第一章

集合与逻辑用语

思维导图

- 集合与逻辑用语
  - 集合的概念
    - 集合
    - 集合中元素的特性
      - 确定性
      - 互异性
      - 无序性
    - 元素与集合的关系
      - 属于
      - 不属于
    - 集合的分类
      - 按元素个数
      - 按元素特征
    - 常见集合的符号：$\mathbf{N},\mathbf{N}_{+},\mathbf{Z},\mathbf{Q},\mathbf{R}$
  - 集合的表示法
    - 列举法
    - 描述法
  - 集合间的关系
    - 子集
    - 相等
    - 真子集
  - 集合的运算
    - 交集
    - 并集
    - 补集
  - 命题
  - 量词
  - 充分必要条件
  - 逻辑联结词
    - 且
    - 或
    - 非

第一节 集合及其表示

知识清单

知识点一 集合的概念

1. 集合

一般地,由某些确定的对象组成的整体称为集合,简称为集,常用大写的英文字母 $A,B,C,\cdots$表示.

2. 元素

组成集合的每个对象称为这个集合的元素,常用小写的英文字母 $a,b,c,\cdots$表示.

3. 元素与集合的关系及性质

如果 a 是集合 A 的元素,就说 a 属于 A,记作 $a\in A$;如果 a 不是集合 A 的元素,就说 a 不属于 A,记作 $a\notin A$. 集合中的元素具有确定性、互异性、无序性的特性.

4. 集合的分类

(1)按元素个数分类:

①含有元素的个数有限的集合叫作有限集;

②含有元素的个数无限的集合叫作无限集;

③不含任何元素的集合叫作空集,记作$\varnothing$.

注:$\varnothing$不是$\{0\}$.

(2)按元素的特征分类:数集、点集等.

5. 常用的数集

(1)自然数集:全体非负整数组成的集合,记作 $\mathbf{N}$.

(2)正整数集:全体正整数组成的集合,记作 $\mathbf{N}_+$ 或 $\mathbf{N}^*$.

(3)整数集:全体整数组成的集合,记作 $\mathbf{Z}$.

(4)有理数集:全体有理数组成的集合,记作 $\mathbf{Q}$.

(5)实数集:全体实数组成的集合,记作 $\mathbf{R}$.

知识点二 集合的表示法

1. 列举法

把集合的元素一一列举出来,写在花括号内,这种表示集合的方法叫作列举法.

注:用列举法表示集合时,要注意以下几点:

(1)元素之间用逗号“,”隔开.

(2)元素不能重复(满足集合中元素的互异性).

(3)元素不能遗漏.

（4）当集合中的元素较少时，用列举法比较简单；当集合中的元素较多或无限，但存在一定的规律时，在不发生误解的情况下，也可以用列举法表示.

2. 描述法

用元素的特征性质来表示集合的方法称为描述法.

设 A 是一个集合，把 A 中所有具有共同特征 $P(x)$ 的元素 x 所组成的集合表示为 $\{x\in A|P(x)\}$. 例如，比 3 大的实数组成的集合为 $\{x\in\mathbf{R}|x>3\}$.

我们约定，如果集合的元素是实数，那么“$\in\mathbf{R}$”可略去不写. 例如，$\{x\in\mathbf{R}|x>3\}$ 可以简写为 $\{x|x>3\}$.

注：用描述法表示集合时，要注意以下几点：

（1）写清楚集合中元素的代表形式（一般用小写字母表示）.

（2）写明集合中元素的特征或性质.

（3）用于描述元素特征的语句要力求简明、准确，不产生歧义；多层描述时，应当准确使用“且”“或”等关联词.

（4）所有描述的内容都要写在大括号内.

（5）在不引起混淆的情况下，用性质描述法表示集合有时也可以省去竖线和竖线左边的部分. 例如，正整数的集合可简记为{正整数}，但是，集合 $\{x|x>1\}$ 就不能省略竖线及其左边的“x”.

典例剖析

题型一 集合的概念

例 1　在下列每组对象中，能组成集合的是（　　）.

（1）我国著名的数学家；

（2）超过 10 的所有自然数；

（3）某校 2020 年新入学的高个子学生；

（4）方程 $x-1=0$ 的实数解；

（5）在直角坐标平面内，第二象限的所有点.

A.（1）（2）（3）　　B.（2）（3）（4）　　C.（2）（4）（5）　　D.（3）（4）（5）

解析　（1）“我国著名的数学家”不是一个明确的标准，不能组成一个集合；（3）“高个子学生”这一标准也不明确，也不能组成集合；（2）（4）的对象是确定的；（5）的对象虽然有无限个，但它是确定的. 因此选 C.

技巧点拨　判断某组对象能否组成集合，关键看这组对象是不是确定的. 因此，对象的标准一定要是明确的.

变式训练 1

下列语句中的对象，能组成集合的是（　　）.

A. 我班数学好的男生　　B. 与 0 接近的全体实数

C. 大于 π 的自然数　　D. 优秀的中等职业学校

题型二 集合与元素的关系及性质

例 2　已知集合 $A=\{-1,0\}$，$B=\{t|t=y-x,x\in A,y\in A\}$，则集合 B 用列举法可表示为(　　).

A. $\{1\}$　　B. $\{-1\}$　　C. $\{-1,1\}$　　D. $\{-1,0,1\}$

解析　由题意可知，集合 B 中的元素是由集合 A 中任意两个元素(可以相等)作减法得到，再根据集合元素的互异性可知，$B=\{-1,0,1\}$. 故选 D.

技巧点拨　集合中的元素要满足确定性、互异性、无序性.

变式训练 2

已知集合 $A=\{1,2,4\}$，集合 $B=\{x|x=a+b,a\in A,b\in A\}$，则集合 B 中元素的个数为________.

题型三 集合的表示方法

例 3　用列举法表示下列集合.

(1)$A=\{x|-2<x<5,x\in\mathbf{Z}\}$；

(2)$B=\{(x,y)|2x+y=5,x\in\mathbf{N},y\in\mathbf{N}\}$.

解析　(1)$A=\{-1,0,1,2,3,4\}$；(2)$B=\{(0,5),(1,3),(2,1)\}$.

技巧点拨　注意集合中的元素要满足互异性.

变式训练 3

用描述法表示下列集合.

(1)$\{11,12,13,14,15,\cdots\}$；

(2)$\{1,4,9,16,25,36\}$.

