=0$,即$\frac{x^2-2x+1}{(x+1)(2x+1)}=0$,等价于$x^2-2x+1=0\left(x\neq-1,x\neq-\frac{1}{2}\right)$,即$(x-1)^2=0\left(x\neq-1,x\neq-\frac{1}{2}\right)$,$\therefore x=1$,∴原分式方程有一个整数根.故选C.

2.(2021·云南高职招生)二元一次方程组$\begin{cases}x+2y=2,\\2x+4y=3\end{cases}$的解的情况是(　　).

A. 有唯一的解　　B. 无解

C. 有两个解　　D. 有无穷多个解

【参考答案】B

【解题分析】原方程组第一个等式乘 2 得 $2x+4y=4$ ①,①式减原方程组第二个式子得 $0=1$,不成立,所以原方程组无解.故选 B.

3.(2020·云南高职招生)已知两数的和为 6,这两个数的差的绝对值为 8,那么以这两个数为根的一元二次方程是(　　).

A. $x^2-6x+8=0$　　B. $x^2-6x-7=0$

C. $x^2+6x-8=0$　　D. $x^2+6x+7=0$

【参考答案】B

【解题分析】设这两个数分别为 x_1 和 x_2,则 $x_1+x_2=6$,$|x_1-x_2|=8$,又因为 $(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$,所以 $x_1x_2=-7$,根据一元二次方程根与系数的关系有 $x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0$,则方程为 $x^2-6x-7=0$.故选 B.

知识精讲

知识点一　一元一次方程与二元一次方程(组)

1. 基本概念

方程:含有未知数的等式叫方程.

方程的解:使方程左右两边相等的未知数的值叫作方程的解.

方程组的解:使方程组中每个方程左右两边都相等的未知数的值叫作方程组的解.

解方程(组):求方程(组)的解的过程叫作解方程(组).

2. 解一元一次方程的一般步骤

第一步:去分母,在方程的两边都乘各分母的最小公倍数;

第二步:去括号,依据去括号法则,一般先去小括号,再去中括号,最后去大括号;

第三步:移项,将含未知数的项移到一边,常数项移到另一边;

第四步:合并同类项,化为形如 $ax=b(a\neq0)$ 的形式;

第五步:两边同除以未知数的系数 a,将未知数的系数化为 1,得解 $x=\dfrac{b}{a}$.

注意:解一元一次方程的 5 个步骤要根据方程的特点灵活运用,有些可能用不到,有些可能会重复使用.

3. 解二元一次方程的一般步骤

第一步:变形为 $y=kx+b$ 的形式;

第二步:取值,取满足条件的 x,算出对应的 y 值;

第三步:得出解 $\begin{cases}x=\cdots\\y=\cdots\end{cases}$.

注意:一般情况下,二元一次方程有无数个解.

4. 解二元一次方程组的一般方法

(1)加减消元法.

①利用等式的性质,将原方程组中某个未知数的系数化成相等或相反的形式;

②将变形后的两个方程相加或相减消去一个未知数,得到一个一元一次方程;

③解这个一元一次方程,求出未知数的值;

④将求得的未知数的值代入原方程组中的任何一个方程中,求出另一个未知数的值;

⑤用“{”联立两个未知数的值就是方程组的解$\begin{cases}x=\cdots\\y=\cdots\end{cases}$.

(2)代入消元法.

①选取一个系数较简单的二元一次方程变形,用含有一个未知数的代数式表示出另一个未知数;

②将变形后的方程代入另一个方程中,消去一个未知数,得到一个一元一次方程(达到消元的目的);

③解这个一元一次方程,求出未知数的值;

④将求出的未知数的值代入任一式中(一般代入变形式),求出另一个未知数的值;

⑤用“{”联立两个未知数的值就是方程组的解$\begin{cases}x=\cdots\\y=\cdots\end{cases}$.

5.解多元一次方程组的思路

思路:将多元方程组通过加减或代入消元转化为二元方程组,将二元方程组转化为一元方程,即可求解.

典型例题

例 1 已知关于 x 的方程 $x-\frac{2-ax}{6}=\frac{x}{3}-2$ 有非负整数解,则整数 a 的所有可能的取值的和为( ).

