"十四五"职业教育国家规划教材
（中等职业学校公共基础课程教材）

数学

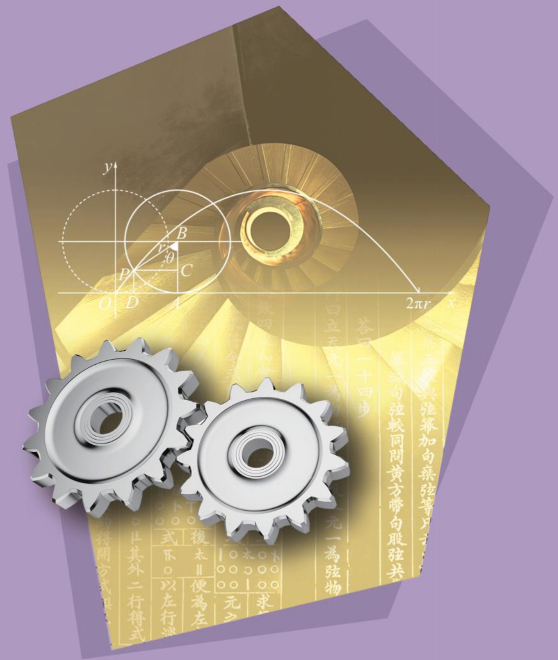
SHUXUE

拓展模块二

丘维声 主编

湖南科学技术出版社

"十四五"职业教育国家规划教材
（中等职业学校公共基础课程教材）
数学
拓展模块二
湖南科学技术出版社



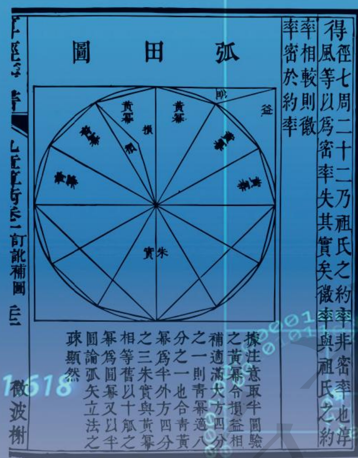
责任编辑：邹楚林　邹伟华　李漫溢
易星星　袁　军
责任美编：殷　健

ISBN 978-7-5710-1506-0

定价：31.07 元

目 录

CONTENTS



$$\frac{a+b}{a}=\frac{a}{b}=1.618$$

第1章 数学文化

本章结构

学以致用

人类文明在不断地发展，数学也与时俱进，成为人类文明的重要组成部分. 数学不仅是一种精密的思想方法、一种科学的工具，更是一种文化，丰富和推动着世界文化的发展.

本章将引领你去了解数学发展的历史，初步体会数学在科学技术发展、发明中的巨大作用.

1.1 中国古代数学

中国是世界上公认的四大文明古国之一，文化悠久灿烂、丰富多彩，数学是其中的一个重要组成部分. 中国是世界上数学史最长的国家，中国古代数学对世界数学的发展和中外科学文化交流作出了非常巨大的贡献，在世界数学宝库里，影响深远、风格独特.

一 中国古代数学发展简述

今天，人们对从 1 数到 10 这样的小事会不屑一顾，然而在 7 000 年以前，人们甚至连 2 以上的数字都数不上来，如果要问他们所捕获的 4 只野兽是多少，人们只会回答“很多只”. 如果当时要是有人能数到 10，那一定会被认为是杰出的天才. 后来人们慢慢地把数字和双手联系在一起. 每只手各拿一件东西，就是 2. 数到 3 时又被难住了，于是把第 3 件东西放在脚边，“难题”才得到解决.

就这样，在逐步摸索中，华夏民族的祖先从混混沌沌的世界中走出来了.

河南出土的殷墟甲骨上的数学，充分说明中国是一个对“数”这个概念异常重视的国度. 对数的重视，促使中国古代数学在世界上曾长期处于领先地位. 在《数术记遗》中，有“黄帝为法，数有十等”的记载. 在《尚书》中，可见“亿兆”“兆民”等词. 在甲骨文中，也有个位、百位、千位、万位的记录. 这说明，中国早在四五千年前即已创造并使用十进制.

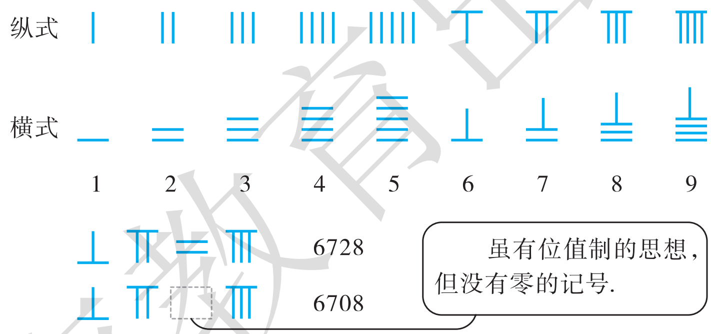
河南出土的殷墟甲骨上的数学

与此相比，直至 12 世纪，欧洲所使用的仍然为既不便于思也不便于运算的罗马记数法. 古巴比伦人和中美洲的玛雅人虽然也采用了位值制，但古巴比伦

人采用的是六十进制，玛雅人采用的是二十进制．古印度于公元 6 世纪开始采用的十进制，也是受中国文化影响而产生的．位值制数码为阿拉伯数码的前身．因此，约瑟说：“西方后来所习见的‘印度数字’的背后，位值制早已在中国存在两千年了．”“如果没有这种十进制，就几乎不可能出现我们现在这个统一化的世界．”马克思称中国的这种位值制是人类“最美妙的发明之一”．

算筹是中国古代的计算工具，用小竹棍、小木棍、骨、金属、象牙等材料制成，比我们日常所用的筷子稍短稍细一点．它的起源大约可上溯到公元前 5 世纪，后来写在纸上便成为算筹记数法．

算筹记数法已使用十进制，这种记数法对世界数学的发展具有划时代的意义．记数时与十进制相配合，采用从左到右、纵横相间的摆法．中国传统数学的最大特点是建立在筹算基础之上，这是中国传统数学对人类文明的特殊贡献，与西方及阿拉伯数学是明显不同的．



算筹记数法

2002 年在湖南龙山里耶出土的秦简上记录了一份完整的“九九乘法口诀表”，在《管子》《荀子》《战国策》等先秦典籍中，都提到过“九九”．

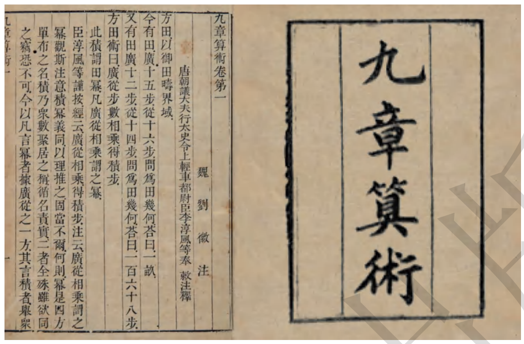
湖南龙山里耶出土的秦简

大约在西汉末期至隋朝中叶，中国迎来了数学理论的第一个高峰期．这个高峰的标志就是数学专著《九章算术》的诞生．

《九章算术》不是一人一时的著作，内容涵盖了当今初等数学中算术、代数和几何的大部分内容．自从流传到民间以后，《九章算术》便成为人们学习数学，传播数学知识的教材，是我国古代

最重要的数学教科书. 我国当代著名数学家吴文俊曾经这样评价此书：

> 《九章算术》是我国数学方面流传至今最早也是最重要的一部经典著作. 它承前启后，一方面总结了秦汉以前的数学成就，另一方面又成为汉代以来达两千年之久数学研究与创造的源泉……对数学发展在历史上的崇高地位，足可与古希腊欧几里得的《几何原本》东西辉映，各具特色.



《九章算术》书影

《九章算术》的写作体例以问题为中心，全书共 246 题，几乎全是应用题，这是中国古代科学非常重视实际运用的缘故. 这些问题按不同的用途分为九卷，故名《九章算术》.

书中的各类问题都有统一解法，但没有像西方《几何原本》那样一一证明. 经后人验证，书中绝大部分解法都是正确的. 各法以“术”名之，术文统御习题，这是本书体例的基本特点. 例如，方田术“广从步数相乘得积步”、勾股术“勾股各自乘，并而开方除之，即弦”，便分别统御各方田问题及勾股问题. 用现在的话来说，就是把可以用同一方法解决的问题归类在一起.

《九章算术》各章的内容如表 1.1－1 所示.

表 1.1－1

章　名	题　数	术　数	主要内容
方　田	38	21	主要是田亩面积的计算和分数的计算，是世界上最早对分数进行系统叙述的著作
粟　米	46	33	主要是粮食交易的计算方法，其中涉及许多比例问题
衰　分	20	22	主要内容为分配比例的算法
少　广	24	16	主要讲开平方和开立方的方法

续表

章　名	题　数	术　数	主要内容
商　功	28	24	主要是土石方和用工量等工程数学问题，以体积的计算为主
均　输	28	28	主要讲纳税和运输方面的计算问题，实际是比较复杂的比例算法
盈不足	20	27	用双设法解决数学问题
方　程	18	19	主要是联立一次方程的解法和正负数的加减法，负数在世界数学史上第一次出现
勾　股	24	19	勾股定理的应用
共　计	246	209	

《九章算术》中的数学成就是多方面的，许多成就在当时处于世界领先地位，例如：分数四则运算遥遥领先于世界各国，在欧洲直到 16—17 世纪才有人总结出类似于《九章算术》中的运算法则；求两数最大公约数的“更相减损术”与西方“欧几里得算法”各有特点，更相减损术更容易被理解和接受，减法操作起来更方便.

又如，被文艺复兴时期欧洲人誉为黄金法则的印度三率法实为《九章算术》中的今有术.

开平方、开立方法领先世界 1 400～1 500 年，在国外到 19 世纪才由中亚数学家阿尔卡西提出开方步骤，欧洲则更迟.

“盈不足术”的“双设法”属世界首创，中世纪被欧洲人视为算术问题的万能解法.

最先使用负数和建立有理数运算法则. 世界上其他地区最早在数学上使用负数的是一本写于 628 年的古印度数学文献. 它的出现是为了表示负资产或债务. 欧洲数学家直到 17 世纪才接受负数的概念.

解线性方程组的消元法在国外称为“高斯消元法”，而高斯消元法比《九章算术》晚了 1 800 年.

几何体求体积方面的成就处于世界领先地位.

《九章算术》是中国古代数学经典著作，后世数学家大都是从《九章算术》开始学习和研究数学的，许多人曾为它作注，进一步阐述和发展《九章算术》

的思想和方法.

如魏晋数学家刘徽，作为中国古典数学理论的奠基者之一，是中国最早明确主张用逻辑推理的方式来论证数学命题的人，就为《九章算术》撰写过注解.

刘徽

他在《九章算术注》中纠正了原书的若干错误，对题目涉及的算理与算法作了严谨的论述，其中所运用的数学知识实际上已经形成了一个独具特色、包括概念和判断并以数学证明为其联系纽带的理论体系，是千余年来中国数学家成长的启蒙教科书.

刘徽首创“割圆术”，那是一种用圆的内接或外切正多边形逼近圆以求圆面积和圆周长的方法，即从圆内接正六边形开始割圆，依次得正十二边形、正二十四边形，……割得越细，正多边形面积和圆面积相差越小，这也就是所谓的“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣”. 这一方法可视为中国古代极限理论的杰作.

刘徽利用割圆术科学地求出了圆周率 $\pi=3.14$，为中国圆周率计算在世界上长期领先奠定了基础.

1983—1984 年间，在湖北江陵张家山出土了一批西汉初年的竹简，共千余支. 经初步整理，其中有历谱、日书等多种古代珍贵的文献，还有一部数学著作，据写在竹简背面的字迹辨认，这部竹简算书叫《算数书》，它是中国现存最早的数学专著. 经研究，它和《九章算术》有许多相同之处，体例也是“问题集”形式，大多数题都由问、答、术部分组成，而且有些概念、术语也与《九章算术》的一样.

《算数书》竹简

任何一个国家科学技术的发达，都离不开清平开明的社会环境和雄厚的经济基础. 从隋朝中叶到元代末年，由于统治者总结了历代王朝倾覆的教训，采取一系列开明政策，经济得到了迅速发展，科学技术也得到了很大提高，而作为科学技术一部分的数学，也在此时进入了它的全盛时期.

在这一时期，数学教育的正规化和数学人才辈出，是最主要的特点.

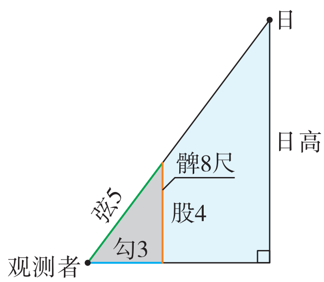
隋朝以前，学校里的教育并不重视数学，因此，没有数学专业一说. 而到了隋朝，这一局面被打破了，在相当于现今大学的学校里，开始设置算学专业. 到了唐朝，最高学府国子监，还添设了算学馆，其中博士、助教一应俱全，专门培养数学人才. 这时，数学教育很受重视，于是，唐朝数学家李淳风(602—670)等人奉朝廷的命令，经过研读、筛选，确定了国子监算学馆专用教科书. 这套教科书统称“算经十书”，共十部：《周髀算经》《九章算术》《孙子算经》《五曹算经》《夏侯阳算经》《张丘建算经》《海岛算经》《五经算术》《缀术》和《缉古算经》.

李淳风

《周髀算经》

“算经十书”中最具有代表性的是《周髀算经》和《九章算术》.《周髀算经》在“算经十书”中成书最早，其作者不可考，成书年代当不晚于西汉后期.《周髀算经》记载了如何用勾股定理来进行天文计算，还有比较复杂的分数计算. 当然不能说这两项算法直到西汉后期才为人们所掌握，它仅仅说明在已知的资料中，《周髀算经》是比较早的记载.