实战训练

基础巩固

1. 下列对象中，能组成集合的是(　　)

A. 有趣的书　　B. 非常小的数　　C. 好听的歌　　D. 小于 3 的数

2. 用列举法表示集合$\{x|x^2-3x+2=0\}$的结果是 （ ）

A. $(1,2)$ B. $1,2$ C. $\{1,2\}$ D. 以上都不是

3. 用列举法表示“大于2且小于9的偶数的全体”构成的集合是 （ ）

A. $\varnothing$ B. $\{4,6,8\}$ C. $\{3,5,7\}$ D. $\{3,4,5,6,7,8\}$

4. 用描述法表示“绝对值等于1的所有整数”组成的集合是 （ ）

A. $\{-1,1\}$ B. $(-1,1)$

C. $\{x\in\mathbf{Z}||x|=1\}$ D. $\{x\in\mathbf{Z}|x=1\}$

5. 下列对象中，能组成集合的是 （ ）

A. 全体有理数 B. 无限趋近于2的实数

C. 由1,2,3,3,4,4,5,6,8构成的全体 D. 本班性格外向的同学

6. 全体不大于3的正整数组成的集合是 （ ）

A. $\{0,1,2,3\}$ B. $\{1,2,3\}$ C. $\{x|0\leqslant x\leqslant 3\}$ D. $\{x|x\leqslant 3\}$

7. 用列举法表示“大于2且小于5的整数”组成的集合是 （ ）

A. $\{x|2<x<5\}$ B. $\{x\in\mathbf{Z}|2<x<5\}$

C. $\{2,3,4,5\}$ D. $\{3,4\}$

8. 已知集合$A=\{x|1<x<2\}$，$a=\sqrt{5}$，则下列关系中，正确的是 （ ）

A. $a\in A$ B. $a\notin A$ C. $\{a\}\in A$ D. $\{a\}\notin A$

能力提升

1. 由坐标平面内不在坐标轴上的点组成的集合是 （ ）

A. $\{(x,y)|x\neq 0\}$ B. $\{(x,y)|y\neq 0\}$

C. $\{(x,y)|xy\neq 0\}$ D. $\{(x,y)|xy=0\}$

2. 下列选项中，表述正确的是 （ ）

A. 由1,3,5,7,5,3组成的集合含有6个元素

B. 周长为16 cm的三角形组成的集合是有限集合

C. 集合$\{0\}$是空集

D. 一年级(3)班的所有同学可以组成集合

3. 已知集合$A=\{x|ax^2+2x+1=0,x\in\mathbf{R}\}$.

(1)若A只有一个元素，求a的值；

(2)若A恰有两个元素，求a的取值范围；

(3)若A至多只有一个元素，求a的取值范围.

第二节 集合间的关系及运算

知识清单

知识点一 集合间的关系

1. 子集

一般地,如果集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素,则称集合 A 是集合 B 的子集,记作 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$,读作"A 包含于 B"或"B 包含 A".

如果集合 A 不是集合 B 的子集,记作 $A\nsubseteq B$ 或 $B\nsupseteq A$,读作"A 不包含于 B"或"B 不包含 A".

任何一个集合都是它本身的子集,即 $A\subseteq A$;空集是任何集合的子集,即 $\varnothing\subseteq A$;对集合 A,B,C,若 $A\subseteq B,B\subseteq C$,则 $A\subseteq C$.

注:不能把子集说成由原来集合中的部分元素组成的集合,因为 A 的子集包括它本身,而这个子集由 A 的全体元素组成,此外,空集也是 A 的子集,但这个子集中不包括 A 中的任何元素.

2. 真子集

如果集合 A 是集合 B 的子集,并且集合 B 中至少有一个元素不属于 A,则称集合 A 是集合 B 的真子集,记作 $A\subsetneqq B$ 或 $B\supsetneqq A$,读作"A 真包含于 B"或"B 真包含 A".

空集是任何非空集合的真子集;对于集合 A,B,C,若 $A\subsetneqq B,B\subsetneqq C$,则 $A\subsetneqq C$.

注:元素与集合之间是属于关系,集合与集合之间是包含关系.

3. 集合相等

如果集合 A 与集合 B 的元素完全相同,则称集合 A 等于集合 B,记作 $A=B$.

注:判断两个集合是否相等,对于元素较少的有限集,主要看它们的元素是否完全相同;对于无限集,则从"互为子集"入手进行判断.

知识点二 集合的运算

1. 交集

一般地,对于给定的集合 A 与集合 B,由既属于集合 A 又属于集合 B 的所有元素组成的集合称为集合 A 与集合 B 的交集,记作 $A\cap B$,读作"A 交 B",即 $A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$.

由交集的定义可知,对于任意的两个集合 A、B,有

(1)$A\cap B=B\cap A$.

(2)$A\cap A=A$.

(3)$A\cap\varnothing=\varnothing$.

(4)$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

(5)若 $A\subseteq B$,则 $A\cap B=A$.

2. 并集

一般地，对于给定的集合 A 与集合 B，由集合 A 与集合 B 的所有元素组成的集合称为集合 A 与集合 B 的并集，记作 $A\cup B$，读作"A 并 B"，即 $A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$.

由并集的定义可知，对于任意的两个集合 A、B，有

(1)$A\cup B=B\cup A$.

(2)$A\cup A=A$.

(3)$A\cup\varnothing=A$.

(4)$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$.

(5)若 $A\subseteq B$，则 $A\cup B=B$.

3. 补集

在研究某些集合时，如果这些集合是一个给定集合的子集，那么这个给定的集合称为全集，通常用字母 U 表示.

注：全集是一个相对的概念，在不同的情况下全集的概念也不同. 在研究数集时，通常把实数集 $\mathbf{R}$ 作为全集.

一般地，如果集合 A 是全集 U 的一个子集，则由全集 U 中不属于集合 A 的所有元素组成的集合称为集合 A 在全集 U 中的补集，记作 $\complement_U A$，即 $\complement_U A=\{x\mid x\in U$ 且 $x\notin A\}$.

由补集的定义可知，对于任意的集合 A，有

(1)$A\cup(\complement_U A)=U$.

(2)$A\cap(\complement_U A)=\varnothing$.

(3)$\complement_U(\complement_U A)=A$.

(4)$\complement_U\varnothing=U$，$\complement_U U=\varnothing$.

4. 用图表示集合的运算

(1)用 Venn 图表示两个集合的交集、并集、补集(见图 1-1).

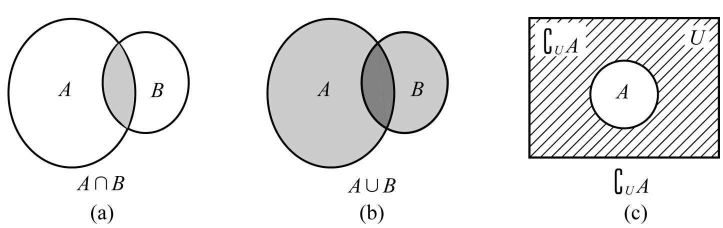

图 1-1

(2)用数轴表示数集的交集、并集(见图 1-2).

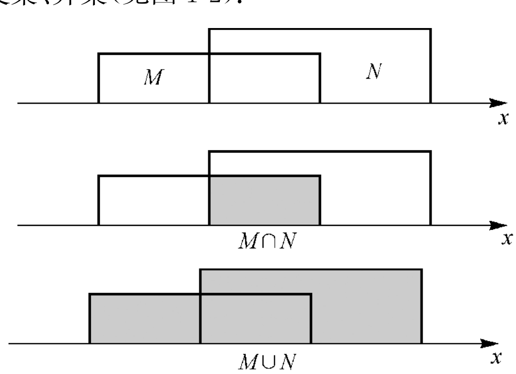

图 1-2

典例剖析

题型一 元素与集合、集合与集合之间的关系

例 1　设集合 $A=\{0\}$，下列结论正确的是(　　).