A. -23　　B. 23

C. -34　　D. 34

【参考答案】C

【解题分析】$x-\frac{2-ax}{6}=\frac{x}{3}-2$,去分母,得 $6x-(2-ax)=2x-12$,去括号,得 $6x-2+ax=2x-12$,移项、合并同类项,得 $(4+a)x=-10$,将系数化为 1,得 $x=-\frac{10}{4+a}$,$\because x=-\frac{10}{4+a}$是非负整数解,$\therefore$当 $a=-5$ 或 $-6,-9,-14$ 时,x 的解都是非负整数,则 $-5+(-6)+(-9)+(-14)=-34$. 故选 C.

例 2 若二元一次方程组$\begin{cases}5x-y=5,\\y=\frac{1}{5}x\end{cases}$的解为 $x=a,y=b$,则 $a+b=$( ).

A. $\frac{5}{4}$　　B. $\frac{75}{13}$

C. $\frac{31}{25}$　　D. $\frac{29}{25}$

【参考答案】A

【解题分析】把 $y=\frac{1}{5}x$ 代入 $5x-y=5$,得 $5x-\frac{1}{5}x=5$,得 $x=\frac{25}{24}$,则 $y=\frac{5}{24}$,则 $a+b=\frac{30}{24}=\frac{5}{4}$. 故选 A.

知识点二　一元二次方程、分式方程与根式方程

1.基本概念

一元二次方程:只含有一个未知数,并且未知数的最高次数是 2 的整式方程.

分式方程:分母中含有未知数的方程.

根式方程:被开方数含有未知数的方程.

2. 解一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的一般方法及步骤

(1)方法一:求根公式法.

步骤:①找出 a,b,c 的表达式;

②求 $\Delta=b^2-4ac$;

③若 $\Delta>0$,方程有两个不相等的实数根,$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$,$x_2=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$;

若 $\Delta=0$,方程有两个相等的实数根,$x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$;

若 $\Delta<0$,方程没有实数根.

(2)方法二:因式分解法.

步骤:①化为 $(x-p)(x-q)=0$ 的形式;

②令 $x-p=0$ 或 $x-q=0$;

③求出方程的解 $x_1=p$,$x_2=q$.

3. 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 根与系数的关系(也称韦达定理)

$x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$,$x_1x_2=\dfrac{c}{a}$ (x_1,x_2 为方程的两个根).

特别地:当二次项系数 $a=1$ 时,一元二次方程可化为 $x^2+px+q=0$ 的形式,则 $x_1+x_2=-p$,$x_1x_2=q$,以 x_1,x_2 为根的一元二次方程(二次项系数 $a=1$)为 $x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0$.

4. 解分式方程的思路

去分母,将分式方程转化为整式方程进行求解.

5. 解根式方程的思路

去根号,将根式方程转化为整式方程进行求解.

特别地:由于分式、根式方程会产生增根,所以解分式方程和根式方程要验根.

典型例题

例 3 已知 a,b 是实数,且满足 $\sqrt{a-\dfrac{3}{2}}+|b+2|=0$,求关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+\dfrac{1}{2}=0$ 的根.

【解】∵a,b 是实数,且满足 $\sqrt{a-\dfrac{3}{2}}+|b+2|=0$,

∴$a=\dfrac{3}{2}$,$b=-2$,

∴关于 x 的一元二次方程为 $\dfrac{3}{2}x^2-2x+\dfrac{1}{2}=0$,

整理得 $3x^2-4x+1=0$,

$(3x-1)(x-1)=0$,

解得 $x_1=\dfrac{1}{3}$,$x_2=1$.

【解题技巧】本题综合考查了解一元二次方程、非负数的性质,根据方程的特点灵活选用合适的解一元二次方程的方法是解题的关键.

例 4 解关于 x 的方程 $\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{k}{x^2-1}=\dfrac{x}{x+1}$ 不会产生增根,则 k 应满足的条件是(　　).

A. $k=2$　　B. $k=1$

C. $k\neq2$ 且 $k\neq-2$　　D. 无法确定

【参考答案】C

【解题分析】去分母得，$x(x+1)-k=x(x-1)$，解得 $x=\frac{k}{2}$，∵方程$\frac{x}{x-1}-\frac{k}{x^2-1}=\frac{x}{x+1}$不会产生增根，∴$x\neq\pm1$，∴$\frac{k}{2}\neq\pm1$，即 $k\neq\pm2$. 故选 C.

巩固训练

一、选择题

1. 一元二次方程 $x^2-9x=0$ 的解为(　　).