周髀是周朝测量日光影长的标杆，长 8 尺.《周髀算经》上记载，大约公元前 11 世纪，周公问大夫商高：“夫天不可阶而升，地不可得尺寸而度，请问数安从出？”商高答曰：“勾广三，股修四，径隅五.”意思是：没有台阶可以登天，没有尺子可以丈量大地，如何算出天高地广？商高回答说，按勾三股四弦五的比例计算.《周髀算经》中还记载了周公的后代荣方与陈



商高定理

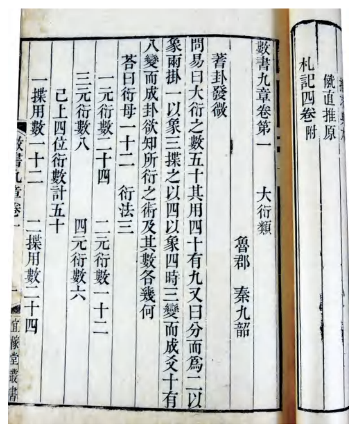
子关于“商高之旨”的对话，荣方、陈子是公元前 6 世纪到公元前 5 世纪的人. 陈子说：“若求邪(斜)至日者，以日下为勾，日高为股，勾、股各自乘，并而开方除之，得邪至日.”

这些记载说明中国约在公元前 11 世纪就已经发现了勾股定理，此定理亦称商高定理. 勾股定理不能从直观得出，它是人类第一次用逻辑推理方法获得的数学知识，为人类理性思维模式的建立立下了不朽的功勋.

李淳风注释《九章算术》，以刘徽注为底本，在注释“少广章开立圆术”时，引用祖暅提出的公式，介绍了球体积公式的理论基础，即“幂势既同，则积不容异”，这就是著名的“祖暅原理”. 祖暅原理主要应用于计算一些复杂几何体的体积. 在西方，该原理直到 17 世纪才由意大利数学家卡瓦列里发现，他于 1635 年出版的《连续不可分几何》中提出了等积原理，所以西方人把它称之为“卡瓦列里原理”. 其实，他的发现要比祖暅晚 1 100 多年.

宋元时期，约公元 900—1368 年，是我国古代数学发展的鼎盛时期. 这一时期出现了许多数学家，特别是人称“宋元四杰”的秦九韶、李冶、杨辉、朱世杰四人.

例如，秦九韶在 1247 年著成《数书九章》一书，在书中推广了“增乘开方法”，给出了任意高次方程的数值解法，其内容与英国数学家霍纳提出的霍纳算法相同，但比霍纳算法早了近 700 年. 秦九韶提出的“大衍求一术”给出了解一次同余式组问题的方法，是数学史上一项极为重要的成果，国外称为“中国剩余定理”或“孙子定理”. 美国科学史家萨顿称，“秦九韶是他那个民族、他那个时代乃至所有时代最伟大的数学家之一”.


數書九章卷第一　大衍類
魯郡　秦九韶
蓍卦發微
問易曰大衍之數五十其用四十有九又曰分而為二以
象兩掛一以象三揲之以四以象四時三變而成爻十有
八變而成卦欲知所衍之術及其數各幾何
荅曰衍母一十二　衍法三
一元衍數二十四　二元衍數一十二
三元衍數八　四元衍數六
己上四位衍數計五十
一揲用數一十二　二揲用數二十四

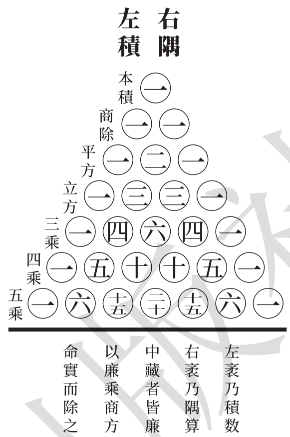
《数书九章》书影

李冶(1192—1279)，金元数学家. 据说元世祖忽必烈曾慕名多次召见他，许以高官厚禄但都被他拒绝，坚持在家乡潜心研究数学和教授数学. 著有《测圆海镜》十二卷(1248 年)，系统地介绍了“天元术”(列方程与解方程的方法)，给出了建立方程的表述符号，使我国古代数学的发展前进了一大步.

杨辉，南宋数学家. 由现存文献可推知，杨辉担任过南宋地方行政官员，

为政清廉，足迹遍及苏杭一带，他署名的数学书共五种二十一卷. 他在二阶等差级数求和、总结民间筹算乘除捷算法、纵横图知识以及数学教育方面有突出贡献.

杨辉



开方作法本源

杨辉著《详解九章算法》借鉴了贾宪的抽象和探索成果，选用《九章算术》中 80 道典型的题重新分类. 书中载有“开方作法本源”图，注明“贾宪用此术”. 这就是著名的“贾宪三角”，又称“杨辉三角”.《详解九章算法》同时录有贾宪进行高次幂开方的“增乘开方法”.

历史上独立发现杨辉三角的数学家不少，但都比中国要晚. 西方多称它为“帕斯卡三角”，据说是法国数学家帕斯卡在 13 岁时发现的. 帕斯卡搜集整理这个三角形的一些性质，并以此解决一些概率论上的问题，“贾宪三角”比“帕斯卡三角”大约早半个世纪.

朱世杰(13—14 世纪)，元代数学家. 以算学名家周游湖海二十余年，踵门而学者云集. 著有《算学启蒙》三卷(1299 年)，《四元玉鉴》三卷(1303 年). 前者包括了从乘除及其捷算法到增乘开方法、天元术各方面的内容；后者是中国古代水平最高的数学著作，对四元术即多元高次方程组的解法、高阶等差级数求和及招差术(有限差分)都有重大的贡献，这一成就超过西方数学约五百年.

“宋元四杰”所取得的光辉成就，把中国古代数学推向了时代的顶峰.

二　中国古代数学思想的特点

古代数学思想分为两大体系：一个是以欧几里得的《几何原本》为代表的

西方数学思想体系，这个体系以抽象化的内容、公理化的方法、封闭的演绎体系为特色，另一个则是以中国的《九章算术》为代表的东方数学思想体系，这个体系以算法化的内容、模式化的方法、开放的归纳体系为特色. 这两种不同的数学体系，在数学的发展史上都起过并将继续发挥着重要的作用.

中国古代数学对数学的发展作出了重大贡献. 数学史家钱宝琮指出：“5 世纪以后，大部分古印度数学是中国式的，9 世纪以后，大部分阿拉伯数学是希腊式的，到 10 世纪这两派数学合流，通过非洲北部与西班牙传到欧洲各地，于是欧洲人一方面恢复已经失去的希腊数学，一方面吸收有生力量——中国数学，近代数学才得以开始辩证的发展.”

数学家、数学史家吴文俊进一步指出，近代数学之所以能够发展到今天，主要是靠中国的数学，而非古希腊的数学，决定数学历史发展进程的主要是中国的数学而非古希腊的数学.

中国古代数学是一种从实际问题出发，经过分析提炼出一般的道理、原则与方法以最终达到解决一大类问题的体系. 由于中国的古代数学体系独特，自然需要一种独特的表达方式.

大体来说，中国数学的经典著作大都以依据不同方法或不同类型分成章节的问题集的形式出现. 每一个问题又被分成若干个条目.

条目一是“问”，提出有具体数值的问题.

条目二是“答”，给出这一问题的具体数值答案.

条目三是“术”，一般来说是解答与条目同种类型问题的普遍方法，实际上就相当于现代计算机科学中的“算法”，但有时也相当于一个公式或一个定理.

条目四是“注”，说明“术”依据的理由，实质上相当于一种证明.

宋元以来，有时加上条目五“草”，记述依据“术”得出答案的详细计算过程.

其中最需引起注意的是条目三“术”. 虽然条目一、二的问与答都以具体数值表达，有时甚至术文本身的问与答也是如此，但不难看出所有术文都具有普遍意义. 术文中即使带有具体数值，这些数值也并不起重要作用. 即便换作同类型的其他数值，术文依然行之有效. 条目四的“注”也是如此，论证的正确性完全不依赖于原设数值的特殊性. 例如《九章算术》第九章“勾股”的第一、第二、第三个问题，都是以勾三、股四、弦五为例，知其二而求第三者. 求法

名为勾股术，术文说：“勾股各自乘，并而开方除之，即弦”；“股自乘，以减弦自乘，其余，开方除之，即勾”；“勾自乘，以减弦自乘，其余，开方除之，即股”. 显然，这种方法与具体数值三、四、五无关. 勾股术的“注”也是如此. 因此，问、答甚或术文中的具体数值只起着一种举例说明的作用，同时也指出了“术”的来历与动机.

中国古代数学注重解决实际问题，讲究一般化的机械化的方法，而不是像欧氏几何做几何证明，常常需要灵机一动，添加巧妙的辅助线才能解决问题.

总的来说，中国古代数学发展的道路可简单地概括为：方法的模式化和内容的算法化.

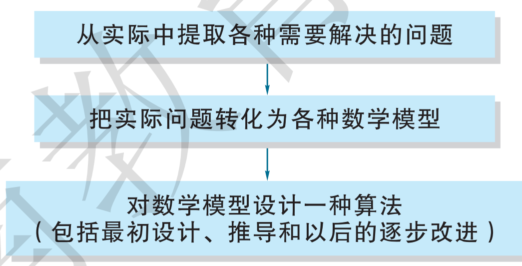
由《九章算术》所确立的中国古代数学的范式可以归结为三个方面：

（1）从实际问题出发，提出并解决问题的数学观；

（2）以计算为中心，形数结合的数学理论体系；

（3）“析理以辞，解体用图”，逻辑与直观相结合的数学推理方法.

它的思想大体表现如下：



这一模式化的方法表现出下面的一些特点：

● 开放的归纳体系

中国古代数学把当时社会实践中所需要解决的问题分门别类，提出若干数学模型，然后对每一种模型给出算法，所以是一种从个别到一般的归纳体系. 由于社会不断发展，社会实践必然会提出需要解决的新问题，因此，为了解决新问题，又必然提出新的模型，研究出新的算法，如刘徽在《九章算术注》中提出的极限思想方法，就是一种开放的体系.

● 寓理于算的表述方式

中国古代数学强调的目标是得到好的算法，因而算法的推理过程被大量省略，以致被人误认为中国古代数学全凭经验而不重推理. 这种看法是不符合实际

情况的. 中国古算经中的一些算法虽然没有讲算法是怎样得出的，但是那些算法那么准确、复杂、抽象，没有严密的推理过程是不可能凭经验就归纳出来的. 例如，前面谈到的《周髀算经》中关于勾股定理的证明，其推理之严密，思路之巧妙，与我们今天见到的关于勾股定理的数以百计的证明相比，仍然是最出色的. 又例如《九章算术》中关于约分的“更相减损”原理，即使在今天，也没有比这一约分术更好的、有本质区别的约分方法. 所有这些，没有相对(也只是相对)严谨的逻辑推理过程是不可能做到这一步的.

● 构造性与机械化的特色

以模式化为其发展道路的中国古代数学，在方法论方面的最大特色是构造性与机械化. 吴文俊院士在《从〈数书九章〉看中国传统数学构造性与机械化的特色》一文中指出：

就本文所拟讨论的《数书九章》来说，不妨把构造性与机械化的数学看作是可以直接施用之于现代计算机的数学. 我国古代数学，总的说来就是这样一种数学，构造性与机械化，是其两大特色，算筹算盘，即是当时施用没有存储设备的简易计算机.

练 习

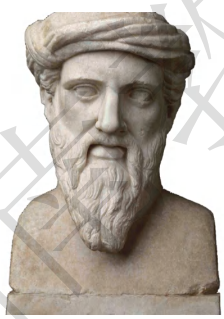
1. 查阅资料，谈谈《九章算术》对中国古代数学发展的作用和影响.

2. 以“中国古代数学发展道路的特点”为主题，查阅相关文献，谈谈你的认识.

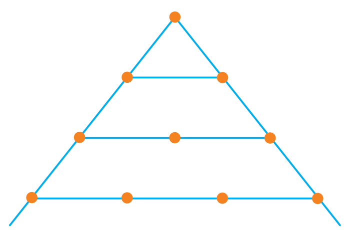
1.2 国外古典数学

一　毕达哥拉斯与无理数

众所周知，人类对数的认识经历了一个漫长的不断深化的过程，在这个过程中数的概念得以扩充与发展，以至到现在形成完整的数系. 无理数的发现在数学上具有重要意义，在西方数学史上曾导致了一场大风波，史称“第一次数学危机”. 早在公元前 6 世纪，古希腊数学界占统治地位的是毕达哥拉斯学派，其创始人是毕达哥拉斯. 西方文献一般将勾股定理称作毕达哥拉斯定理，因为他们认为这是毕达哥拉斯发现并证明的. 至于如何发现，又如何证明，众说纷纭. 流传较广的一种说法是，毕达哥拉斯在观察地砖时，基于等腰直角三角形这一特殊图形受到启发，并推广到一般的直角三角形.



毕达哥拉斯



三角形数

毕达哥拉斯学派坚信万物皆数. 这里所说的数仅指正整数，分数被看作两个整数的比. 他们认为数 1 生成所有的数，每个数都被赋予了特定的属性，譬如将 10 看作完美、和谐的标志. 毕达哥拉斯学派对整数进行了深入研究，尤其注意形与数的关系，并研究了大量的“多边形数”. 其中较简单的一种是三角形数. 从上至下，第 1 个三角形数是 1，第 2 个三角形数是 $1+2=3$，第 3 个三角形数是 $1+2+3=6$，…，第 n 个三角形数是 $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

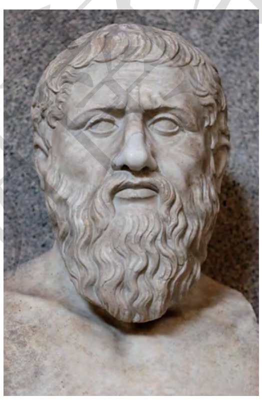
毕达哥拉斯学派后来却发现：并不是任意两条线段都是可通约的，存在着不可通约的线段. 例如，边长为 1 的正方形的对角线与边长，这两条线段就不是可通约的. 也就是说这两条线段长度的比既不是整数也不是分数，现在我们知道这个数是$\sqrt{2}$，它是一个无限不循环小数. 这是人类历史上发现的第一个无理数，它的发现是数学史上的重要里程碑，然而毕达哥拉斯学派对这个发现却没有任何欢欣鼓舞，他们陷入了极度的焦躁不安和郁郁寡欢中. 困扰他们的有以下两个方面的原因：

首先，对于全部依靠整数的毕氏哲学，这是一次致命的打击；

其次，因为毕达哥拉斯学派关于比例的定义假定任何两个同类量是可通约的，所以该学派比例理论中的所有命题都局限在可通约的量上，这样他们关于相似形的一般理论研究也失败了.