A. $A=0$　　B. $A\subseteq\varnothing$　　C. $0\in A$　　D. $\varnothing\in A$

解析　集合 A 中只有一个元素 0，所以 $0\in A$. 注意，空集 $\varnothing$ 不是集合 A 的元素，而是集合 A 的子集，所以 $\varnothing\subseteq A$. 故选 C.

技巧点拨　正确理解符号 $\in$，$\notin$，$\subseteq$，$\subsetneqq$ 的意义，是正确处理此类问题的关键.

变式训练 1

下列说法中，正确的有(　　).

①空集没有子集；②任何集合至少有两个子集；③空集是任何集合的真子集；④若 $\varnothing\subsetneqq A$，则 $A\neq\varnothing$.

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

题型二 由集合之间的关系求未知数的值或范围

例 2　已知集合 $A=\{x|x^2-x-2=0\}$，$B=\{x|x^2-4x+p=0\}$，若 $B\subseteq A$，求实数 p 的取值范围.

解析　由题意得，$A=\{-1,2\}$，且 $B\neq A$，因为 $B\subseteq A$，所以 $B=\varnothing$ 或 $B=\{-1\}$ 或 $B=\{2\}$.

若 $B=\varnothing$，则 $\Delta=(-4)^2-4p=16-4p<0$，解得 $p>4$；

若 $B=\{-1\}$，则 $\begin{cases}\Delta=16-4p=0,\\(-1)^2-4\times(-1)+p=0,\end{cases}$ 无解；

若 $B=\{2\}$ 时，$\begin{cases}\Delta=16-4p=0,\\2^2-4\times2+p=0,\end{cases}$ 解得 $p=4$.

综上所述，实数 p 的取值范围是 $p\geqslant4$.

技巧点拨　根据集合的关系建立方程(组)或不等式，然后解出未知数的值或取值范围，最后利用集合元素的特征进行检验.

变式训练 2

已知集合 $A=\{1,1+m,1+2m\}$，$B=\{1,n,n^2\}$，其中 $m,n\in\mathbf{R}$，若 $A=B$，求 m,n 的值.

题型三 集合的运算

例 3 设全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\mid 0\leqslant x<2\}$，集合 $B=\{x\mid x^2-2x-3<0\}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$，$\complement_U A\cap B$.

解析 $B=\{x\mid x^2-2x-3<0\}=\{x\mid -1<x<3\}$，$\complement_U A=\{x\mid x<0$ 或 $x\geqslant 2\}$，

所以 $A\cap B=\{x\mid 0\leqslant x<2\}$，$A\cup B=\{x\mid -1<x<3\}$，

$\complement_U A\cap B=\{x\mid -1<x<0$ 或 $2\leqslant x<3\}$.

变式训练 3

设全集 $U=\{0,1,2,3,4\}$，集合 $A=\{0,1,2,3\}$，集合 $B=\{2,3,4\}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$，$\complement_U A\cup\complement_U B$.

题型四 由交、并、补确定未知量的范围

例 4 已知集合 $M=\{x\mid a\leqslant x\leqslant a+3\}$，$N=\{x\mid x<-1$ 或 $x>5\}$，若 $M\cap N=\varnothing$，求实数 a 的取值范围.

解析 如图 1-3 所示，要使 $M\cap N=\varnothing$，必须满足 $\begin{cases}a+3\leqslant 5,\\ a\geqslant -1,\end{cases}$ 解得 $-1\leqslant a\leqslant 2$，所以实数 a 的取值范围是 $\{a\mid -1\leqslant a\leqslant 2\}$.

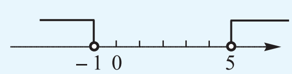

图 1-3

技巧点拨 有关不等式的集合，可以借助数轴解题. 需要注意的是“端点值”的问题，判断能取“=”还是不能取“=”.

变式训练 4

已知 $A=\{x\mid a\leqslant x\leqslant a+3\}$，$B=\{x\mid x>1$ 或 $x<-6\}$.

(1)若 $A\cap B=\varnothing$，求 a 的取值范围；

(2)若 $A\cup B=B$，求 a 的取值范围.

题型五 Venn 图的应用

例 5　U 为全集,集合 $M\subsetneqq U,N\subsetneqq U$,且 $N\subseteq M$,则(　　).

A. $(\complement_U M)\supseteq(\complement_U N)$　　B. $(\complement_U M)\supseteq N$

C. $(\complement_U M)\subseteq(\complement_U N)$　　D. $M\supseteq(\complement_U N)$

解析　根据集合之间的关系作图(见图 1-4),容易判断 C 项正确.

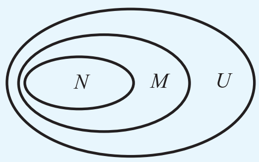

图 1-4

技巧点拨　(1)考虑集合之间的关系时,用 Venn 图解答比较方便.

(2)在数学中利用“数形结合”的思想,往往能使问题简单化.

变式训练 5

U 为全集,M,N 为两个非空集合,且满足 $M\cap N=M$,则下列正确的是(　　).

A. $M\subsetneqq N$　　B. $N\subsetneqq M$

C. $M=N$　　D. $M\cap(\complement_U N)=\varnothing$

实战训练

基础巩固

一、选择题

1. 下面四个关系中,正确的个数为　　(　　)

①$0\in\mathbf{Q}$;　②$\sqrt{2}\notin\mathbf{Q}$;　③$\mathbf{Z}\subseteq\mathbf{Q}$;　④$\varnothing\subsetneqq\{0\}$.

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

2. 已知集合 $A=\{a,b,c\}$ 中的三个元素可以构成三角形的三条边的长,那这个三角形一定不是　　(　　)

A. 锐角三角形　　B. 直角三角形　　C. 钝角三角形　　D. 等腰三角形

3. 设集合 $A=\{1,2,3\},B=\{4,5,6\}$,则 $A\cap B=$　　(　　)

A. $\varnothing$　　B. $\{3\}$　　C. $\{1,2\}$　　D. $\{1,2,3,4,5,6\}$

4. 设集合 $A=\{0,1,2,3\},B=\{-1,0,1\}$,则 $A\cap B=$　　(　　)

A. $\varnothing$　　B. $\{0,1\}$　　C. $\{-1,0,1\}$　　D. $\{0,1,2,3\}$

5. 设集合 $A=\{0,1\},B=\{-1,0\}$,则 $A\cup B=$　　(　　)

A. $\varnothing$　　B. $\{0\}$　　C. $\{-1,0,1\}$　　D. $\{0,1\}$

6. 设集合 $A=\{x|-4<x<6,x\in\mathbf{Z}\},B=\{1,3,5\}$,则 $A\cap B=$　　(　　)

A. $\varnothing$　　B. $\{1,3,5\}$　　C. $\{4,5\}$　　D. $\{1,2,3,4,5\}$

7. 设集合 $A=\{-2,2\}$，$B=\{-1,2\}$，则 $A\cup B=$　　(　　)

A. $\{2\}$　　B. $\{-2,-1\}$　　C. $\{-2,2\}$　　D. $\{-2,-1,2\}$

8. 设全集 $U=\{1,2,3,4\}$，集合 $A=\{2,3\}$，$B=\{1,4\}$，则 $\complement_U B\cap A=$　　(　　)

A. $\varnothing$　　B. $\{1,4\}$　　C. $\{2,3\}$　　D. $\{1,2,3,4\}$

二、填空题

1. 用适当的符号($\in$，$\notin$，$\subseteq$，$\supseteq$，或$=$)填空.