A. $x=0$　　B. $x=3$

C. $x=9$　　D. $x_1=0,x_2=9$

2. 若 $2a^{3x}b^{y+5}$ 与 $5a^{2-4y}b^{2x}$ 是同类项，则(　　).

A. $\begin{cases}x=1,\\y=2\end{cases}$　　B. $\begin{cases}x=2,\\y=-1\end{cases}$

C. $\begin{cases}x=0,\\y=2\end{cases}$　　D. $\begin{cases}x=3,\\y=1\end{cases}$

3. 方程组$\begin{cases}3x+5y=8,\\4x+ky=14\end{cases}$的解也是方程 $3x+y=4$ 的解，则 k 的值是(　　).

A. 6　　B. 10

C. 9　　D. $\frac{1}{10}$

4. 某农场挖一条 480 米的渠道，开工后，每天比原计划多挖 20 米，结果提前 4 天完成任务，若设原计划每天挖 x 米，则下列方程正确的是(　　).

A. $\frac{480}{x}-\frac{480}{x+20}=4$　　B. $\frac{480}{x}-\frac{480}{x+20}=20$

C. $\frac{480}{x-20}-\frac{480}{x}=4$　　D. $\frac{480}{x-4}-\frac{480}{x}=20$

5. 已知 m,n 是一元二次方程 $x^2+2x-5=0$ 的两个根，则 $m^2+mn+2m$ 的值为(　　).

A. 0　　B. -10

C. 3　　D. 10

6. 2022 年北京冬奥会吉祥物“冰墩墩”寓意敦厚、健康、活泼、可爱，象征着冬奥会运动员强壮的身体、坚韧的意志和鼓舞人心的奥林匹克精神，据统计，某商店 2021 年第四季度的“冰墩墩”总销售量为 9.93 万件，其中 10 月的销量为 3 万件，设 11，12 月销量的平均增长率为 x，则可列方程为(　　).

A. $3(1+x)^2=9.93$　　B. $3+3(1+x)^2=9.93$

C. $3+3x+3(1+x)^2=9.93$　　D. $3+3(1+x)+3(1+x)^2=9.93$

二、填空题

1. 若关于 x 的方程 $(k-2)x^{|k-1|}+5k=0$ 是一元一次方程，则 $k=$________.

2. 已知$\begin{cases}x=1,\\y=-1\end{cases}$是关于 x,y 的二元一次方程组$\begin{cases}ax+by=-1,\\ax-by=5\end{cases}$的解，则 $a^b=$________.

3. 若关于 x 的分式方程$\frac{3-2x}{x-3}+\frac{2+ax}{3-x}=-1$ 无解，则实数 $a=$________.

4. 若关于 x 的一元二次方程 $x^2+2x-k+3=0$ 有两个不相等的实数根，则 k 的取值范围是________.

三、解答题

1. 已知关于 x,y 的方程组 $\begin{cases} x+2y=5m, \\ x-2y=9m \end{cases}$ 的解满足 $3x+2y=19$，求 m 的值.

2. 解方程：

(1) $3x+\frac{x-1}{2}=3-\frac{2x-1}{3}$；

(2) $\frac{0.3x-0.4}{0.2}+2=\frac{0.5x-0.2}{0.3}$.

3. 解分式方程：

(1) $\frac{x}{2x-3}+\frac{5}{3-2x}=4$；

(2) $\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x+1}=\frac{4}{x^2-1}$.

4.已知关于 x 的方程 $x^2+ax+a-2=0$.

(1)当该方程的一个根为 1 时,求 a 的值及该方程的另一根;

(2)求证:无论 a 取何实数,该方程都有两个不相等的实数根.

5.一个正方形的一边增加 3 cm,相邻一边减少 3 cm,所得长方形的面积与这个正方形的每边减去 1 cm 所得的正方形面积相等,求这个长方形的长和宽.

第一章

集合与简易逻辑

第一节　集合及其关系

备考要点

集合及其表示方法	理解集合、元素的概念，并能指出集合中的元素；
	理解集合中元素的 3 个特性：确定性、互异性、无序性；
	理解常用的几个数集；
	掌握集合的两种表示方法：列举法、描述法.
元素与集合的关系、集合与集合的关系	理解元素和集合的关系，并能用符号 $\in$，$\notin$ 正确表示元素与集合的关系；
	理解空集、子集、真子集、集合相等的概念，会正确使用符号 $\subseteq$，$\supseteq$，$\subsetneqq$，$\supsetneqq$，$=$.