“逻辑上的矛盾”如此之大，以至于有一段时间，他们费了好大劲将此事在学派内部保密，不准外传. 由于毕达哥拉斯学派有严密的教规，将一切发现归功于领袖，并禁止公开学派的秘密，因此很难将毕达哥拉斯本人的工作和其他成员的贡献区分开来，有关无理数的发现情形也是如此.

一个传说是学派成员希帕索斯首先发现了不可通约的量，当时毕达哥拉斯学派正在海上泛舟集会，希帕索斯说出他的发现后，惊恐不已的其他成员将他抛进了大海.



希帕索斯

特奥多鲁斯

另一种说法是希帕索斯由于泄露了无理数的秘密而遭此厄运. 然而真理毕竟是不可战胜的，这个无理数在社会上渐渐流传开来. 后来，据柏拉图所说，昔兰尼的特奥多鲁斯(大约公元前 425 年)，证明了$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$，$\sqrt{7}$，$\sqrt{11}$，$\sqrt{13}$也

是无理数，其时“无理数”并非“无理”，而为“不可通约”之意．“无理”二字，在数学史上标志着毕达哥拉斯学派为维护“神权”，惧怕存在着不可通约的数的真理而迫害数学人才的无理．

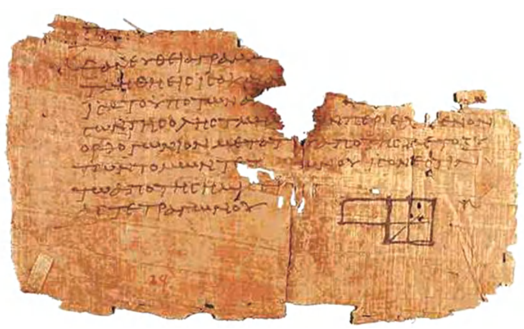
其实，这一悖论的提出不但对毕氏学有致命影响，对当时所有人的观念都有极大的冲击．当时，人们根据直觉完全相信：任何量都可被表示为某个有理数，在几何学上也是一样，直到二百年后，数学家欧多克斯建立了一套完整的比例论，这样才用几何方法把由于无理数引起的数学危机解决了．

从这一历史事件中我们可以认识到直觉经验并非绝对可靠，真理是不可抗拒的．另外，勇于提出问题往往会成为数学发展中的强大动力，能使数学在解决问题中向前发展．

二 欧几里得与演绎推理

数学为许多人所喜爱，不仅因为它重要，还因为它推理周密、判断准确、结构和谐，能对人进行严格的逻辑思维训练和智能培养，而习得这种演绎推理的思维和方法甚至比学到数学知识更重要．古希腊最负盛名、最有影响的数学家之一，被称为“几何学之父”的欧几里得整理编写的《几何原本》，集当时几何知识之大成并加以系统化，构成一个标准化的演绎体系，是用公理法建立起演绎体系的最早典范，把几何学提高到一个新水平，对数学的发展产生了深远的影响．

欧几里得



《几何原本》残片（约1世纪）

虽然《几何原本》中大部分结论是先前数学家的研究成果，非欧几里得原创，但原有的这些数学知识很零碎，就像木石砖瓦散落一地，甚是可惜，若有

人用它建成房子，这些材料就能发挥更大的作用.《几何原本》的意义就在于此.欧几里得借助于逻辑方法，把原有的这些数学知识组织起来，加以分类、比较，揭示彼此间的内在联系，建立了一个严密的数学系统. 这样的构造，让人们更容易去学习、理解和运用这些数学知识.

欧几里得本人的手稿早已失传，现在看到的各种版本都是根据后人的修订本、注释本、翻译本重新整理出来的. 据不完全统计，直至19世纪末，《几何原本》的印刷本用各种文字出了1 000多个版本. 目前最流行的是希思的英译本《欧几里得原本13卷》(*The thirteen books of Euclid's Elements*).

卷次	卷名	主要内容
第一卷	几何基础	确立了基本定义、公设和公理，还包括一些关于全等形、平行线和直线形的熟知的定理
第二卷	几何与代数	主要讨论的是毕达哥拉斯学派的几何代数学，包括大量代数定理的几何证明
第三卷	圆与角	阐述了圆、弦、割线、切线、圆心角、圆周角的一些定理
第四卷	圆与正多边形	讨论了已知圆的某些内接和外切正多边形的尺规作图问题
第五卷	比例	阐述了欧多克斯的比例理论
第六卷	相似	阐述了比例的属性，以及相似形的概念，包括了泰勒斯定理
第七卷	数论(一)	内容包括整除性、质数、最大公约数、最小公倍数等初等数论内容
第八卷	数论(二)	继续讨论初等数论，包括欧几里得辗转相除法、各种数的关系(如质数、合数、平方数、立方数等)
第九卷	数论(三)	涉及比例、几何级数，给出了许多重要的初等数论定理
第十卷	无理量	定义了无理量(即不可公约量)，并蕴含了极限思想(如穷举法). 本卷篇幅最大，也不易理解
第十一卷	立体几何	论述立体几何；将第一卷至第六卷的主要内容推广至立体，如平行、垂直以及立体图形的体积
第十二卷	立体的测量	重在讨论立体图形的体积，例如棱柱、棱锥、圆柱、圆锥以及球的体积
第十三卷	建正多面体	重点研究正多面体的作图. 包含了五种正多面体的作图，并证明了不存在更多的正多面体

我们现在中学所学的平面几何，又被称作欧氏几何，是欧几里得几何学的简称，绝大部分内容来自《几何原本》. 欧氏几何学不是数学知识的简单拼凑，而是把人们公认的一些事实列成定义和公理，以形式逻辑的方法，用这些定义和公理来研究各种几何图形的性质，从而建立了一套从公理、定义出发，论证命题得到定理的几何学论证方法，形成了一个严密的逻辑体系——几何学.

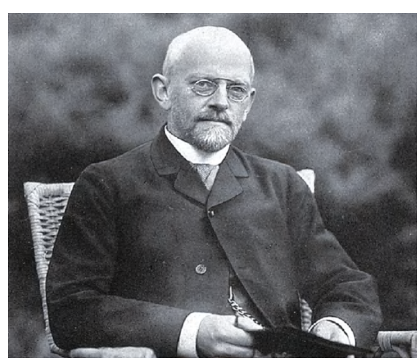
欧氏几何学的五条公理(公设)是：

- 任意两个点可以通过一条直线连接.
- 任意线段能无限延伸成一条直线.
- 给定任意线段，可以以其一个端点作为圆心，该线段作为半径作一个圆.
- 所有直角都全等.
- 若两条直线都与第三条直线相交，并且在同一边的内角之和小于两个直角，则这两条直线在这一边必定相交.

此外，欧几里得还提出了五个“一般概念”，也作为公理：

- 与同一事物相等的事物相等.
- 相等的事物加上相等的事物仍然相等.
- 相等的事物减去相等的事物仍然相等.
- 一个事物与另一事物重合，则它们相等.
- 整体大于局部.

欧氏几何学存在的一些缺陷，引起了后来数学家的强烈兴趣. 譬如由第五条公设的研究引发出了非欧几何. 欧氏几何学的公理也不完备，譬如构造等边三角形，是以线段为半径，分别以线段的两个端点为圆心作圆，将两个圆的交点作为三角形的第三个顶点. 欧氏几何学缺少连续性，不能保证这两圆必定相交. 于是不断有数学家提出公理系统的修订版本，其中最著名的是希尔伯特公理系统.



希尔伯特

德国数学家希尔伯特在总结前人工作的基础上提出了一个比较完善的几何学的公理系统. 这个公理系统就被叫作希尔伯特公理系统.

此外，希尔伯特还提出了建立一个公理系统的原则. 就是在一个几何公理系统中，采

取哪些公理，应该包含多少条公理，应当考虑如下三个方面的问题：

第一，相容性，就是在一个公理系统中，各条公理应该是不矛盾的，它们和谐共存于同一系统中.

第二，独立性，公理体系中的每条公理应该各自独立而互不依附，没有一条公理是可以从其他公理引申出来的.

第三，完备性，公理体系中所包含的公理应该足够证明本学科的任何新命题.

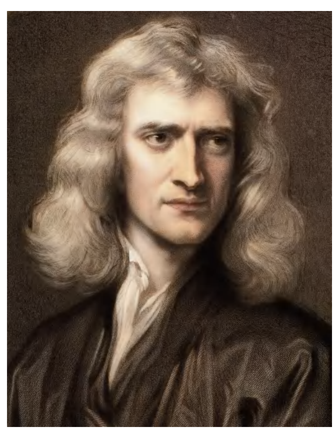
这种用公理系统来定义几何学中的基本对象和它们的关系的研究方法，成了数学中所谓的“公理化方法”，而把《几何原本》提出的体系叫作古典公理法.

公理化方法给几何学研究带来了一个新颖的观点. 在公理化理论中，由于基本对象不予定义，因此就不必探究对象的直观形象是什么，只专门研究抽象的对象之间的关系、性质. 从公理化的角度看，可以任意用点、线、面代表具体的事物，只要这些具体事物之间满足公理中的结合关系、顺序关系、合同关系等，这些关系满足公理系统中所规定的要求，这就构成了几何学.

因此，凡是符合公理系统的元素都能构成几何学，每一个几何学的直观形象不止一个，而是可能有无穷多个. 对于每一种直观形象都可以叫作几何学的一种解释，或者叫作某种几何学的一个模型. 平常我们所熟悉的几何图形，在研究几何学的时候，并不是必需的，它不过是一种直观形象而已.

自此，几何学研究的对象更加广泛了，几何学的含义比欧几里得时代更为抽象. 这些，都给近代几何学的发展带来了深远的影响.

两千多年来，《几何原本》一直是学习几何的主要教材，既是几何教科书，又被当成严密科学思维的典范，从来没有一本科学书像《几何原本》那样长期成为广大学子传诵的读物. 在漫长的岁月里，《几何原本》历尽沧桑而没有被淘汰，表明它有顽强的生命力，具有重大的历史和学术价值. 它对西方数学与哲学的思想都产生了重要的影响，典型案例有牛顿的《自然哲学的数学原理》、斯宾诺莎的《伦理学》和美国的《独立宣言》等.



牛顿

爱因斯坦曾对《几何原本》做出评价：“世界第一次目睹了一个逻辑体系的奇迹，这个逻辑体系如

此精密地一步一步推进，以致它的每一个命题都是绝对不容置疑的，我这里说的是欧几里得几何．推理的这种可赞叹的胜利，使人类理智获得了为取得以后的成就所必需的信心．”

三　笛卡儿与变量学说

建立解析几何的先驱是法国数学家笛卡儿和费马．费马大约在 1629 年写成《平面与立体轨迹引论》一书，开始用代数方法研究曲线的性质，将古希腊数学家阿波罗尼奥斯等人用综合几何方法研究得出的圆锥曲线的光辉成果，使用坐标法的代数语言，运用方程的形式加以表达与研究．但是费马的坐标法是不完善的，他的解析几何思想还不够成熟．

笛卡儿

费马

1637 年笛卡儿匿名发表了《科学中正确运用理性和追求真理的方法论》（简称《方法论》）．他的方法论是由下列四个法则构成的：

（1）只有明显地看出是真的东西，才能当作是真的，换句话说，作为科学研究应该是不带匆忙和不带结论性的偏见，而明晰和清楚才是第一位的；

（2）为了更好地解决研究中的问题，需要把困难分成几个小的难点；

（3）学习和研究通常是从最简单、最容易认识的事物入手，依次进行直到认识最复杂的事物和现象为止，甚至在彼此不相连的事物和现象中，也可能存在次序性；

（4）对实际发现或假设的方法总是做出足够详尽的目录，并审查推理的步

骤，使之确信无疑.

在《几何学》里，笛卡儿给出了字母符号的代数和解析几何原理，基本思想是：实数与直线上的点一一对应，而实数对与平面上的点一一对应；平面上的曲线可用含两个变量的代数方程来表示. 早些时候，费马曾应用过这种方法. 更早时期，在数学中占优势地位的是几何学，连代数概念和公式也通常用几何形式表示. 笛卡儿提出将形状表示为解析式，使代数获得更大的意义. 笛卡儿建立了坐标法，引进了变量和函数等概念，把几何和代数密切地联系起来，这是数学中的一个转折，也是变量数学获得发展的第一个决定性步骤.

解析几何的诞生对整个数学思想的发展产生了不可估量的影响，主要表现在以下几个方面：

（1）变量思想进入了数学，使数学思想方法发生了重大的变革. 变量思想已成为近代和现代数学中最重要、最基本的思想之一.

（2）提供了用代数计算解决几何问题的一种统一的思想方法，古希腊时代的许多数学问题都是个别解决的，而解析几何建立后就可以用代数方法作统一的处理.

（3）促进了数学思想的新发展. 解析几何创立后，许多数学概念得到进一步的抽象和概括. 例如“曲线”概念，古希腊人只局限于能用简单的工具画出来的图形，而解析几何则把“曲线”理解为满足方程 $F(x, y)=0$ 的点的轨迹（集合）.

（4）将代数与几何结合起来，揭示了数学内在的统一性.

正如恩格斯评价的“数学中的转折点是笛卡儿的变数，有了变数，运动进入了数学，有了变数，辩证法进入了数学”. 正是《几何学》这部著作的出现，才把变量引入数学，进而改变了数学的性质.

练 习

1. 查阅相关资料，简单谈谈《几何原本》的演绎推理思想对人类社会发展的贡献.

2. 查阅相关资料，介绍“变量说”在当今数学中的应用及发展.

1.3　数学家的故事

古往今来，数学百花齐放，千红万紫，令人目不暇接. 创造数学的数学家们的人生同样多姿多彩. 他们舍身为国的爱国之心、严谨求实的科学精神、精益求精的职业素养都值得我们学习.

一　人民的数学家——华罗庚


新华每日电讯
XINHUA DAILY TELEGRAPH

首页 电子报纸 草地周刊 调查观察 成风化人 新华观点 要闻 新华关注 新华深读 新华体育 新华财经 新华国际 新华融媒 精彩专题 医卫健康 看天下

首页 > 正文

2020
11/13

“人民的数学家”：华罗庚最优的“优选”

华老诞辰110周年之际，重温华罗庚精神的历史意义与时代价值

0.618，黄金分割率，一个经典的数学与美学结合的概念。从古希腊帕特农神庙到中国兵马俑，很多美学上的巅峰之作都验证了这一规律。

鲜为人知的是，在科学与工业领域也有一个“0.618”，即“0.618法”。这是一种典型的优选法，能够通过较少的试验次数找到最合理的工艺条件。实践证明，解决同样的问题，用“0.618法”做16次试验，就可达到常用的枚举法2500次试验的效果。

何为“优选”？大概没有人比数学家华罗庚理解得更透彻。他一生面临一次次重大选择，也在一次次的“优选”中定义自己的人生。


华罗庚

华罗庚(1910—1985)是中国数学史上自学成功的最富传奇色彩的伟大数学家之一. 他是中国解析数论、典型群、矩阵几何学、自守函数论与多复变函数论等方面研究的创始人与奠基者.