3 __________ $\{2,3\}$；　　π __________ $\mathbf{Q}$；　　$\{1,2,3\}$ __________ $\mathbf{Z}$；

$\mathbf{N}_+$ __________ $\mathbf{Z}$；　　$\{-3,3\}$ __________ $\{x\mid x^2=9\}$.

2. 已知集合 $P=\{x\in\mathbf{N}\mid 2<x<a\}$，且集合 P 中恰有 3 个元素，则整数 $a=$__________.

3. 关系式①$\{a,b\}\subseteq\{b,a\}$；②$\{a,b\}=\{b,a\}$；③$0=\varnothing$；④$0\in\{0\}$；⑤$\varnothing\in\{0\}$；⑥$\varnothing\subseteq\{0\}$中正确的是__________.

4. 设全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\mid x^2-x-2=0\}$，$B=\{x\mid |x|=y+1,y\in A\}$，则 $\complement_U B=$__________.

5. 已知集合 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{1,a\}$，$A\cap B=\{1,3\}$，则 $A\cup B=$__________.

三、解答题

1. 已知集合 $A=\{0,1,2\}$，集合 $B=\{x\mid x=ab,a\in A,b\in A\}$，判断集合 B 和集合 A 的关系.

2. 写出集合$\{-3,-1,1,3\}$的所有子集，并指出哪些是真子集.

3. 已知集合 $A=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x\mid ax+2=0\}$，求使 $B\subsetneqq A$ 的实数 a 组成的集合.

能力提升

1. 已知集合$\{1,a,b\}$与$\{-1,-b,1\}$是同一集合,求实数a,b的值.

2. 已知集合$A=\{x|x^2-px+16=0\}$,$B=\{x|x^2-5x+q=0\}$,且$A\cap B=\{2\}$,求$A\cup B$.

真题链接

1. 已知集合$M=\{1,2\}$,$N=\{2,3,x\}$,若$M\subseteq N$,则实数x的值是 ( )

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

【答案】A　**解析:**因为$M\subseteq N$,所以$x=1$.

2. 已知集合$U=\{0,1,2,3,4\}$,集合$M=\{1,2,3\}$,$N=\{2,4\}$,则$M\cap(\complement_U N)$等于 ( )

A. $\{2\}$　　B. $\{1,3\}$　　C. $\{0,1,3\}$　　D. $\{0,1,2,3\}$

【答案】B　**解析:**因为$\complement_U N=\{0,1,3\}$,所以$M\cap(\complement_U N)=\{1,3\}$.

3. 已知全集$U=\{a,b,c,d\}$,集合$M=\{a,c\}$,则$\complement_U M$等于 ( )

A. $\varnothing$　　B. $\{a,c\}$　　C. $\{b,d\}$　　D. $\{a,b,c,d\}$

【答案】C　**解析:**根据补集的定义可得.

4. 已知集合$M=\{0,1\}$,$N=\{1,2\}$,则$M\cup N$等于 ( )

A. $\{1\}$　　B. $\{0,2\}$　　C. $\{0,1,2\}$　　D. $\varnothing$

【答案】C　**解析:**根据并集的定义可得.

5. 已知集合$M=\{a,b\}$,$N=\{b,c\}$,则$M\cap N$等于 ( )

A. $\varnothing$　　B. $\{b\}$　　C. $\{a,c\}$　　D. $\{a,b,c\}$

【答案】B　**解析:**根据交集的定义可得.

第三节 逻辑用语

知识清单

知识点一 命题

能够判断真假的陈述句称为命题. 判断为真的命题称为真命题,判断为假的命题称为假命题. 我们常用小写字母 $p,q,r,\cdots$表示命题.

知识点二 逻辑联结词

1. “且”“或”“非“

用逻辑联结词“且”把命题 p 和命题 q 联结起来,得到一个新命题,记作 $p\wedge q$,读作“p 且 q”. 如命题 p:“3 是质数”,命题 q: “3 是奇数”,用“且”联结构成的新命题 $p\wedge q$:“3 是质数且是奇数”.

用逻辑联结词“或”把命题 p 和命题 q 联结起来,得到一个新命题,记作 $p\vee q$,读作“p 或 q”. 如命题 p:“12 是 3 的倍数”,命题 q: “12 是 4 的倍数”,用“或”联结构成的新命题 $p\vee q$:“12 是 3 的倍数或 12 是 4 的倍数”.

对命题 p 全盘否定,得到一个新的命题,记作 $\neg p$,读作“非 p”或“p 的否定”. 如命题 p:“12 是 3 的倍数”的否定 $\neg p$:“12 不是 3 的倍数”.

2. $\neg p,\neg q,p\wedge q,p\vee q$ 的真假

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p\wedge q$	$p\vee q$
真	真	假	假	真	真
真	假	假	真	假	真
假	真	真	假	假	真
假	假	真	真	假	假

知识点三 量词

1. 全称量词与存在量词

短语“所有的”“任意一个”在逻辑中通常叫作全称量词,并用符号“$\forall$”表示. 含有全称量词的命题,叫作全称量词命题. 全称量词命题“对 N 中所有的 x,$p(x)$成立”,可用符号简记为“$\forall x\in N,p(x)$”.

短语“存在一个”“至少有一个”在逻辑中通常叫作存在量词,并用符号“$\exists$”表示. 含有存在量词的命题,叫作存在量词命题. 存在量词命题 “存在 N 中的元素 x,$p(x)$成立”,可用符号简记为“$\exists x\in N$,$p(x)$”.

2. 全称量词命题与存在量词命题的否定

全称量词命题“$\forall x\in N,p(x)$”的否定是“$\exists x\in N,\neg p(x)$”；

存在量词命题“$\exists x\in N,p(x)$”的否定是“$\forall x\in N,\neg p(x)$”.

典例剖析

题型一　命题的定义

例 1　下列语句是命题的是(　　).

A. 他真高!　　B. 今天天气怎么样?　　C. $2+1=3$　　D. 两直线平行

解析　感叹句和疑问句不是命题，A，B错；D无法判断真假，不是命题，故选C.