命题分析

本节内容是集合相关知识的基础，在历年真题中考查较少，但也要引起学生的重视. 本节内容要求不高，难度不大. 主要从以下两个方面考查：集合及其表示方法，元素与集合的关系、集合与集合的关系.

母题探究

1. 已知集合 $A=\{1,2,4\}$，集合 $B=\{x|x=a+b,a\in A,b\in A\}$，则集合 B 中元素的个数为________.

【参考答案】6

【解题分析】由题意可知 $B=\{2,3,4,5,6,8\}$，元素的个数为 6.

2. 已知集合 $A=\{1,1+m,1+2m\}$，$B=\{1,n,n^2\}$，其中 $m,n\in\mathbf{R}$，若 $A=B$，求 m,n 的值.

【解】因为 $A=B$，所以 $\begin{cases}1+m=n,\\1+2m=n^2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}1+m=n^2,\\1+2m=n,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}m=0,\\n=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m=-\dfrac{3}{4},\\n=-\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

当 $m=0,n=1$ 时，集合元素不满足互异性，舍去.

故 $m=-\dfrac{3}{4}$，$n=-\dfrac{1}{2}$.

知识精讲

知识点一　集合的概念

1. 集合

将某些确定的对象看成一个整体就构成一个集合，简称为集，常用大写英文字母 $A,B,C,\cdots$ 表示.

2. 元素

组成集合的对象叫作这个集合的元素，常用小写英文字母 $a,b,c,\cdots$ 表示.

3. 元素与集合的关系及性质

如果 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于 A，记作 $a\in A$；如果 a 不是集合 A 的元素，就说 a 不属于 A，记作 $a\notin A$. 集合中的元素具有确定性、互异性、无序性的特征.

4. 集合的分类

(1)按元素个数分类.

①有限集：含有元素的个数有限的集合叫作有限集.

②无限集：含有元素的个数无限的集合叫作无限集.

③空集：不含任何元素的集合叫作空集，记作 $\varnothing$.

注意：$\varnothing$ 不是 $\{0\}$.

(2)按元素的特征分类：数集、点集等.

5. 常用的集合

常用的集合有正整数集($\mathbf{N}_+$ 或 $\mathbf{N}^*$)、自然数集($\mathbf{N}$)、整数集($\mathbf{Z}$)、有理数集($\mathbf{Q}$)、实数集($\mathbf{R}$).

(1)正整数集：所有正整数组成的集合叫作正整数集，记作 $\mathbf{N}_+$ 或 $\mathbf{N}^*$.

(2)自然数集：所有自然数组成的集合叫作自然数集，记作 $\mathbf{N}$.

(3)整数集：所有整数组成的集合叫作整数集，记作 $\mathbf{Z}$.

(4)有理数集：所有有理数组成的集合叫作有理数集，记作 **Q**.

(5)实数集：所有实数组成的集合叫作实数集，记作 **R**.

典型例题

例 1　在下列每组对象中：

(1)我国著名的数学家；

(2)超过 10 的所有自然数；

(3)某校 2022 年新入学的高个子学生；

(4)方程 $x-1=0$ 的实数解；

(5)在直角坐标平面内，第二象限的所有点.

其中能构成集合的是(　　).

A. (1)(2)(3)　　B. (2)(3)(4)

C. (2)(4)(5)　　D. (3)(4)(5)

【参考答案】C

【解题分析】(1)“我国著名的数学家”不是一个明确的标准，不能构成一个集合；(3)“高个子学生”这一标准也不确定，无法判定某人是高还是矮，也不能构成集合；(4)的对象是确定的；(2)(5)的对象虽然有无限个，但它是确定的. 因此选 C.

【解题技巧】判断某组对象能否构成集合，关键看对象是不是整体的和确定的. 标准一定要是明确的，不能模糊，否则无法判断.

例 2　已知集合 $A=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 3, x\in \mathbf{Z}, y\in \mathbf{Z}\}$，则 A 中元素的个数为(　　).