他一生为我们留下了 200 篇学术论文、10 部专著，其中 8 部专著被国外翻译出版，有些已列入 20 世纪经典著作之列.

新中国诞生的消息传到美国以后，已是美国伊

利诺伊大学终身教授的华罗庚，放弃优厚的薪俸、汽车、洋房、荣誉等，毫不犹豫地响应祖国的号召，启程回国，准备投入社会主义建设事业. 路过香港时，他写了一封长达万言的公开信，情真意切地呼吁爱国知识分子放弃国外优越的物质生活，投入祖国的怀抱. 他在信中说：

朋友们！“梁园虽好，非久居之乡”，归去来兮！

……

总之，为了抉择真理，我们应当回去；为了国家民族，我们应当回去；为了为人民服务，我们也应当回去；就是为了个人出路，也应当早日回去，建立我们工作的基础，为我们伟大祖国的建设和发展而奋斗！

回国后，他全身心投入到祖国的发展建设中.

例如，1964 年夏天，华罗庚突然收到西南铁路建设指挥部的一封邀请信，邀请他到大西南去参加成昆铁路的建设. 虽然李白的“蜀道难，难于上青天”清晰地浮现在他眼前，但他还是毫不犹豫地答应了.

当华罗庚风尘仆仆地出现在安顺的西南铁路建设指挥部时，他顾不上休息，就要工作人员立即带他到施工现场.

白天，他和同事们奔波在人迹罕至的深山老林，夜晚，拖着疲惫不堪的身子回到临时搭起的帐篷里，继续思考白天没有解决的问题，例如，如何统筹安排运输等. 因为铁路建设工程有很多工序，怎么安排能缩短工期，提前竣工，这属于数学中的运筹学问题.

华罗庚及其助手们设计的施工、运输方案，大大加快了施工进度，为堪称世界筑路史上奇迹的成昆铁路的早日通车作出了积极贡献.

华罗庚还根据中国实情与国际潮流，大力倡导数学知识在生产生活中的应用. 他为推广应用数学知识，身体力行，总是深入群众，跟他们交朋友，向他们学习，然后选择适于他们的数学方法，用群众能懂的语言，讲给群众听，为我国的经济建设作出了重大贡献.

后来，他始终恪守着自己的诺言，为祖国的繁荣昌盛奋斗不息，向人们展示了他“祖国中兴宏伟，死生甘愿同依”的爱国之心.

他之所以这样做，是因为他发自内心地热爱祖国和人民，希望为提高祖国的科技水平、人民的生活质量贡献力量. 因此，群众从内心喜欢他，把他看作自己人，给了他最宝贵的桂冠——“人民的数学家”.

矢志报国是华罗庚精神最深沉的底色，也是中国科学家的精神之魂．晚年，华罗庚不顾年迈体弱，为讲学、交流而在世界各地奔走，发出中国数学的学研之声，直到疾病突发，倒在三尺讲台．

二　激励青年勇攀科学高峰的典范——陈景润

陈景润：激励青年勇攀科学高峰的典范

2019年01月02日10:41　　来源：新华网

原标题：陈景润：激励青年勇攀科学高峰的典范

蜗居于6平方米小屋的数学家陈景润，借着一盏昏暗的煤油灯，伏在床板上，用一支笔，耗去了几麻袋的草稿纸，攻克世界著名数学难题“哥德巴赫猜想”中的“1＋2”……1978年，徐迟报告文学《哥德巴赫猜想》发表，数学家陈景润的故事传遍大江南北。

1933 年出生于福建省福州市仓山区的陈景润在中小学读书时，就对数学情有独钟，一有时间就演算习题，在学校里便成了个“小数学迷”．

陈景润

他学习起来，非常认真，分秒必争．有一次他去理发店理发，理发店里人很多，大家挨着次序理发．陈景润见轮到他还早，于是他赶忙走出理发店，找个安静的地方坐下来，然后从口袋里掏出个小本子，背起外文生字来．他背了一会，忽然想起上午读外文的时候，有个地方没看懂．于是他想先到图书馆去查一查，再回来理发．谁知道，他走了没多久，就轮到他理发了．而此时陈景润正在图书馆里看书，怎能听见理发员喊他理发呢？

有一次他的班主任沈元老师讲了一道有趣的古典数学题——“韩信点兵”，然后介绍了古代中国对数学的贡献，接着说：“我们不能停步，希望你们将来能创造出更大的奇迹，比如有个‘哥德巴赫猜想’，是数论中至今未解的难题，我们把它比作皇冠上的明珠，你们要把它摘下来！”

课后，沈老师问陈景润有什么想法，陈景润犹疑地说：“我能行吗?”沈老师说：“你既然能自己解出‘韩信点兵’，将来就能摘取那颗明珠. 天下无难事，只怕有心人啊!”

那一夜，陈景润失眠了，他立誓：长大无论成败如何，都要不惜一切地去努力!

后来，他借着一盏昏暗的煤油灯，伏在床板上，用一支笔，在耗去了几麻袋的草稿纸后，终于攻克了世界著名数学难题“哥德巴赫猜想”中的“1+2”. 但他的研究并没因此而停止，因为他认为“在科学的道路上我只是翻过了一个小山包，真正高峰还没有攀上去，还要继续努力.”

陈景润的先进事迹和奋斗精神，将激励着一代代青年发愤图强，勇攀科学高峰. 在庆祝改革开放 40 周年大会上，他被授予“改革先锋”荣誉称号.

三 18 世纪最杰出的数学家——欧拉

欧拉(Euler，1707—1783）生于瑞士巴塞尔，其父爱好数学，是欧拉的数学启蒙教师. 欧拉 13 岁入巴塞尔大学，师从大数学家约翰·伯努利和雅各布·伯努利兄弟.

他 17 岁在巴塞尔大学获得硕士学位，23 岁成为物理学教授，26 岁就接任著名数学家丹尼尔·伯努利的职务，成为数学所所长. 两年后，他有一只眼睛失明，但仍以极大的热情继续工作，写出了许多杰出的论文.

欧拉

欧拉是能在任何地方、任何条件下进行工作的几个伟大数学家之一. 他居住俄国期间，除了做其他工作之外，比如管理政府的地理部，他仍然在不断地进行数学研究，并且不断产生新的数学成果.

后来，欧拉另一只眼睛视力开始变差(因白内障)，不久他就完全成了盲人. 在他视力逐渐丧失的过程中，拉格朗日、达朗贝尔等数学家在来往的书信中都表示震惊和同情. 但欧拉本人面对失明即将到来却很镇定，他并没有让自己屈服于寂静和黑暗，而是在最后一点光感消失之前，使自己习惯了用粉笔在大石

板上写公式，然后让孩子们当抄写员，他再口授公式的解释. 虽然他的视力这样糟糕了，但是他的数学新作不仅没有减少，反而增多了.

祖冲之

除前述三位数学家外，还有许多数学家值得我们学习. 例如，日复一日地通过摆放数以万计的算筹不停地算、记的我国数学家祖冲之. 正是这种锲而不舍的精神，使他成了世界上第一个把圆周率的准确数值计算到小数点以后七位数字(3.141 592 6 和 3.141 592 7 之间)的数学家.

黎曼

又如不顾生活清贫、营养不良，长期超负荷地忘我工作的数学家黎曼，在众多的数学领域里做了许多奠基性和创造性的研究工作：从几何方向开创了复变函数论；为现代意义的解析数论奠基；建立了黎曼几何，是组合拓扑学的开拓者. 因而黎曼被认为是数学史上最具独创性精神的数学家之一.

练习

1. 有人认为，要当一个数学家，必须不断使自己完善起来，必须酷爱数学胜过一切，必须在数学上勤奋努力和锲而不舍，并且永不退缩. 你认同这一观点吗? 查找数学家的相关故事，证明你的观点.

2. 查阅相关数学家的故事，以读书笔记的形式，摘抄能体现数学家严谨求实的科学精神和精益求精的职业素养的语句.

1.4 数学美学

什么是美，似乎难以说清.

我国古代哲学家庄子认为没有公认的美的绝对标准，而是“各美其美”. 戏剧家莎士比亚对此持类似观点：“一千个美学家，有一千个对美是什么的回答.”我国古代从文字构造、文艺作品、绘画雕塑乃至工程建筑，凡是能引起人们愉悦、快感、惬意、欢乐感受的都是美.《说文解字》中以“羊大为美”，孔子听韶乐“三月不知肉味”，则是对美的欣赏上了一个新的层次.

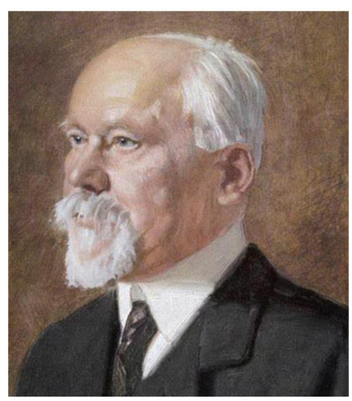
对于数学美，同样有各种各样的说法.

古希腊数学家普洛克拉斯说过：“哪里有数，哪里就有美.”数学家庞加莱认为：“数学家不单单因为数学有用而研究数学；他研究数学还因为喜欢，而喜欢的原因则是因为数学是美丽的!”数学家克莱因对数学美做过这样的描述：“音乐能激发或抚慰情怀，绘画使人赏心悦目，诗歌能动人心弦，哲学使人获得智慧，科技可以改善物质生活，但数学却能提供以上一切.”数学家哈代认为：“现在也许难以找到一个受过教育的人，对数学美的魅力全然无动于衷，数学的美虽然难以定义，但它的确是一种真实的美，和任何其他的美一样. 比如对什么是一首美丽的诗，我们虽然不很清楚，但这并不妨碍我们去鉴赏它.”

克莱因

那么数学之美表现在哪些方面呢?

一 数学的和谐美



庞加莱

和谐是数学美的特征之一，数学家庞加莱说：

“那是各部分之间的和谐、对称，恰到好处的平衡，一句话，那就是秩序井然，统一协调.”

1. 统一性

和谐性的特征之一是部分与部分、部分与整体之间的协调一致，也即是多样性的统一.

世界上存在多种语言，但数学的语言，譬如

$$2+2=4，\sin^2x+\cos^2x=1，a^2+b^2=c^2，(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

等，却都是统一的.

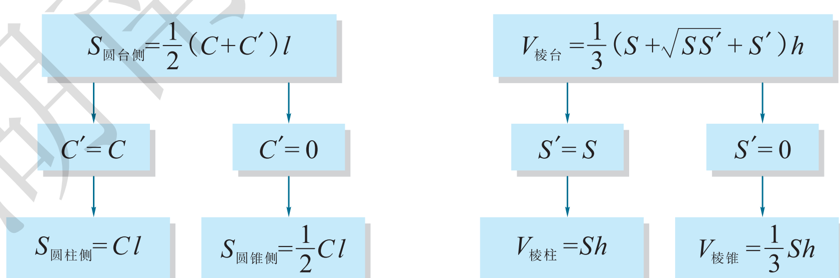
公理化方法的形成，就是追求整体与部分的统一性的结果.

欧几里得以前的几何学支离破碎，杂乱无章，欧几里得创建的公理化方法把它们统一起来，使之纳入一个严密的逻辑体系之中，组成一个有机的整体. 一些大科学家称赞公理化方法为“雄伟的建筑”“壮丽的结构”“巍峨的阶梯”.

在 17 世纪以前，代数与几何是相互分离、彼此无关的. 笛卡儿的解析几何把几何中的曲线与代数中的方程对应起来，使数学中相互分离的形、数两大要素得到了统一.

德国数学家克莱因把各种几何学(欧氏几何、仿射几何、射影几何、拓扑学等)统一为研究某种变换群下的不变量科学.

在中学数学中，统一性也是随处可见的. 例如，立体几何中的侧面积和体积计算公式：



2. 对称性

和谐性的第二个特征是对称性. 对称性符合人们的审美要求，蝴蝶之所以美丽，因为它的体形结构和花纹都是对称的. 数学中的许多数学公式、图像都具有对称之美.

例如，数字 8 以及像“1357531”“5678765”这些数，对称而美观.

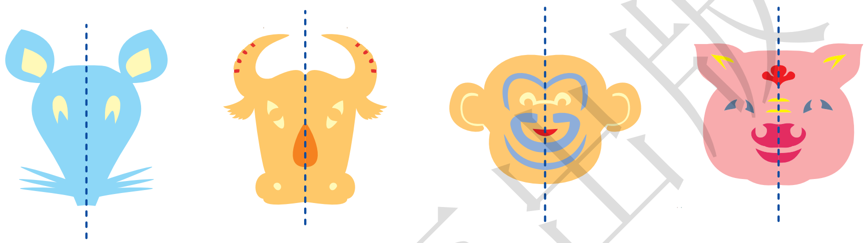
在中学数学里，还有许多定理具有对称形式．如，正弦定理：

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

又如，韦达定理：

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \alpha\cdot\beta=\frac{c}{a}.$$

图形的对称往往以其直观的形式呈现在人们的眼前．对称性表现为点的对称、线的对称，例如等腰三角形、圆等平面图形，长方体、圆台等立体图形．生活中人们常用对称来制作一些图形，以使其美观，例如生肖剪纸．



缤纷的对称图形，使人被对称的魅力感动，在人的头脑中留下美的印象，给人以美的享受．对称也常被人们引入建筑设计之中．

徽派园林

颐和园拱桥

重庆朝天门大桥

空间位置的对称设计，是对大自然的有机模仿，在这种模仿中人类得到感官的愉悦和情操的陶冶，进而产生有益于身心健康的审美感受.

二　数学的简洁美

把复杂的东西用简洁的形式表示出来是一种美. 诗歌之所以动人，就在于它能以最简练的语言表达最热烈的感情、最复杂的思想. 漫画之所以让人喜爱，就在于它用寥寥数笔就勾勒出事物的形象. 数学更是力求用最简单的形式表示出复杂的道理，这是一种简洁美.