技巧点拨　命题是能判断真假的陈述句，疑问句、祈使句等不是命题.

变式训练 1

下列语句中哪个不是命题(　　).

A. 地球绕着太阳转　　B. $3+4=7$

C. $2x$　　D. 矩形的对角线相等

题型二　“且”“或”“非”命题的真假判断

例 2　如果 p 是假命题，q 是真命题，则下列命题是真命题的是(　　).

A. $\neg q$　　B. $\neg(p\vee q)$　　C. $\neg p\wedge q$　　D. $p\wedge q$

解析　因为 p 是假命题，q 是真命题，所以 $\neg p$ 是真命题，$\neg q$ 是假命题，所以 $p\wedge q$ 是假命题，$p\vee q$ 是真命题，$\neg p\wedge q$ 是真命题，$\neg(p\vee q)$ 是假命题. 故选C.

技巧点拨　$p\wedge q$：一假即假，都真才真；$p\vee q$：一真即真，都假才假；p 与 $\neg p$：真假相反.

变式训练 2

设命题 $p:\varnothing=0$；$q:2\geqslant 3$，则(　　).

A. $p\vee q$ 为真　　B. $p\wedge q$ 为真　　C. p 为假　　D. $\neg p$ 为假

题型三　量词的应用

例 3　命题“$\exists x\in \mathbf{R},x^2+x\leqslant 0$”的非命题是(　　).

A. $\forall x\in \mathbf{R},x^2+x\geqslant 0$　　B. $\exists x\in \mathbf{R},x^2+x\geqslant 0$

C. $\forall x\in \mathbf{R},x^2+x>0$　　D. $\exists x\in \mathbf{R},x^2+x>0$

解析 根据两个量词的关系可知选 C.

技巧点拨 全称命题的"非"是存在性命题，量词也要替换.

变式训练 3

写出下列命题的非命题.

(1) p：$\exists x\in\mathbf{R}, x>0$；　　(2) q：$\forall x\in\mathbf{R}, x^2\neq 0$.

实战训练

基础巩固

一、选择题

1. 下列语句中，是命题的是　　(　　)

A. π 是无限不循环小数　　B. $3x\leqslant 5$

C. 什么是"绩效工资"?　　D. 今天的天气真好呀!

2. 下列命题为真命题的是　　(　　)

A. 若 $\frac{1}{x}=\frac{1}{y}$，则 $x=y$　　B. 若 $x^2=1$，则 $x=1$

C. 若 $x=y$，则 $\sqrt{x}=\sqrt{y}$　　D. 若 $x<y$，则 $x^2<y^2$

3. 若命题"$\neg p$"与命题"$p\vee q$"都是真命题，那么　　(　　)

A. 命题 p 与命题 q 的真假相同　　B. 命题 p 一定是真命题

C. 命题 q 不一定是真命题　　D. 命题 q 一定是真命题

4. 如果命题"$\neg(p\vee q)$"为真命题，则　　(　　)

A. p，q 均为真命题　　B. p，q 均为假命题

C. p，q 中至少有一个为真命题　　D. p，q 中一个为真命题，一个为假命题

5. 已知命题 p：$\forall x\in\mathbf{R}, x^2+2x+2>0$，则 $\neg p$ 是　　(　　)

A. $\exists x_0\in\mathbf{R}, x_0^2+2x_0+2<0$　　B. $\forall x\in\mathbf{R}, x^2+2x+2<0$

C. $\exists x_0\in\mathbf{R}, x_0^2+2x_0+2\leqslant 0$　　D. $\forall x\in\mathbf{R}, x^2+2x+2\leqslant 0$

6. 由命题 p："$8+2>10$"与 q："$1>2$"构成的命题，下列判断正确的是　　(　　)

A. $p\vee q$ 为真，$p\wedge q$ 为真　　B. $p\vee q$ 为假，$p\wedge q$ 为假

C. $p\vee q$ 为真，$p\wedge q$ 为假　　D. $p\vee q$ 为假，$p\wedge q$ 为真

7. 下列命题是真命题的是　　(　　)

A. $\forall x\in\mathbf{R}, (x-\sqrt{2})^2>0$　　B. $\forall x\in\mathbf{Q}, x^2>0$

C. $\exists x_0\in\mathbf{Z}, 3x_0=812$　　D. $\exists x_0\in\mathbf{R}, 3x_0-4=2$

8. 已知命题 p:2 是偶数,命题 q:$\forall x\in\mathbf{R}$,$x-1=2$,则下列命题为真命题的是 ( )

A. $p\land q$　　B. $p\lor q$

C. $\lnot p$　　D. $(\lnot p)\land(\lnot q)$

二、填空题

1. 给出下列命题:

①若 $ac=bc$,则 $a=b$;

②方程 $x^2=0$ 无实数根;

③对于实数 x,若 $x-2=0$,则 $(x-2)(x+1)=0$;

④若 $p>0$,则 $p^2>p$;

⑤正方形不是菱形.

其中真命题是________,假命题是________.

2. 已知命题 p:π 是有理数,命题 q:$x^2\geqslant 0$. 给出下列结论:

(1)命题 $p\land q$ 是真命题;

(2)命题 $p\land(\lnot q)$是假命题;

(3)命题$(\lnot p)\lor q$ 是真命题;

(4)命题$(\lnot p)\lor(\lnot q)$是假命题,其中正确的是________.

三、解答题

分别指出由下列各组命题构成的“$p\land q$”“$p\lor q$”“$\lnot p$”形式的命题的真假:

(1)p:$6<6$,q:$6=6$;

(2)p:梯形的对角线相等,q:梯形的对角线互相平分.

能 力 提 升

1.“红豆生南国,春来发几枝?愿君多采撷,此物最相思.”这是唐代诗人王维的《相思》,在这几句诗中,可作为命题的是 ( )

A. 红豆生南国　　B. 春来发几枝　　C. 愿君多采撷　　D. 此物最相思

2. 已知命题 p:$\forall x\in\mathbf{R}$,$x-2>0$,命题 q:$\exists x_0\in\mathbf{N}$,$x_0-2>0$,则 ( )

A. p 假 q 真　　B. p 真 q 假　　C. p 假 q 假　　D. p 真 q 真

真题链接

1. 已知命题 p:甲、乙、丙三名同学都是共青团员,则$\lnot p$: ( )

A. 甲、乙、丙三名同学都不是共青团员

B. 甲、乙、丙三名同学中至少有一名不是共青团员

C. 甲、乙、丙三名同学中至少有两名不是共青团员

D. 甲、乙、丙三名同学中至多有一名不是共青团员

【答案】B　**解析:**$\lnot p$:甲、乙、丙三名同学不都是共青团员,即至少有一名不是共青团员.

2. 下列命题为真命题的是 ( )

A. $1>0$ 且 $3>4$ B. $1>2$ 或 $4>5$

C. $\exists x\in \mathbf{R},\cos x>1$ D. $\forall x\in \mathbf{R},x^2\geqslant 0$

【答案】D **解析:** A 中,$3<4$,故为假命题;B 中,$1<2$,$4<5$,故为假命题;C 中,$\cos x\leqslant 1$,故为假命题,故选 D.