A. 9　　B. 8

C. 5　　D. 4

【参考答案】A

【解题分析】由 $x^2+y^2\leqslant 3$ 可知，$-\sqrt{3}\leqslant x\leqslant\sqrt{3}$，$-\sqrt{3}\leqslant y\leqslant\sqrt{3}$. 又因为 $x\in\mathbf{Z}$，$y\in\mathbf{Z}$，所以 $x\in\{-1,0,1\}$，$y\in\{-1,0,1\}$. 当 x 分别取 $-1,0,1$ 时，y 的值均可以取 $-1,0,1$，所以 A 中元素的个数为 9.

【解题技巧】对于求解集合中元素个数的题目，首先求出集合，然后根据集合中元素的互异性求出集合中元素的个数，或利用数形结合的方法求出集合中元素的个数.

知识点二　集合的表示法

1. 列举法

将集合的元素一一列出，用逗号分隔，再用花括号括为一个整体，这种表示集合的方法叫作列举法.

注意：用列举法表示集合时，要注意以下几点.

(1)元素之间用逗号“，”隔开.

(2)元素不能重复(满足集合中元素的互异性).

(3)元素不能遗漏.

(4)当集合中的元素较少时，用列举法比较简单；当集合中的元素较多或无限，但存在一定的规律时，在不发生误解的情况下，也可以用列举法表示.

2. 描述法

利用元素的特征性质来表示集合的方法称为描述法.

具体方法:在花括号中画一条竖线,竖线的左侧写上集合的代表元素 x,并标出元素的取值范围,竖线右侧写出元素所具有的特征性质.

注意:用描述法表示集合时,要注意以下几点.

(1)写清楚集合中元素的代表形式(一般用小写字母表示).

(2)写明集合中元素的特征或性质.

(3)用于描述元素特征的语句要力求简明、准确,不产生歧义;多层描述时,应当准确使用"且""或"等关联词.

(4)所有描述的内容都要写在大括号内.

(5)在不引起混淆的情况下,用描述法表示集合有时也可以省去竖线和竖线左边的部分.例如,正整数的集合可简记为{正整数},但是,集合$\{x|x>1\}$就不能省略竖线及其左边的"x".

典型例题

例 3 用列举法表示下列集合.

(1)$A=\{x|-2<x<5,x\in\mathbf{Z}\}$;

(2)$B=\{(x,y)|2x+y=5,x\in\mathbf{N},y\in\mathbf{N}\}$.

【解】(1)$A=\{-1,0,1,2,3,4\}$.

(2)$B=\{(0,5),(1,3),(2,1)\}$.

【解题技巧】掌握集合的两种表示方法.

知识点三 集合间的关系

1. 子集

一般地,对于两个集合 A,B,如果集合 A 中任何一个元素都是集合 B 的元素,那么,集合 A 就叫作集合 B 的子集,记作 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$,读作"A 包含于 B"或"B 包含 A".

当集合 A 不包含于集合 B 或集合 B 不包含集合 A 时,记作 $A\not\subseteq B$ 或 $B\not\supseteq A$.

性质:(1)任何一个集合是它本身的子集,即 $A\subseteq A$;(2)空集是任何集合的子集,即$\varnothing\subseteq A$;(3)对集合 A,B,C,若 $A\subseteq B$,$B\subseteq C$,则 $A\subseteq C$.

注意:不能把子集说成由原来集合中的部分元素组成的集合,因为 A 的子集包括它本身,而这个子集由 A 的全体元素组成;空集也是 A 的子集,但这个子集中不包括 A 中的任何元素.

2. 真子集

如果 A 是 B 的子集,并且 B 中至少有一个元素不属于 A,则 A 是 B 的真子集(A 包含于 B,但不等于 B),记作 $A\subsetneqq B$ 或 $B\supsetneqq A$.

性质:空集是任何非空集合的真子集;对于集合 A,B,C,若 $A\subsetneqq B$,$B\subsetneqq C$,则 $A\subsetneqq C$.

注意:元素与集合之间是属于关系,集合与集合之间是包含关系.

3. 集合的相等

一般地,如果两个集合的元素完全相同,我们就说这两个集合相等,集合 A 等于集合 B,记作 $A=B$(A,B 的所有元素均相同).

注意:(1)两个集合所含元素完全相同,即"集合 A 中的任何一个元素都是集合 B 的元素,同时集合 B 中的任何一个元素都是集合 A 的元素".

(2)要判断两个集合是否相等,对于元素较少的有限集,主要看它们的元素是否完全相同;若是无限集,则从"互为子集"入手进行判断.

典型例题

例 4　设集合 $A=\{0\}$，下列结论正确的是(　　).