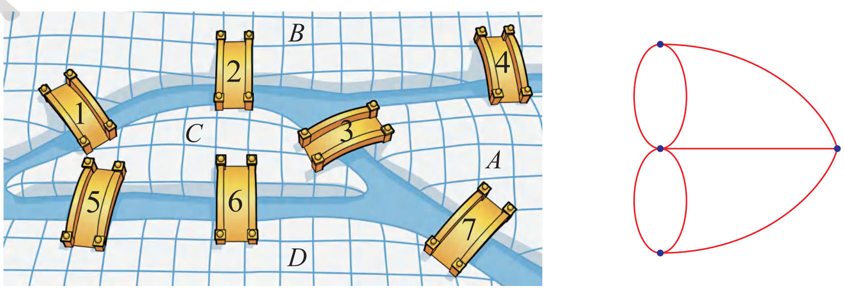
1. 内容的简洁性

对一个公理系统来说，它规定的公理个数应尽可能地少.《几何原本》中的全部结论，都是从少数几条公理通过演绎得来的，这就是一种典型的简洁美，难怪牛顿曾赞叹道：“几何学之所以堪称辉煌，就在于它只从很少的几条公理出发，而最终却得到了如此之多的结果.”

2. 方法的简洁性

匈牙利裔美籍数学家冯·诺依曼指出：“人们要求一个数学定理或数学理论，不仅能用简单和优美的方法对大量的先天彼此毫无联系的个别情况加以描述，并进行分类，而且也期望它在‘建筑’结构上的优美. 在描述这个问题时平易轻松，然后在解决它和探讨它的尝试中遇到巨大的困难，然后再出现某种非常惊人的转折，使探讨或部分探讨一下子容易起来. 同样，如果推理是冗长或复杂的话，那么就应该包含某种简单的一般原理，用以‘说明’各种复杂和曲折的情况.”

历史上著名的“哥尼斯堡七桥问题”就是一个很好的例子. 原来人们把这个问题看得很复杂，但是欧拉却把它简化为“一笔画”问题，只要数一数图中奇偶点的个数就解决了.



哥尼斯堡七桥问题

3. 形式的简洁性

数学家总是不断地创造一些合理的符号，使数学的表达形式更为简洁．古希腊人早已经知道的黄金分割，在绘画和建设中得到广泛应用，令人赏心悦目，得到美的享受．同样有趣的是：如果令黄金分割时整条线段的长度为 1，则分割出的较短的一段的长度 r 可用连分数表示为：

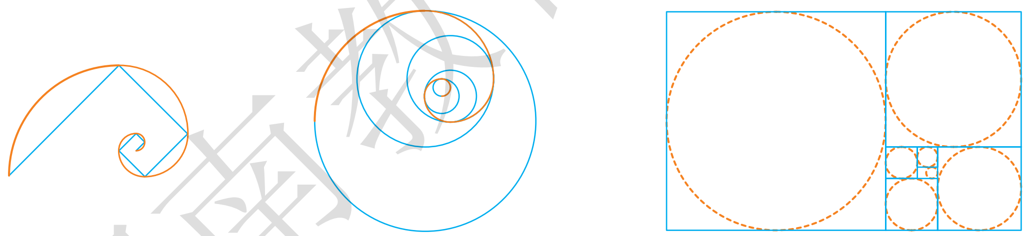
$$r=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}$$

这多么出人意料，多么简洁，多么富于美感．

三 数学美欣赏

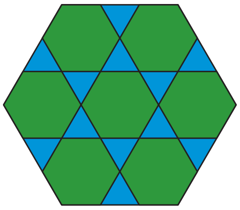
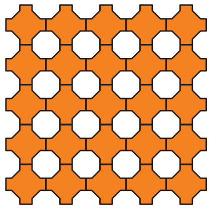
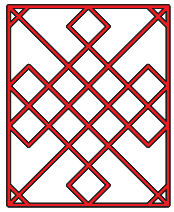
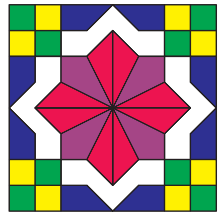
数学美，可以从不同的角度去欣赏．需要强调的是，数学每一侧面的美都不是孤立的，而是相辅相成、密不可分的．

例如，利用黄金分割比可以画出如下美丽图案．



数学图案可以沟通不同地域、不同人们的共同美感，于是很多标志都采用数学图形，例如我国的环保标志和中国航天标志、奥运会的五环标志等．

又如，将基本图形进行平移、旋转、放缩、对称等几何变换可以得到不同的美丽图形．

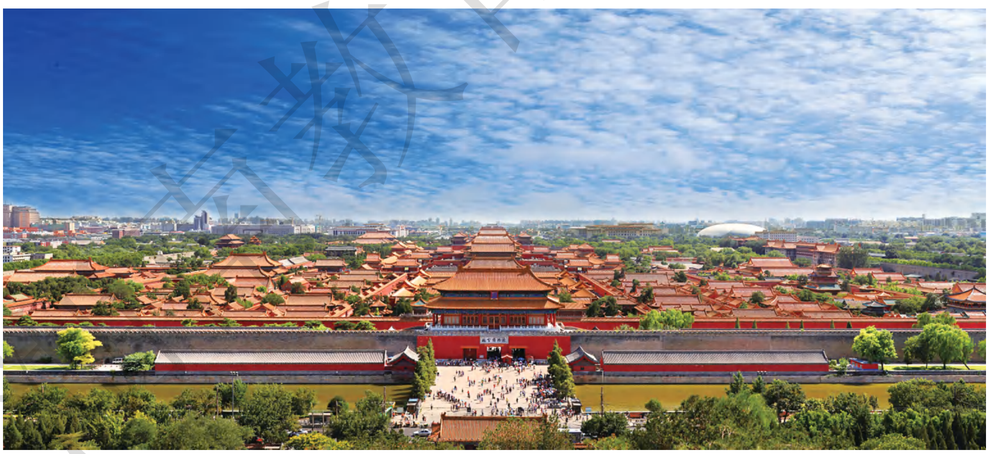





在欣赏数学美的同时，我们也可尝试去探索、发现数学美，从中获得成功的喜悦和美的享受，真正感受数学的魅力.

练　习

1. 分别举出一个体现数学统一美、对称美、简洁美的例子.

2. 北京故宫，是中国古代宫廷建筑之精华，是世界上现存规模最大、保存最为完整的木质结构古建筑之一，被誉为世界五大宫(北京故宫、法国凡尔赛宫、英国白金汉宫、美国白宫、俄罗斯克里姆林宫)之首. 查找其相关资料，介绍其对称美.



北京故宫

3. 以数学美学为主题，查找相关资料体会数学中蕴含的美学思想.

SUMMARY

本章小结

一、本章知识结构

- 数学文化
  - 中国古代数学
  - 国外古典数学
  - 数学家的故事
  - 数学美学

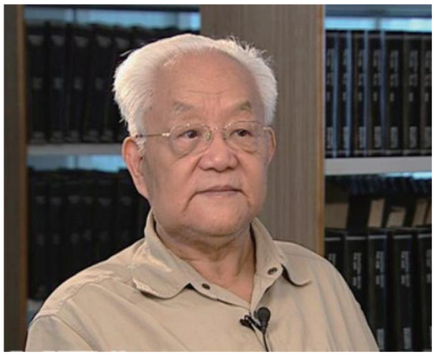
二、本章知识要点

- 中国古代数学发展简述
- 中国古代数学思想的特点
- 毕达哥拉斯与无理数
- 欧几里得与演绎推理
- 笛卡儿与变量学说
- 人民的数学家——华罗庚
- 激励青年勇攀科学高峰的典范——陈景润
- 18 世纪最杰出的数学家——欧拉
- 数学的和谐美
- 数学的简洁美
- 数学美欣赏

复习题一

1. 中国古代数学哪一项成果让你印象最深？谈谈你的看法.

2. 查阅资料，了解数学家吴文俊的一些事迹，写一篇他的小传记.



吴文俊

康托尔

3. 19 世纪，德国数学家康托尔提出了令人难以置信的“超穷数”理论，得到了诸如“全体正整数与全体正偶数一一对应”“单位区间(0，1)中的点与单位正方形内的点一一对应”“一条直线上的点与 n 维空间上的点一一对应”等一系列结论，遭到了他的老师克罗内克的无情攻击和打压，庞加莱也公开指责说无穷集合是“病态与邪气的坟墓”，“下一代人将视集合论为一种疾病”，但是康托尔并未因此而退缩，在贫病交加的情况下仍然继续集合论的研究，建立了比较完整的理论体系，奠定了他作为集合论的创始人的地位.

在数学史上，这样的例子不胜枚举，每一次数学危机的化解，每一种新的数学理论的提出，每一个数学分支的诞生无不历经波折，而数学家们都有一颗勇敢的心，他们敢于怀疑“公认的”真理，敢于向传统观点不断发起挑战，这也使得他们成为推动数学发展的关键力量. 结合近代数学家的故事，谈谈你对数学家要敢于创新、敢于挑战的认识.

4. 自己动手，用正多边形拼合设计一个美丽图案.

第2章

数学建模

本章结构

学以致用

把现实世界中的实际问题加以提炼，抽象为数学模型，求出模型的解，验证模型的合理性，并用该数学模型所提供的解来解释现实问题，这就是数学建模过程.

本章主要介绍如何运用分段函数模型、二次函数模型、等差数列模型、等比数列模型和指数函数模型，解决现实世界中的简单实际问题.

2.1　数学建模

16 世纪，意大利物理学家伽利略通过对自由落体运动的研究，得出自由落体运动的路程模型. 自由落体运动方程是自然科学史上一项伟大的成果，该运动方程的得到是数学建模方法的经典之作.

下面，我们以自由落体运动方程为例，说明数学建模的过程.

一　问题描述

位于高处的物体，如果失去支撑就会下落，这是每个人都知道的自然现象. 春秋战国时期的墨子以及古希腊哲人亚里士多德就对该现象产生的原因进行过论述，不过古代的人们并不清楚这种现象是力作用的结果，因而普遍认为，导致物体下落的原因是物体的质量.

墨子

二　模型假设

伽利略通过反复观察发现：物体下落的速度随下落的时间而均匀增加，且速度与时间成正比例关系，即 $v \propto t$ [1]. 他注意到，在有介质的空间，物体下落速度必然与物体的形状以及物体的质量有关. 因此，他在理想条件下构建物体下落的模型，假定在物体下落的过程中空气阻力可以忽略不计. 在此假设的前提下，物体下落的速度与物体的形状以及物体的质量无关.

> 不受任何阻力，只在重力作用下从静止开始降落的物体为自由落体.

〔1〕符号“∝”表示成正比例.

三 模型建立

基于上述假设，如果物体自由下落的时间相同，物体自由下落的高度 h 只与运动时间 t 以及加速度 g[1] 有关，此时，h 是关于 t 与 g 的函数

$$h=f(t,\ g).$$

四 模型求解

根据伽利略关于速度与时间成正比例关系，即 $v\propto t$ 的假设，若物体下落 1 s 时的速度为 g m/s，则下落 2 s 时的速度为 $2g$ m/s，…，下落 t s 时的速度为 tg m/s. 伽利略当年利用物体下落 t s 路程的平均速度 $v=\dfrac{gt}{2}$ 乘以时间(根据路程=速度×时间)，得到自由落体运动的路程模型为

$$h=vt=\frac{1}{2}gt^2.$$

五 模型分析与检验

伽利略做了一系列的实验来检验模型的正确性，他的实验是在斜面上进行的. 伽利略通过大量的实验验证了这样一个事实：在同样的高度，同样的重物分别沿垂面和斜面从零开始下落，下落的时间之比等于垂直长度和斜面长度之比. 这个事实说明：可以利用斜面进行自由落体的实验. 于是伽利略用一块足够长的木板，在中间凿出一条光滑沟槽，让光滑的黄铜球沿着沟槽滚下，如图 2.1-1.

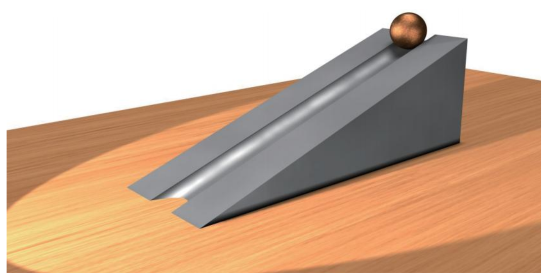


图 2.1-1

他实验了不同的倾斜角度，又实验了不同长度的木板，先后一百多次的实验结果均显示，黄铜球下落的距离与下落时间的平方之比近似为一个正常数，

[1] 此处的 g 实际上是重力加速度.

进而验证了模型的正确性.

六　推广应用

伽利略用斜面实验验证了模型的正确性后，将斜面实验的结果推广到与水平面垂直的情况：随着斜面倾斜角度逐渐增加到 90°，小球的加速度不断变大，小球逐步过渡到自由落体运动，如图 2.1－2. 至此，他成功地验证了原先的猜想，得到了自由落体运动的规律.

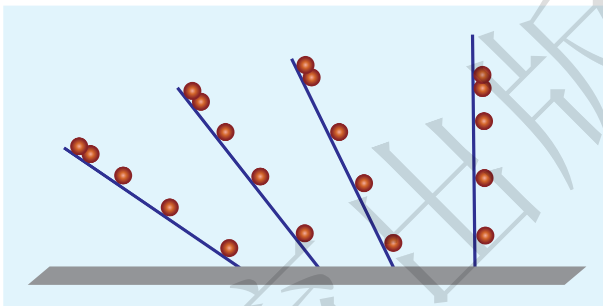


图 2.1－2　小球沿斜坡滚下的运动示意

根据自由落体运动方程的建立过程，我们可以用图 2.1－3 所示的框图来表示数学建模的基本过程.