3. 设集合 $M=\{-2,0,2,4\}$,则下列命题为真命题的是 ( )

A. $\forall a\in M$,a 是正数 B. $\forall b\in M$,b 是自然数

C. $\exists c\in M$,c 是奇数 D. $\exists d\in M$,d 是有理数

【答案】D **解析:** -2 不是正数,故 A 错. -2 不是自然数,故 B 错. M 中都是偶数,故 C 错. 故选 D.

4. 设命题 p:$5\geqslant 3$,命题 q:$\{1\}\subseteq\{0,1,2\}$,则下列命题中为真命题的是 ( )

A. $p\wedge q$ B. $\neg p\wedge q$ C. $p\wedge \neg q$ D. $\neg p\wedge \neg q$

【答案】A **解析:** 因为命题 p:$5\geqslant 3$ 为真,命题 p:$\{1\}\subseteq\{0,1,2\}$ 为真,所以 $p\wedge q$ 为真,$\neg p\wedge q$,$p\wedge \neg q$,$\neg p\wedge \neg q$ 为假,故选 A.

第四节 充要条件

知识清单

知识点一 充分条件、必要条件和充要条件

1. 命题的条件和结论

一般地,对于形如"如果 p,那么 q"的命题,我们称 p 为命题的条件,简称条件;称 q 为命题的结论,简称结论.

2. 充分条件

若命题"如果 p,那么 q"是真命题,即由 p 可以推出 q,则称 p 是 q 的充分条件,记作 $p\Rightarrow q$.

若命题"如果 p,那么 q"是假命题,即由 p 不能推出 q,则称 p 不是 q 的充分条件,记作 $p\nRightarrow q$.

3. 必要条件

若命题"如果 p,那么 q"的逆命题"如果 q,那么 p"是真命题,则称 p 是 q 的必要条件,记作 $p\Leftarrow q$.

若命题"如果 p,那么 q"的逆命题"如果 q,那么 p"是假命题,则称 p 不是 q 的必要条件,记作 $p\nLeftarrow q$.

4. 充要条件

若命题"如果 p,那么 q"是真命题,其逆命题"如果 q,那么 p"也是真命题,即 $p\Rightarrow q$ 且 $p\Leftarrow q$,则称 p 是 q 的充分且必要条件,简称充要条件. 有时也称 p 与 q 等价,记作 $p\Leftrightarrow q$.

知识点二 充分条件、必要条件和充要条件的判断方法

1. 从逻辑推理关系上判断(定义法)

(1)若 $p\Rightarrow q$ 但 $q\nRightarrow p$,则 p 是 q 的充分不必要条件.

(2)若 $p \nRightarrow q$ 但 $q \Rightarrow p$,则 p 是 q 的必要不充分条件.
(3)若 $p \Rightarrow q$ 且 $q \Rightarrow p$,则 p 是 q 的充要条件.
(4)若 $p \nRightarrow q$ 且 $q \nRightarrow p$,则 p 是 q 的既不充分也不必要条件.

2. 从命题所对应的集合与集合之间的关系上判断(集合法)

设命题 p 对应的集合为 A,命题 q 对应的集合为 B.
(1)若 $A \subseteq B$,则 p 是 q 的充分条件.
(2)若 $A \supseteq B$,则 p 是 q 的必要条件.
(3)若 $A \subseteq B$ 且 $A \supseteq B$,即 $A = B$,则 p 是 q 的充要条件.
(4)若 $A \subsetneqq B$,则 p 是 q 的充分条件,但不是必要条件(简称“充分不必要条件”).
(5)若 $A \supsetneqq B$,则 p 是 q 的必要条件,但不是充分条件(简称“必要不充分条件”).
(6)若 $A \nsubseteq B$ 且 $A \nsupseteq B$,则 p 是 q 的既不充分也不必要条件.

典例剖析

题型一 用定义判断充要条件

例 1 “$x=0$”是“$xy=0$”的(　　).

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件
C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

解析 由“$x=0$”能推出“$xy=0$”,而由“$xy=0$”只能推出“$x=0$ 或 $y=0$”,不能推出“$x=0$”,所以“$x=0$”是“$xy=0$”的充分不必要条件. 故选 A.

技巧点拨 判断充要条件时,先分清条件和结论,进而找到条件与结论之间的逻辑推理关系.

变式训练 1

设 a,b 是实数,则“$a+b>0$”是“$ab>0$”的(　　).

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件
C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

题型二 用集合关系判断充要条件

例 2 设集合 $A=\{x \mid 0<x<2\}$,$B=\{x \mid -1<x<3\}$,则“$x \in A$”是“$x \in B$”的(　　).

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件
C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

解析 因为 $A \subsetneqq B$,所以“$x \in A$”是“$x \in B$”的充分不必要条件. 故选 A.

技巧点拨 利用集合间的关系,可以快速判断充要条件.

变式训练 2

设集合 $M=\{x|x>2\}$，$N=\{x|x<3\}$，则“$x\in M\cup N$”是“$x\in M\cap N$”的(　　).

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

实战训练

基础巩固

一、选择题

1. “$A\cap B=A$”是“$A\subseteq B$”的　　(　　)

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

2. 设甲是乙的充分不必要条件，乙是丙的充要条件，丁是丙的必要不充分条件，则甲是丁的　　(　　)

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

3. “$|x|\geqslant 1$”是“$x\geqslant 1$”的　　(　　)

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. “$x>0$”是“$x>1$”的　　(　　)

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

5. 设 $a,b,c\in\mathbf{R}$，则“$a>b$”是“$ac^2>bc^2$”的　　(　　)

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

二、解答题

判断下列问题中，p 是 q 的什么条件.

(1) p：$x^2\geqslant y^2$，q：$x\geqslant y$.

(2) p：$x\in A\cup B$，q：$x\in A\cap B$.

(3) p：$x>3$，q：$x>2$.

(4) p：a 是有理数，q：$a+2$ 是有理数.

能力提升

已知 x,y 是非零实数,且 $x>y$,证明:“$\frac{1}{x}<\frac{1}{y}$”的充要条件是“$xy>0$”.

真题链接

1. 已知 $a\in\mathbf{R}$,若集合 $M=\{1,a\}$,$N=\{-1,0,1\}$,则“$a=0$”是“$M\subseteq N$”的 (　　)

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

【答案】A　**解析:**当 $a=0$ 时,$M=\{1,0\}$,$M\subseteq N$;若 $M\subseteq N$,则 $M=\{1,0\}$或$\{1,-1\}$,即 $a=0$ 或 -1,故是充分不必要条件. 故选 A.

2. 对于命题 p,q,“$p\lor q$ 是真命题”是“p 是真命题”的 (　　)

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

【答案】B　**解析:**“$p\lor q$ 是真命题”,则 p 或 q 为真命题,所以“$p\lor q$ 是真命题”推不出“p 为真”,但“p 是真命题”一定能推出“$p\lor q$ 是真命题”,故“$p\lor q$ 是真命题”是“p 是真命题”的必要不充分条件,故选 B.