A. $A=0$　　　　B. $A\subseteq\varnothing$

C. $0\in A$　　　　D. $\varnothing\in A$

【参考答案】C

【解题分析】本题考查了元素与集合、集合与集合之间的关系. 答案选 C.

【解题技巧】正确理解符号 $\in,\notin,\subseteq,\subsetneqq$ 的意义，是正确处理此类问题的关键.

例 5　已知集合 $A=\{x\mid x^2-x-2=0\}$，$B=\{x\mid x^2-4x+p=0\}$，若 $B\subseteq A$，求实数 p 的取值范围.

【解】由题意得 $A=\{-1,2\}$，

因为 $B\subseteq A$，

所以 $B=\varnothing$ 或 $B=\{-1\}$ 或 $B=\{2\}$ 或 $B=\{-1,2\}$.

又因为 $B=\{x\mid x^2-4x+p=0\}$，

所以 $B=\{-1,2\}$ 不成立.

当 $B=\varnothing$ 时，$\Delta=(-4)^2-4p=16-4p<0$，

解得 $p>4$；

当 $B=\{-1\}$ 时，$\begin{cases}\Delta=16-4p=0,\\(-1)^2-4\times(-1)+p=0,\end{cases}$ 无解；

当 $B=\{2\}$ 时，$\begin{cases}\Delta=16-4p=0,\\2^2-4\times 2+p=0,\end{cases}$ 解得 $p=4$.

综上，实数 p 的取值范围是 $[4,+\infty)$.

【解题技巧】两个集合包含或相等关系的问题，通过建立方程(组)，然后解出未知数，最后利用集合元素的特征进行检验即可.

巩固训练

一、选择题

1. 下列所列对象中能组成集合的是(　　).

A. 好人　　　　B. 非常小的数

C. 有趣的书　　　　D. 小于 5 的数

2. 给出下面四个关系：①$0\in\mathbf{Q}$；②$\sqrt{3}\notin\mathbf{Q}$；③$\mathbf{Z}\subseteq\mathbf{Q}$；④$\varnothing\subsetneqq\{0\}$，其中正确的个数为(　　).

A. 4　　　　B. 3

C. 2　　　　D. 1

3. 用列举法表示集合 $\{x\mid x^2-3x+2=0\}$ 的结果是(　　).

A. $(1,2)$　　　　B. $1,2$

C. $\{1,2\}$　　　　D. 以上都不是

4. 集合 $\{1,2,3,4\}$ 所有子集的个数是(　　).

A. 8　　　　B. 14

C. 15　　　　D. 16

5. 下列选项表述正确的是(　　).

A. 由 1,3,5,7,5,3 组成的集合中有 6 个元素

B. 周长为 16 cm 的三角形组成的集合是有限集

C. 集合$\{0\}$是空集

D. 一年级(3)班的所有同学可以组成集合

6. 用列举法表示“大于 2 且小于 9 的偶数的全体”构成的集合是(　　).

A. $\varnothing$　　B. $\{4,6,8\}$

C. $\{3,5,7\}$　　D. $\{3,4,5,6,7,8\}$

二、填空题

1. 用适当的符号($\in$,$\notin$,$\subseteq$,$\supseteq$,$=$)填空.

3 ________ $\{2,3\}$;　　π ________ $\mathbf{Q}$;

$\{1,2,3\}$________ $\mathbf{Z}$;　　$\mathbf{N}^*$ ________ $\mathbf{Z}$;

$\{-3,3\}$________ $\{x|x^2=9\}$.

2. 绝对值等于 1 的所有整数组成的集合是________.

3. 已知集合 $P=\{x|2<x<a,x\in\mathbf{N}\}$,且集合 P 中恰有 3 个元素,则整数 $a=$________.

4. 下列六个关系式:①$\{a,b\}\subseteq\{b,a\}$;②$\{a,b\}=\{b,a\}$;③$0=\varnothing$;④$0\in\{0\}$;⑤$\varnothing\in\{0\}$;⑥$\varnothing\subseteq\{0\}$. 其中正确的个数为________.

三、解答题

1. 已知集合 $A=\{0,1,2\}$,集合 $B=\{x|x=ab,a\in A,b\in A\}$.

(1)用列举法写出集合 B;

(2)判断集合 B 和集合 A 的关系.

2. 写出集合$\{-3,-1,1,3\}$的所有子集,并指出哪些是真子集.