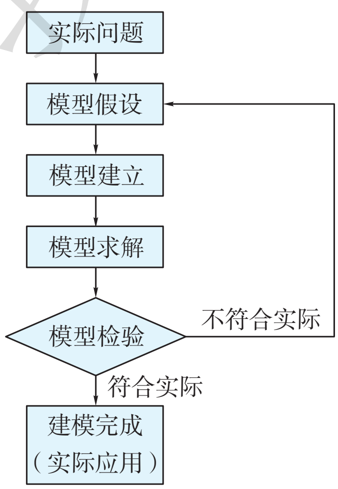


图 2.1－3

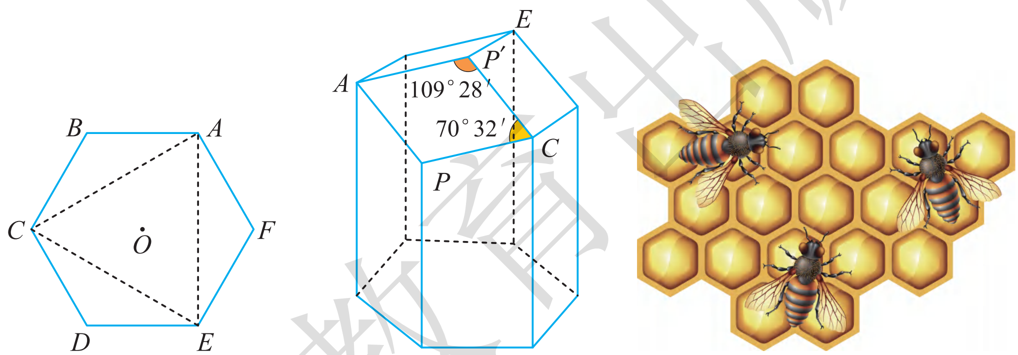
数学建模作为连接数学与实际问题的桥梁，建立既符合实际，又能够利用现有方法求解的合理数学模型就成为解决实际问题的关键步骤之一. 需要说明

的是，数学模型与我们通常所说的数学问题是不同的，一般的数学问题要求叙述严谨、明确、答案唯一，而根据实际问题建立的数学模型及由此得到的答案通常不具有唯一性，判断数学模型的优劣以是否符合实际为标准.

练 习

1. 以初中一次函数知识为例，谈谈你对建模思想的认识.

2. 查找并阅读关于蜂房结构的资料，尝试拟出用数学模型解释蜂房正面采用正六边形面，底端是封闭的六角棱锥体的底（由三个相同的菱形组成，菱形的锐角为 $70°32'$，钝角为 $109°28'$）的原因的基本步骤.



（第 2 题）

2.2　分段函数模型

想一想

为了建设资源节约型社会，引导广大市民树立节能减排意识，某地实行阶梯电价．具体收费标准如下表所示：

类别	分档电量/[kW・h/(户・月)]	电价标准/[元/(kW・h)]
一档	1～240(含 240)	0.49
二档	240～400(含 400)	0.54
三档	400 以上	0.78

如果某用户 7 月份的用电量为 x kW・h，该月所缴的电费为 y 元，那么

当 $1\leqslant x\leqslant 240$ 时，$y=0.49x$．

当 $240<x\leqslant 400$ 时，$y=0.49\times 240+0.54(x-240)=0.54x-12$．

当 $x>400$ 时，
$$\begin{aligned} y&=0.49\times 240+0.54\times(400-240)+0.78(x-400)\\ &=0.78x-108. \end{aligned}$$

所以，该用户 7 月份所缴的电费 y 与用电量 x 间的函数关系式为

$$y=\begin{cases} 0.49x\,(1\leqslant x\leqslant 240), \\ 0.54x-12\,(240<x\leqslant 400), \\ 0.78x-108\,(x>400). \end{cases} \qquad (*)$$

$(*)$式与我们常见的函数解析式有什么不同？

探索

我们知道，如果自变量在定义域的不同取值范围内时，函数由不同的解析式给出，这种函数就是分段函数．上面的例子就是一个分段函数．

由$(*)$式可知，该用户的用电量所在范围不同，其所缴电费计算方式完全不同．现已知该用户 7 月所缴的电费为 177 元，如何推算其用电量呢？

由（＊）式可知，当 7 月用电量在一档（$1\leqslant x\leqslant 240$）时，该月电费最多缴 117.6 元；当 7 月用电量在二档（$240<x\leqslant 400$）时，该月电费最多缴 204 元.

由于用户 7 月所缴的电费为 177 元，比较可知 $117.6<177<204$，所以该用户用电量在二档（$240<x\leqslant 400$），于是 $0.54x-12=177$，解得 $x=350$，所以该用户 7 月用电量为 350 kW·h.

例 1 某地出租车收费标准为起步价 8 元（不超过 3 km），超过的部分 1.7 元/km，超过 10 km 要加收 50%的返程费. 某同学计划乘出租车从家到图书馆去借书.

（1）求该同学需要支付的出租车车费与家到图书馆的距离间的关系式；

（2）若该同学支付了 50 元，求他家到图书馆的距离（结果精确到 1 km）.

解 （1）设该同学需要支付的出租车车费为 y 元，他家到图书馆的距离为 x km. 由题意可得

$$y=\begin{cases}8\,(0<x\leqslant 3),\\ 8+1.7(x-3)\,(3<x\leqslant 10),\\ 1.7x+2.9+0.5(1.7x+2.9)\,(x>10)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}8\,(0<x\leqslant 3),\\ 1.7x+2.9\,(3<x\leqslant 10),\\ 2.55x+4.35\,(x>10).\end{cases}$$

（2）由（1）分析可知，当从他家到图书馆的距离不超过 3 km 时，出租车车费为 8 元；超过 3 km 不超过 10 km 时，出租车车费最多为 19.9 元.

因为该同学支付的出租车车费 50 元超过了 19.9 元，所以 $x>10$，于是 $2.55x+4.35=50$，

解得 $x\approx 18$.

所以他家到图书馆的距离是 18 km.

说一说

在实际生活中，利用分段函数进行相关计算时，怎样进行选择？

例 2 依法纳税是每个公民应尽的义务，个人所得应依照《中华人民共和国个人所得税法》向国家缴纳个人所得税（简称个税）．2019 年 1 月 1 日起，个税税额根据应纳税所得额、税率和速算扣除数确定，计算公式为

$$\text{个税税额}=\text{应纳税所得额}\times\text{税率}-\text{速算扣除数}. \tag{1}$$

应纳税所得额的计算公式为

$$\begin{aligned}\text{应纳税所得额}=&\text{综合所得收入额}^{[1]}-\text{基本减除费用}^{[2]}-\text{专项扣除}^{[3]}-\\&\text{专项附加扣除}^{[4]}-\text{其他扣除}^{[5]}.\end{aligned} \tag{2}$$

税率与速算扣除数见下表．

级数	全年应纳税所得额所在区间	税率/%	速算扣除数
1	$[0, 36\,000]$	3	0
2	$(36\,000, 144\,000]$	10	2 520
3	$(144\,000, 300\,000]$	20	16 920
4	$(300\,000, 420\,000]$	25	31 920
5	$(420\,000, 660\,000]$	30	52 920
6	$(660\,000, 960\,000]$	35	85 920
7	$(960\,000, +\infty)$	45	181 920

（1）设全年应纳税所得额为 t 元，应缴纳个税税额为 y 元，求 $y=f(t)$；

（2）小王全年综合所得收入额为 189 600 元，假定缴纳的基本养老保险、基本医疗保险、失业保险等社会保险费和住房公积金占综合所得收入额的比例分别是 8%，2%，1%，9%，专项附加扣除是 52 800 元，依法确定其他扣除是 4 560 元，那么他全年应缴纳多少个税？

分析 根据个税产生办法，可按下列步骤计算应缴纳个税税额：

第一步，根据(2)式计算出应纳税所得额 t；

---

[1] “综合所得”包括工资、薪金，劳务报酬，稿酬，特许权使用费．

[2] “基本减除费用”（免征额）为每年 60 000 元．

[3] “专项扣除”包括居民个人按照国家规定的范围和标准缴纳的基本养老保险、基本医疗保险、失业保险等社会保险费和住房公积金等．

[4] “专项附加扣除”包括子女教育、继续教育、大病医疗、住房贷款利息或者住房租金、赡养老人等支出．

[5] “其他扣除”是指除上述基本减除费用、专项扣除、专项附加扣除之外，由国务院决定以扣除方式减少纳税的优惠政策规定的费用．

第二步，由 t 的值并根据上表得出相应的税率与速算扣除数；

第三步，根据(1)式计算出个税税额 y 的值.

由于不同应纳税所得额对应不同的税率与速算扣除数，所以 y 是 t 的分段函数.

解 （1）根据上表，可得函数 $y=f(t)$的解析式为

$$y=\begin{cases}0.03t, & 0\leqslant t\leqslant 36\ 000,\\ 0.1t-2\ 520, & 36\ 000<t\leqslant 144\ 000,\\ 0.2t-16\ 920, & 144\ 000<t\leqslant 300\ 000,\\ 0.25t-31\ 920, & 300\ 000<t\leqslant 420\ 000,\\ 0.3t-52\ 920, & 420\ 000<t\leqslant 660\ 000,\\ 0.35t-85\ 920, & 660\ 000<t\leqslant 960\ 000,\\ 0.45t-181\ 920, & t>960\ 000.\end{cases} \quad (3)$$

（2）根据(2)式，小王全年应纳税所得额为

$$\begin{aligned}t&=189\ 600-60\ 000-189\ 600\times(8\%+2\%+1\%+9\%)-52\ 800-4\ 560\\&=0.8\times189\ 600-117\ 360\\&=34\ 320.\end{aligned}$$

将 t 的值代入(3)式，得 $y=0.03\times34\ 320=1\ 029.6$.

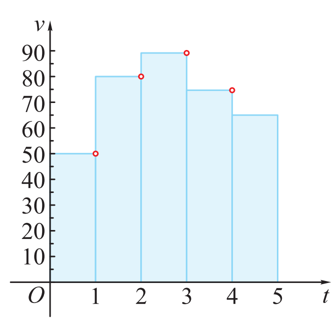
所以，小王应缴纳的个税税额为 1 029.6 元.

练习

1. 某通信公司推出一款新型电话卡，资费标准为：月租费 40 元，包打国内通话 500 min，超过的部分每分钟收取通话费 0.3 元. 请写出通话费用 y(元)与通话时间 x(min)间的关系式.

2. 一辆汽车在某段路程中行驶的平均速率 v(单位：km/h)与时间 t(单位：h)的关系如图所示.

（1）求图中阴影部分的面积，并说明所求面积的实际含义；



（第 2 题）

（2）假设这辆汽车的里程表在汽车行驶这段路程前的读数为 2 004 km，试建立行驶这段路程时汽车里程表读数 s(单位：km)与时间 t 的函数解析式，并画出相应的图像.

3. 某商场搞五一促销活动，如果顾客一次性购买商品超过 500 元，超过部分打八折.

（1）请求出顾客实际付款额 y(元)与购买商品价格 x(元)间的关系式；

（2）小王一次购买了 800 元的商品，他应付多少元?

4. 某航空公司规定，搭乘国内航班的每位旅客的免费行李托运额为：头等舱旅客 40 kg，公务舱旅客 30 kg，经济舱旅客 20 kg. 超出免费行李托运额的部分按当日成人经济舱直达全价票的 1.5%来收取. 某人计划乘坐长沙到北京的经济舱，当日全程直达票价为 1 780 元.

（1）请你求出托运行李的质量与托运费用之间的关系式；

（2）若该乘客支付了托运费用 267 元，请问他带了多少千克行李?

5. 某地出租车夜间营运收费标准如下表所示. 设出租车行驶的路程为 x(km)，收费为 y(元)，根据表格信息解答下列问题.

行驶路程 x/km	不超过 3	超过 3	超过 10
收费 y/元	8 元	超过 3 km 的部分，每千米计费 1.2 元，不足 1 km 不计费	超过 10 km 的部分，每千米计费 1.8 元，不足 1 km 不计费

（1）求收费 y 与路程 x 间的关系式.

（2）小军去外婆家，乘坐的出租车行驶了 6.2 km，那他应付车费多少元?

（3）小军乘坐出租车从家去图书馆，下车时他付了车费 25.4 元，则小军家到图书馆的距离至少为多少千米?

2.3 二次函数模型

想一想

习近平在全国脱贫攻坚总结表彰大会上发表重要讲话，庄严宣告，经过全党全国各族人民共同努力，在迎来中国共产党成立一百周年的重要时刻，我国脱贫攻坚战取得了全面胜利，现行标准下9899万农村贫困人口全部脱贫，832个贫困县全部摘帽，12.8万个贫困村全部出列，区域性整体贫困得到解决，完成了消除绝对贫困的艰巨任务，创造了又一个彪炳史册的人间奇迹！这是中国人民的伟大光荣，是中国共产党的伟大光荣，是中华民族的伟大光荣！

在脱贫攻坚期间，某地政府为了帮助当地一建档立卡贫困户脱贫，通过政府贴息贷款方式帮他建了一个果园．该果园有 200 棵橙子树，平均每棵树结 600 个橙子．现准备多种植一些橙子树以提高产量，但是如果多种树，那每棵树所接受的阳光就会减少，根据专家调查研究，每多种一棵树，平均每棵树就会少结 2 个橙子．如果设果园增种 x 棵橙子树，橙子总产量为 y 个，那么我们得到

$$y=(200+x)(600-2x)=-2x^2+200x+120\ 000. \qquad (*)$$

$(*)$式是不是二次函数的解析式？如何求总产量的最大值？

探索

我们知道，一般地，形如 $y=ax^2+bx+c$（a，b，c 为常数，且 $a\neq0$）的函数叫作二次函数，并且它的图像是抛物线，它的顶点坐标是 $\left(-\dfrac{b}{2a},\ \dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$，

对称轴是直线 $x=-\frac{b}{2a}$.

（1）当 $a>0$ 时，抛物线的开口向上，有最小值 $\frac{4ac-b^2}{4a}$；在区间 $\left(-\infty,\ -\frac{b}{2a}\right]$ 上是减函数，在区间 $\left[-\frac{b}{2a},\ +\infty\right)$ 上是增函数.

（2）当 $a<0$ 时，抛物线的开口向下，有最大值 $\frac{4ac-b^2}{4a}$；在区间 $\left(-\infty,\ -\frac{b}{2a}\right]$ 上是增函数，在区间 $\left[-\frac{b}{2a},\ +\infty\right)$ 上是减函数.

所以，当 $x=-\frac{200}{2\times(-2)}=50$ 时，（*）式中 y 取最大值

$$y_{max}=(200+50)\times(600-2\times50)=125\ 000.$$

因此，该贫困户增种 50 棵橙子树时，总产量最高，最高产量是 125 000 个橙子.