第一章　集合与逻辑用语

第一节　集合及其表示

【典例剖析】

变式训练 1

C　**解析**:“数学好”“与 0 接近”“优秀的”都是不确定的,故选 C.

变式训练 2

6　**解析**:由题意可知 $B=\{2,3,4,5,6,8\}$,其元素个数为 6.

变式训练 3

解:(1)$\{11,12,13,14,15,\cdots\}=\{x|x=n+10,n\in\mathbf{N}_+\}$.

(2)$\{1,4,9,16,25,36\}=\{x|x=n^2,1\leqslant n\leqslant 6$ 且 $n\in\mathbf{Z}\}$.

【实战训练】

基础巩固

1. D　**解析**:“有趣的”“非常小的”“好听的”都是不确定的,故选 D.

2. C　3. B　4. C　5. A　6. B　7. D

8. B　**解析**:$\sqrt{5}>2$,即 a 不属于集合 A,故选 B.

能力提升

1. C　2. D

3. **解**:(1)若 A 只有一个元素,分两种情况讨论:

当 $a=0$ 时,$A=\{x\mid 2x+1=0\}=\left\{-\frac{1}{2}\right\}$,符合题意.

当 $a\neq 0$ 时,$ax^2+2x+1=0$ 有两个相等的实根,即 $\Delta=4-4a=0$,解得 $a=1$.

所以 $a=0$ 或 $a=1$ 时 A 中只有一个元素.

(2)若 A 恰有两个元素,则 $ax^2+2x+1=0$ 有两个不相等的实根,即 $\begin{cases}a\neq 0,\\ \Delta=4-4a>0,\end{cases}$ 解得 $a<1$ 且 $a\neq 0$. 所以 $a<1$ 且 $a\neq 0$ 时 A 中恰有两个元素.

(3)若 A 至多只有一个元素,分为 A 中只有一个元素或 $A=\varnothing$.

由(1)可知,当 $a=0$ 或 $a=1$ 时 A 中只有一个元素.

若 $A=\varnothing$,则 $ax^2+2x+1=0$ 无解,即 $\begin{cases}a\neq 0,\\ \Delta=4-4a<0,\end{cases}$ 解得 $a>1$.

所以当 $a\geqslant 1$ 或 $a=0$ 时,A 中至多只有一个元素.

第二节　集合间的关系及运算

【典例剖析】

变式训练 1

A　**解析**:由空集的性质可知,①、②、③是错误的,故选 A.

变式训练 2

解:因为 $A=B$,所以 $\begin{cases}1+m=n,\\ 1+2m=n^2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}1+m=n^2,\\ 1+2m=n,\end{cases}$ 解得

$\begin{cases}m=0,\\ n=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m=-\frac{3}{4},\\ n=-\frac{1}{2}.\end{cases}$

当 $m=0,n=1$ 时,集合元素不满足互异性,舍去.

故 $m=-\frac{3}{4},n=-\frac{1}{2}$.

变式训练 3

解:$A\cap B=\{2,3\}$,$A\cup B=\{0,1,2,3,4\}$,

$\complement_U A=\{4\}$,$\complement_U B=\{0,1\}$,所以 $\complement_U A\cup\complement_U B=\{0,1,4\}$.

变式训练 4

解:(1)由题意得 $\begin{cases}a+3\leqslant 1,\\ a\geqslant -6,\end{cases}$ 解得 $-6\leqslant a\leqslant -2$.

(2)由题意得 $a>1$ 或 $a+3<-6$,解得 $a>1$ 或 $a<-9$.

变式训练 5

D　**解析**:根据集合之间的关系作图,即可做出判断.

【实战训练】

基础巩固

一、选择题

1. A　**解析**:正确理解符号 $\in,\notin,\subseteq,\subsetneqq$ 的意义.

2. D　**解析**：由集合中元素的互异性，知 $a\neq b\neq c$，所以以 a,b,c 为三条边的长的三角形一定不是等腰三角形.

3. A　**解析**：因为集合 A 与集合 B 没有共同元素，所以 $A\cap B=\varnothing$，故选 A.

4. B　**解析**：因为集合 A 与集合 B 的共同元素是 0 和 1，所以 $A\cap B=\{0,1\}$，故选 B.

5. C　**解析**：$A\cup B=\{-1,0,1\}$，故选 C.

6. B　**解析**：因为 $A=\{-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$，$B=\{1,3,5\}$，所以 $A\cap B=\{1,3,5\}$，故选 B.

7. D　**解析**：$A\cup B=\{-2,-1,2\}$，故选 D.

8. C　**解析**：$\complement_U B=\{2,3\}$，$\complement_U B\cap A=\{2,3\}$，故选 C.

二、填空题

1. $\in$；$\notin$；$\subseteq$；$\subseteq$；$=$

2. 6　**解析**：根据集合元素的特征可知集合 $P=\{3,4,5\}$，故 $a=6$.

3. ①②④⑥　**解析**：集合与集合之间的关系不能用 $\in$.

4. $\{x|x\neq -3$ 且 $x\neq 0$ 且 $x\neq 3\}$　**解析**：由题意可知 $A=\{-1,2\}$，则 $B=\{-3,0,3\}$. 因为 $U=\mathbf{R}$，所以 $\complement_U B=\{x|x\neq -3$ 且 $x\neq 0$ 且 $x\neq 3\}$.

5. $\{1,2,3\}$

三、解答题

1. **解**：由题意可知 $B=\{0,1,2,4\}$，那么集合 A 中的元素都在集合 B 中，所以 $A\subseteq B$.（因为 $A\subseteq B$，并且 B 中至少有一个元素不属于 A，故 $A\subsetneqq B$ 也正确.）

2. **解**：子集：$\varnothing$，$\{-3\}$，$\{-1\}$，$\{1\}$，$\{3\}$，$\{-3,-1\}$，$\{-3,1\}$，$\{-3,3\}$，$\{-1,1\}$，$\{-1,3\}$，$\{1,3\}$，$\{-3,-1,1\}$，$\{-3,-1,3\}$，$\{-3,1,3\}$，$\{-1,1,3\}$，$\{-3,-1,1,3\}$.

   真子集：$\varnothing$，$\{-3\}$，$\{-1\}$，$\{1\}$，$\{3\}$，$\{-3,-1\}$，$\{-3,1\}$，$\{-3,3\}$，$\{-1,1\}$，$\{-1,3\}$，$\{1,3\}$，$\{-3,-1,1\}$，$\{-3,-1,3\}$，$\{-3,1,3\}$，$\{-1,1,3\}$.

3. **解**：$A=\{x|x^2-3x+2=0\}=\{1,2\}$.

   因为 $B\subsetneqq A$，所以 $B=\varnothing$ 或 $B=\{1\}$ 或 $B=\{2\}$.