例 1　某木工师傅准备设计一个如图 2.3－1 所示的“田”字型框架，其采用的木材每米 20 元．若只能花费 240 元来采购木材，则当横条和竖条长度分别为何值时，框架的面积最大？并求出最大面积.

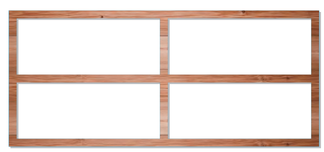


图 2.3－1

分析　首先需要表示出“田”字型框架的长和宽．因“田”字型框架的总价是定值，所以设长为 x m，可以用含 x 的代数式表示宽；再用解析法表示框架的面积 y 与 x 的函数关系；然后利用函数的性质来解决问题.

解　设“田”字型框架的长为 x m，则横条的总价为 $3\times20x=60x$（元），那么竖条的总价为 $(240-60x)$ 元，所以“田”字型框架的宽为 $\frac{240-60x}{3}\div20=4-x$（m）.

设“田”字型框架的面积为 y m^2，

于是 $y=x(4-x)$，

为符合实际意义，必须满足 $x>0$，且 $4-x>0$.

所以 y 与 x 的函数关系是 $y=-x^2+4x$，$0<x<4$.

当 $x=-\dfrac{4}{2\times(-1)}=2$ 时，y 取最大值，且最大值为 4.

答：当横条长为 2 m、竖条长为 2 m 时，框架的面积最大，最大面积为 4 m^2.

说一说

在实际生活中，怎样建立相应的二次函数模型，并运用二次函数的图像和性质求最值？

例 2 某超市对进货价为 8 元/kg 的某种苹果的销售情况进行统计，发现每天销售量 y(kg) 与销售价 x(元/kg) 存在一次函数关系，如图 2.3 - 2 所示.

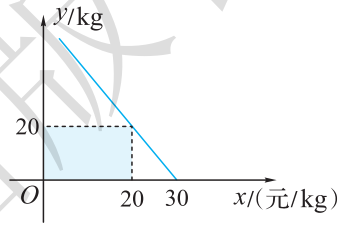


图 2.3 - 2

(1) 求 y 与 x 之间的函数关系式.

(2) 当销售价定为多少时，该品种苹果每天的销售利润最大？最大利润是多少？

分析 通过观察图像找到点(20，20)和点(30，0)，然后利用待定系数法求出 y 与 x 间的函数关系式；设该品种苹果每天的销售利润为 W 元，然后用解析法表示 W 与 x 的二次函数关系，再利用函数的性质来解决问题.

解 (1) 设 $y=kx+b$，根据题意得直线过点(20，20)和(30，0)，

所以 $\begin{cases} 20k+b=20, \\ 30k+b=0, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} k=-2, \\ b=60. \end{cases}$

所以 y 与 x 之间的函数关系式为 $y=-2x+60$.

(2) 设该品种苹果每天的销售利润为 W 元，根据题意得

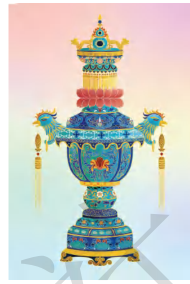
$$W=(x-8)(-2x+60)=-2x^2+76x-480(8\leqslant x\leqslant 30),$$

整理得 $$W=-2(x-19)^2+242.$$

所以，当 $x=19$ 时，W 的值最大，最大值为 242.

答：当销售价定为 19 元/kg 时，该品种苹果每天的销售利润最大，最大利润是 242 元.

练　习

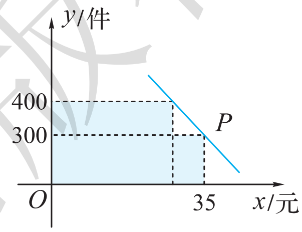


景泰蓝

1. 用长为 50 m 的篱笆围成一个养鸡场，养鸡场的一面靠墙. 问如何围才能使养鸡场的面积最大？

2. 某工艺厂设计了一款成本为 2 000 元/件的景泰蓝工艺品投放市场，销售量 y(件)与销售单价 x(元)间的关系式为 $y=-100x+8\ 000$. 请问：销售单价定为多少时，才能获得最大利润？最大利润是多少？

3. 某商店购进一批进价为 20 元/件的日用商品，第一个月，按进价提高 50%的价格出售，售出 400 件. 第二个月，商店准备在不低于原售价的基础上进行加价销售，根据销售经验，提高销售单价会导致销售量减少. 销售量 y(件)与销售单价 x(元)的关系如图所示.



（第 3 题）

（1）求 y 与 x 之间的函数表达式.

（2）第二个月的销售单价定为多少元时，可获得最大利润？最大利润是多少？

4. 某科技开发公司研制出一种新型产品，每件产品的成本为 2 400 元，销售单价定为 3 000 元. 在该产品的试销期间，为了鼓励商家购买该新型产品，公司决定：商家一次购买这种新型产品不超过 10 件时，每件按 3 000 元销售；一次购买该种产品超过 10 件时，每多购买一件，所购买的全部产品的销售单价均降低 10 元，但销售单价不低于 2 600 元.

（1）设商家一次购买这种产品 x 件，开发公司所获的利润为 y 元，求 y 与 x 之间的函数关系式.

（2）该公司的销售人员发现：当商家一次购买的产品超过某一数量时，会出现随着一次购买的数量的增多，公司所获的利润反而减少这一情况. 为使商家一次购买的数量越多，公司所获的利润越大，公司应将最低销售单价调整为多少元？

2.4 等差数列模型

想一想

在现实生活中，存在着一类离散现象，需要用到等差数列模型来刻画和研究.

例如，2021 年 7 月 1 日前夕，某地为了庆祝建党 100 周年，营造喜庆氛围，在城市主干道两侧，距起点相同距离的位置每隔 8 m 插一面红旗，由近及远排成一列.

记起点为 0，那么主干道一侧插红旗的位置(离起点的距离)为：

$$0,\ 8,\ 16,\ 24,\ \cdots.$$

你能说出这个数列相邻两项之间有什么特点吗？

探索

我们知道，若一个数列从第 2 项起，每一项与它前一项之差都等于同一个常数，则这个数列就是等差数列.

因此，0，8，16，24，…是一个首项为 0，公差为 8 的等差数列.

进一步，上述城市主干道一侧所插红旗的位置到起点的距离，就是一个首项 $a_1=0$，公差 $d=8$ 的等差数列模型.

它的通项公式为：$a_n=8(n-1)=8n-8$，

假设主干道长 2 400 m，则 $2\ 400=8n-8$，

解得 $n=301$.

所以，该主干道一侧需要插 301 面红旗，两侧插满则需要红旗 $301\times2=602$(面).

例 1　某公司购置了一台价值为 220 万元的设备，随着设备在使用过程中老化，其价值会逐年减少．经验表明，每经过一年其价值就会减少 d(d 为正常数)万元．已知这台设备的使用年限为 10 年，超过 10 年，它的价值将低于购进价值的 5%，设备将报废．请确定 d 的取值范围．

分析　这台设备使用 n 年后的价值构成一个数列 $\{a_n\}$．由题意可知，10 年之内(含 10 年)，这台设备的价值应不小于 $220\times5\%=11$(万元)；而 10 年后，这台设备的价值应小于 11 万元．可以利用 $\{a_n\}$ 的通项公式列不等式求解．

解　设使用 n 年后，这台设备的价值为 a_n 万元，则可得数列 $\{a_n\}$．

由已知条件，得

$$a_n=a_{n-1}-d\ (n\geqslant2).$$

由于 d 是与 n 无关的常数，所以数列 $\{a_n\}$ 是一个公差为 $-d$ 的等差数列．

因为购进设备的价值为 220 万元，所以 $a_1=220-d$，于是

$$a_n=a_1+(n-1)(-d)=220-nd.$$

根据题意，得
$$\begin{cases}a_{10}\geqslant11,\\a_{11}<11,\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}220-10d\geqslant11,\\220-11d<11.\end{cases}$$

解这个不等式组，得

$$19<d\leqslant20.9.$$

所以，d 的取值范围为 $19<d\leqslant20.9$．

例 2　北京天坛的圜丘坛分上、中、下三层，上层中心有一块圆形石板(称为天心石)．环绕天心石砌 9 块扇面形石板构成第一环，向外每环依次增加 9 块，下一层的第一环比上一层的最后一环多 9 块，向外每环依次也增加 9 块．已

知每层环数相同，且下层比中层多 729 块，求三层共有多少扇面形石板(不含天心石).

分析 设第 n 环扇形面石板块数为 a_n，第一层共有 n 环，则$\{a_n\}$是以 9 为首项，9 为公差的等差数列. 设 S_n 为$\{a_n\}$的前 n 项和，由题意可得 $S_{3n}-S_{2n}=S_{2n}-S_n+729$，解方程即可得到 n，进一步可得 S_{3n}.

解 设第 n 环石板块数为 a_n，第一层共有 n 环，

则$\{a_n\}$是以 9 为首项，9 为公差的等差数列，

于是 $a_n=9+(n-1)\times 9=9n$.

设 S_n 为$\{a_n\}$的前 n 项和，

则第一、二、三层的块数分别为 S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$.

因为下层比中层多 729 块，

所以 $S_{3n}-S_{2n}=S_{2n}-S_n+729$，

即

$$\frac{3n(9+27n)}{2}-\frac{2n(9+18n)}{2}=\frac{2n(9+18n)}{2}-\frac{n(9+9n)}{2}+729,$$

即 $$9n^2=729,$$

解得 $$n=9,$$

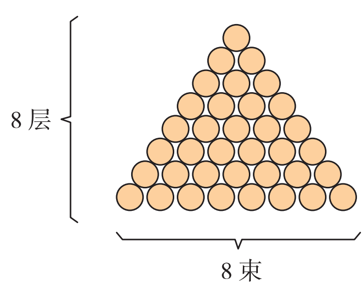
所以 $$S_{3n}=S_{27}=\frac{27\times(9+9\times 27)}{2}=3\ 402.$$

故三层共有 3 402 块扇面形石板.

练 习

1. 某企业购买 A 型机器花费了 50 000 元，因为机器磨损，每年的折旧费用为 9 000 元，预计当残值降到 5 000 元时即报废，问：A 型机器的使用寿命是多少年?

2. 我国南宋数学家杨辉提出了这样一个问题："今有圭垛草一堆，顶上一束，底阔八束. 问共几束?"请你用数学知识解答.



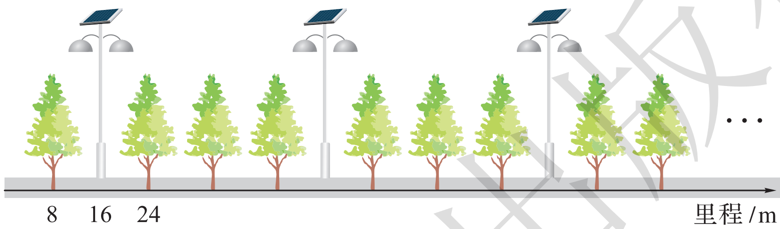
(第 2 题)

3. 一种车床变速箱的 8 个齿轮的齿数成等差数列，其中首末两个齿轮的齿数分别是 24 与 45，请问第 5 个齿轮的齿数是多少？

4. 在某条公路上，从里程 8 m 开始到 3 952 m 为止，每隔 8 m 将树与灯按图中所示规则设立：在里程 8 m 处种一棵树，在 16 m 处立一盏灯，在24 m 处种一棵树（相邻的树与树、树与灯之间的距离都是 8 m）……回答以下问题：

（1）第 3 盏路灯在里程多少米处的位置？

（2）此公路的终点处是树还是路灯？



（第 4 题）

2.5 等比数列模型

想一想

在现实生活中，存在一类离散现象，需要用到等比数列模型来刻画和研究. 如下面的案例：

假设某地 2020 年的 GDP 为 5 000 亿元，预计将以年增长率 6%的速度持续增长.

年份	GDP/亿元
2020 年	5 000
2021 年	$5\ 000\times(1+6\%)=5\ 300$
2022 年	$5\ 300\times(1+6\%)=5\ 618$
2023 年	$5\ 618\times(1+6\%)=5\ 955.08$
…	…

将上表右栏的数字排成一列

$$5\ 000,\ 5\ 300,\ 5\ 618,\ 5\ 955.08,\ \cdots.$$

你能说出这个数列相邻两项之间有什么特点吗？

探索

我们知道，如果一个数列从第 2 项起，每一项与它前一项的比值都等于同一个常数，那么这个数列就是等比数列.

通过分析可知，该地区的 GDP 是一个首项 $a_1=5\ 000$，公比 $q=1.06$ 的等比数列模型.

它的通项公式为：

$$a_n=5\ 000\times1.06^{n-1}.$$

据此，我们可预测该地 2029 年的 GDP 为

$$a_{10}=5\ 000\times1.06^9\approx8\ 447.39(\text{亿元}).$$

例 1　某中职学校的服装产学研中心 2019 年生产了 10 000 套校服．若计划在未来 5 年，每年增产率均为 10%，求 5 年期满的总产量(精确到 1 套)．

分析　这是一个首项 $a_1=10\ 000$，公比 $q=1.1$ 的等比数列模型．求 5 年期满的总产量实际上就是求这个数列的前六项和．

解　根据题意可知，这个数列是首项 $a_1=10\ 000$，公比 $q=1.1$ 的等比数列，从而利用计算器可得

$$S_6=\frac{10\ 000\times(1-1.1^6)}{1-1.1},$$

$$\approx77\ 156(\text{套}).$$

答：5 年期满的总产量约为 77 156 套．

建立等比数列模型的具体步骤是什么？

例 2　用 10 000 元购买某个理财产品．

(1) 若以月利率 0.400% 的复利计息，12 个月能获得多少利息(精确到1 元)?

(2) 若以季度复利计息，存 4 个季度，则当每季度利率为多少时，按季结算的利息不少于按月结算的利息(精确到 10^{-5})?