   当 $B=\varnothing$ 时，$a=0$；当 $B=\{1\}$ 时，$a=-2$；当 $B=\{2\}$ 时，$a=-1$.

   故使 $B\subsetneqq A$ 的实数 a 组成的集合为 $\{-2,-1,0\}$.

能力提升

1. **解**：因为集合 $\{1,a,b\}$ 与 $\{-1,-b,1\}$ 是同一集合，

   所以 $\begin{cases}a=-1,\\ b=-b\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-b,\\ b=-1.\end{cases}$

   解第一个方程组，得 $a=-1,b=0$，满足题意.

   解第二个方程组，得 $a=1,b=-1$，此时集合 $\{1,a,b\}$ 与 $\{-1,-b,1\}$ 都不满足集合元素的互异性，不满足题意.

   综上，$a=-1,b=0$.

2. **解**：由于 $A\cap B=\{2\}$，则 $2\in A$ 且 $2\in B$.

   将 $x=2$ 分别代入集合 A 和集合 B 中得到 $p=10$，$q=6$.

   所以 $A=\{x|x^2-10x+16=0\}=\{2,8\}$，$B=\{x|x^2-5x+6=0\}=\{2,3\}$.

   从而求得 $A\cup B=\{2,3,8\}$.

第三节　逻辑用语

【典例剖析】

变式训练 1

C

变式训练 2

C　**解析**：由题干可知 p 为假命题，q 为假命题，故 $p\vee q$ 为假，$p\wedge q$ 为假，$\neg p$ 为真. 故选 C.

变式训练 3

解：(1) $\neg p$：$\forall x\in\mathbf{R},x\leqslant 0$；

(2) $\neg q$：$\exists x\in\mathbf{R},x^2=0$.

【实战训练】

基础巩固

一、选择题

1. A　**解析**：由命题的定义可知，选项 A 正确.

2. A　**解析**：B 中，若 $x^2=1$，则 $x=\pm 1$；C 中，若 $x=y<0$，则 $\sqrt{x}$ 与 $\sqrt{y}$ 无意义；D 中，若 $x=-2,y=-1$，满足 $x<y$，但 $x^2>y^2$，故选 A.

3. D　**解析**：因为 $\neg p$ 是真命题，所以 p 是假命题. 又

$p\vee q$ 是真命题,所以 q 是真命题.

4. B　**解析:** 由 $\neg(p\vee q)$ 为真等价于 $(\neg p)\wedge(\neg q)$ 为真命题,故 $\neg p$ 和 $\neg q$ 均为真命题,可得 p 和 q 均为假命题.

5. C　**解析:** 全称量词命题的否定是将全称量词替换为存在量词,并将含变量的语句否定.

6. B　**解析:** 因为 p 为假,q 为假,所以 $p\vee q$ 为假,$p\wedge q$ 为假.

7. D　**解析:** A 中,当 $x=\sqrt{2}$ 时不成立;B 中,由于 $0\in\mathbf{Q}$,故 B 不正确;C 中,满足 $3x_0=812$ 的 x_0 不是整数,故只有 D 正确.

8. B　**解析:** 因为 p 为真,q 为假,所以 $\neg p$ 为假,$\neg q$ 为真. 所以 $p\wedge q$ 为假,$p\vee q$ 为真,$\neg p$ 为假,$(\neg p)\wedge(\neg q)$ 为假. 故选 B.

二、填空题

1. ③;①②④⑤　**解析:** $c=0$ 时,①错;方程 $x^2=0$ 有实数根 $x=0$,②错;$p=0.5>0$,但 $p^2>p$ 不成立,④错;正方形的四条边相等,是菱形,⑤错. 因此①②④⑤都是假命题.

   对于③,若 $x-2=0$,则 $x=2$,$(x-2)(x+1)=0$,故正确.

2. (2)(3)　**解析:** 因为命题 p:π 是有理数是假命题,命题 q:$x^2\geqslant0$ 是真命题,

   所以 $\neg p$ 是真命题, $\neg q$ 是假命题.

   所以(1)命题 $p\wedge q$ 是假命题,错误.

   (2)命题 $p\wedge(\neg q)$ 是假命题,正确.

   (3)命题 $(\neg p)\vee q$ 是真命题,正确.

   (4)命题 $(\neg p)\vee(\neg q)$ 是真命题,错误.

三、解答题

解:(1)因为 p 为假命题,q 为真命题,所以 $p\wedge q$ 为假命题,$p\vee q$ 为真命题,$\neg p$ 为真命题.

(2)因为 p 为假命题,q 为假命题,所以 $p\wedge q$ 为假命题,$p\vee q$ 为假命题,$\neg p$ 为真命题.

能力提升

1. A　**解析:** A 为可判断真假的陈述句,所以是命题. B 为疑问句,C 为祈使句,D 为感叹句,均不是命题.

2. A　**解析:** 当 $x=1$ 时,$x-2<0$,命题 p 为假命题;当 $x=3$ 时,$x-2>0$,命题 q 为真命题. 故选 A.

第四节　充要条件

【典例剖析】

变式训练 1

D　**解析:** 令 $a=1$,$b=0$,则 $a+b>0$,但是 $ab=0$,所以"$a+b>0$"不能推出"$ab>0$";令 $a=b=-1$,则 $ab>0$,但是 $a+b<0$,所以由"$ab>0$"不能推出"$a+b>0$". 综上,"$a+b>0$"是"$ab>0$"的既不充分也不必要条件.

变式训练 2

B　**解析:** 根据题意,$M\cup N=\{x\mid x>2$ 或 $x<3\}=\mathbf{R}$,$M\cap N=\{x\mid 2<x<3\}$. 因为 $(M\cup N)\supsetneqq(M\cap N)$,所以"$x\in M\cup N$"是"$x\in M\cap N$"的必要不充分条件.

【实战训练】

基础巩固

一、选择题

1. C　**解析:** $A\cap B=A\Rightarrow A\subseteq B$,而 $A\subseteq B\Rightarrow A\cap B=A$,所以答案选 C.

2. A　**解析:** 根据题意,甲⇒乙,乙⇔丙,丙⇒丁,所以甲⇒丁,答案选 A.

3. B　**解析:** $x\geqslant1\Rightarrow|x|\geqslant1$,而 $|x|\geqslant1\not\Rightarrow x\geqslant1$,所以答案选 B.

4. B　**解析:** 由集合关系可知,"$x>0$"是"$x>1$"的必要不充分条件.

5. B　**解析:** 举特殊值 $c=0$,所以"$a>b$"是"$ac^2>bc^2$"的必要不充分条件.

二、解答题

解:(1)既不充分也不必要条件;

(2)必要不充分条件;

(3)充分不必要条件;

(4)充要条件.

能力提升

证明: 若 $xy>0$,则 x,y 同号,即有 $x>y>0$ 或 $0>x>y$,由不等式的性质可知,$\frac{1}{x}<\frac{1}{y}$. 故"$xy>0$"是"$\frac{1}{x}<\frac{1}{y}$"的充分条件.