分析　复利是指把前一期的利息与本金之和算作本金，再计算下一期的利息，所以若原始本金为 a 元，每期的利率为 r，则从第一期开始，各期的本息和 a，$a(1+r)$，$a(1+r)^2$，…构成等比数列．

解　(1) 设这笔钱存 n 个月以后的本息和组成一个数列$\{a_n\}$，

则$\{a_n\}$是等比数列，

且首项 $a_1=10\ 000\times(1+0.400\%)$，公比 $q=1+0.400\%$，

所以

$$a_{12}=10\ 000\times(1+0.400\%)^{12}\approx10\ 490.7.$$

所以，12 个月后的利息为 $10\ 490.7-10\ 000\approx491$(元)．

(2) 设季度利率为 r，这笔钱存 n 个季度以后的本息和组成一个数列$\{b_n\}$，则$\{b_n\}$也是一个等比数列，首项 $b_1=10\ 000\times(1+r)$，公比为 $1+r$，于是

$$b_4=10\ 000\times(1+r)^4.$$

因此，以季度复利计息，存 4 个季度后的利息为

$$[10\ 000\times(1+r)^4-10\ 000]\text{元}.$$

解不等式 $10\ 000\times(1+r)^4-10\ 000\geqslant 491$，得

$$r\geqslant 1.206\%.$$

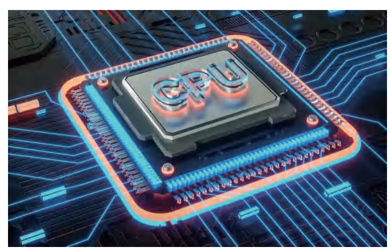
所以，当季度利率不小于 1.206%时，按季结算的利息不少于按月结算的利息.

练习

1. 小李向银行申请贷款 50 000 元进行创业，假设该银行的借款年利息为 5%，以复利计息的方式计算，请问 2 年后小李的还款金额是多少元？

2. 某企业进行技术改造，有两种方案可供选择. 甲方案：一次性贷款 10 万元，第一年可获利 1 万元，以后每年比前一年增加 30%的利润. 乙方案：每年贷款 1 万元，第一年可获利 1 万元，以后每年都比前一年增加利润 5 000 元. 两方案使用期都是 10 年，到期一次性还本付息. 若银行贷款利息均按年息 10%的复利计算，试比较两方案的优劣($1.1^{10}\approx 2.594$，$1.3^{10}\approx 13.79$).

3. 某工厂去年 12 月试产 1 050 个高新电子产品，产品合格率为 90%. 从今年 1 月开始，工厂在接下来的两年中将生产这款产品. 1 月按去年 12 月的产量和产品合格率生产，以后每月的产量都在前一个月的基础上提高 5%，产品合格率比前一个月增加 0.4%，那么生产该产品一年后，月不合格品的数量能否控制在 100 个以内？



2.6　指数函数模型

回顾

小李今年花 25 万元购买了一辆轿车，已知汽车前 5 年的年折损率为 10%，5 年后的年折损率为 6%，如果设 x 年后汽车的价值为 y 元，那么

（1）前 5 年汽车的价值为：

$$y=25(1-10\%)^x=25\times0.9^x(0\leqslant x\leqslant5,\ x\in\mathbf{N});$$

（2）5 年后汽车的价值为：

$$y=25(1-10\%)^5(1-6\%)^{x-5}\approx20.115\times0.94^x(x\geqslant6,\ x\in\mathbf{N}).$$

形如 $y=c\cdot a^x$ 的函数叫作指数型函数，其中 $c>0$ 为常数，$a>0$ 且 $a\neq1$.

探索

通过以前的学习，我们知道指数函数 $y=a^x(a>0$ 且 $a\neq1)$中，当 $0<a<1$ 时，函数在$(-\infty,\ +\infty)$上单调递减；当 $a>1$ 时，函数在$(-\infty,\ +\infty)$上单调递增. 那么指数型函数 $y=c\cdot a^x+b(c>0,\ a>0$ 且 $a\neq1)$的单调性是怎样的呢？下面我们一起来探究.

作出指数型函数 $y=25\times0.9^x$ 和 $y=25\times1.2^x$ 的图像，分别如图 2.6－1，图 2.6－2 所示.

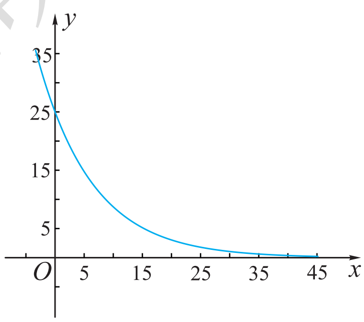


图 2.6－1

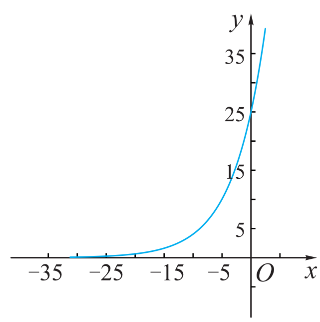


图 2.6－2

通过观察图像，可知指数型函数 $y=c\cdot a^x(c>0,\ a>0$ 且 $a\neq1)$ 的性质：

当 $0<a<1$ 时，函数 $y=c\cdot a^x$ 在 $(-\infty,\ +\infty)$ 上单调递减；

当 $a>1$ 时，函数 $y=c\cdot a^x$ 在 $(-\infty,\ +\infty)$ 上单调递增.

例 某商用无人机公司从某年 1 月份开始投产，已知前 4 个月的产量分别为 1 万台，1.2 万台，1.3 万台，1.37 万台. 由于产品技术先进、质量可靠，前几个月的产品销售情况良好. 为了方便营销人员在推销产品时，接受订单不至于过多或过少，需要估测以后几个月的产量. 公司分析，产量的增加是由于工人技术日益熟练和生产流程更为优化，并且公司也暂时不准备增加设备和工人. 假如你是公司管理者，将会采用什么办法估算以后几个月的产量？

解 如图 2.6－3，在直角坐标系（为方便观察，取 y 轴的单位长度较大）中依次描出体现基本数据的四个点：

$$A(1,\ 1),\ B(2,\ 1.2),\ C(3,\ 1.3),\ D(4,\ 1.37).$$

（方法一）设模拟函数为 $y=ax+b$，将 B，C 两点的坐标代入，有

$$\begin{cases}2a+b=1.2,\\3a+b=1.3.\end{cases}\text{解得}\begin{cases}a=0.1,\\b=1.\end{cases}$$

所以得 $y=0.1x+1$.

该函数的图像如图 2.6－3 所示.

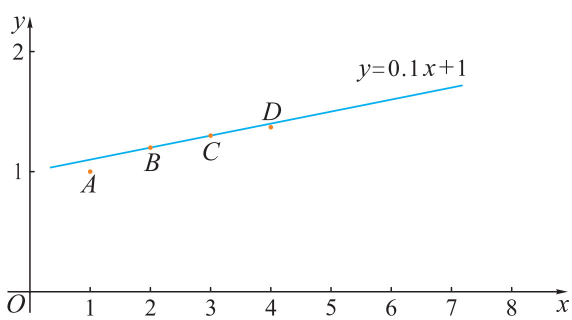


图 2.6－3

评价 此法的结论是，在不增加设备和工人的条件下，产量会每月上升

1 000 台，这是不太可能的.

（方法二）设模拟函数为 $y=ax^2+bx+c$，将 A，B，C 三点的坐标代入，有

$$\begin{cases}a+b+c=1,\\4a+2b+c=1.2,\\9a+3b+c=1.3.\end{cases}\quad 解得\begin{cases}a=-0.05,\\b=0.35,\\c=0.7.\end{cases}$$

所以得　$y=-0.05x^2+0.35x+0.7$.

该函数的图像如图 2.6－4 所示.

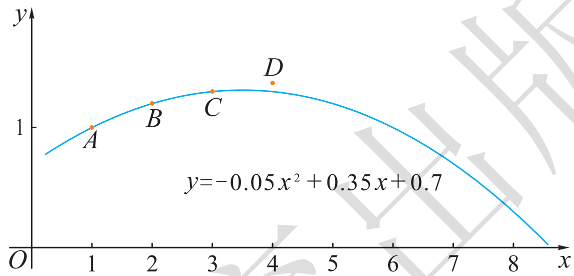


图 2.6－4

评价　由此法计算出 4 月份的产量为 1.3 万台，比实际产量少 700 台，而且，由二次函数的性质可知，产量自 4 月份开始将每月下降(图像开口向下，对称轴是直线 $x=3.5$)，这显然不符合实际情况.

（方法三）设模拟函数为 $y=a\cdot b^x+c$，将 A，B，C 三点的坐标代入，得

$$\begin{cases}ab+c=1,\\ab^2+c=1.2,\\ab^3+c=1.3,\end{cases}\quad 解得\begin{cases}a=-0.8,\\b=0.5,\\c=1.4.\end{cases}$$

所以得　$y=-0.8\times0.5^x+1.4$.

借助计算机软件可作出该函数的图像如图 2.6－5 所示.

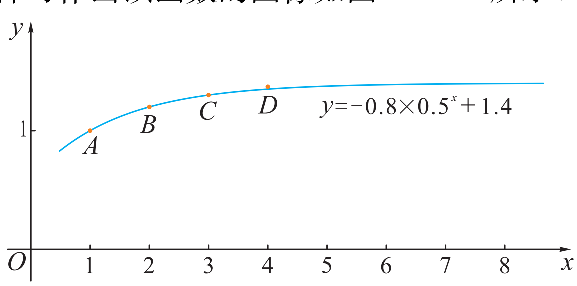
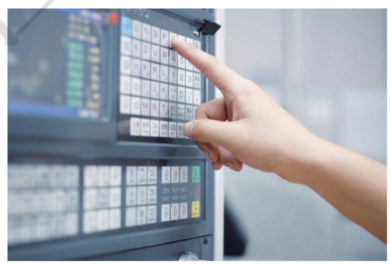


图 2.6－5

评价 将 $x=4$ 代入函数解析式，得 $y=-0.8\times0.5^4+1.4=1.35$，与第 4 个月的产量比较接近.

比较上述三个模拟函数的优劣，既要考虑到误差最小，又要考虑生产的实际情形，比如增产的趋势和可能性. 经过筛选，以指数函数模拟为最佳：一是误差最小；二是由于是新建生产线，随着工人技术、管理效率逐渐提高，一段时间内产量会明显上升，但过一段时间之后，如果不更新设备，产量必然趋于稳定，而求得的指数函数模型恰好反映了这种趋势. 因此选用函数 $y=-0.8\times0.5^x+1.4$ 模拟，比较接近客观实际.

练习



1. 某市 2020 年地区生产总值（GDP）为 20 000 亿元，计划在未来五年内，平均每年以 9% 的增长率增长，请你预测 2024 年该市的地区生产总值(精确到 1 亿元).

2. 一台价值 100 万元的数控机床，若按每年 8% 的折旧率折旧，10 年后的价值为多少万元(精确到 0.01 万元)?

3. 创新是社会进步的灵魂，创业是推动经济社会发展、改善民生的重要途径. 实践证明，广泛开展大众创业、万众创新，是培育和催生经济社会发展新动力的必然选择，是扩大就业、实现富民之道的重要举措，是激发全社会创新潜能和创业活力的有效途径. 假设你有一笔资金用于创业投资，现有两种创业方案供你选择，这两种方案的回报如下：

方案一：每天回报 100 元；

方案二：第一天回报 0.5 元，以后每天的回报比前一天翻一番.

你会选择哪种创业投资方案？并说明理由.

SUMMARY

本章小结

一、本章知识结构

数学建模
- 分段函数模型
- 二次函数模型
- 等差数列模型
- 等比数列模型
- 指数函数模型

→ 通过数学建模，表达、解决客观世界中的实际问题

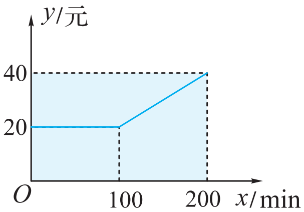
二、本章知识要点

- 一般地，如果自变量在定义域的不同取值范围内时，函数由不同的解析式给出，这种函数叫作分段函数.
- 一般地，形如 $y=ax^2+bx+c$（a，b，c 为常数，且 $a\neq 0$）的函数叫作二次函数.

  二次函数的图像是抛物线，它的顶点坐标是 $\left(-\dfrac{b}{2a},\ \dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$，对称轴是直线 $x=-\dfrac{b}{2a}$.
- 一般地，如果一个数列从第 2 项起，每一项与它前一项之差都等于同一个常数，那么这个数列叫作等差数列.
- 一般地，如果一个数列从第 2 项起，每一项与它前一项的比值都等于同一个常数，那么这个数列叫作等比数列.
- 一般地，形如 $y=c\cdot a^x$ 的函数叫作指数型函数，其中 $c>0$ 为常数，$a>0$ 且 $a\neq 1$.

复习题二

1. 有甲、乙两家通信公司，甲公司每月通话的收费标准如图所示，乙公司每月通话的收费标准如表所示.



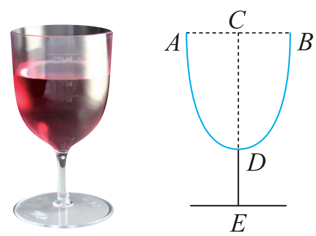
月租费	通话费
5 元	0.15 元/min

（第 1 题）

（1）观察上图，甲公司用户月通话时间不超过 100 min 时应付通话费________元；甲公司用户通话 100 min 以后，每分钟的通话费为________元.

（2）张阿姨买了一部手机，如果她的月通话时间不超过 100 min，她选择哪家通信公司更合算？如果她的月通话时间超过 100 min，又将如何选择？

2. 小高以二次函数 $y=x^2-2x+3$ 的图像为灵感为某地“国际葡萄酒大赛”设计了一款杯子，如图所示为杯子的设计稿，若 $AB=6$，求杯子的高 CE.



（第 2 题）

3.（中国古代数学问题）《九章算术》中有如下问题：今有良马与驽马发长安至齐，齐去长安三千里. 良马初日行一百九十三里，日增十三里；驽马初日行九十七里，日减半里. 良马先至齐，复还迎驽马. 问几何日相逢？

4. 某地区为响应上级号召，大力兴建廉租住房供住房困难家庭居住，截至 2020 年底，该地区廉租住房的总面积为 200 万平方米. 根据本地区的实际情况，预计今后廉租住房面积的年平均增长率只能达到 5%.

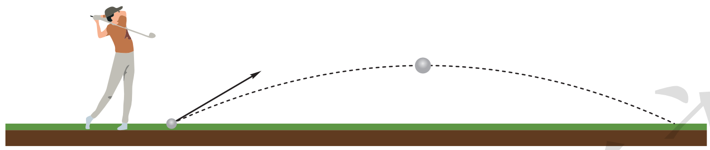
（1）经过 x 年后，该地区的廉租住房面积为 y 万平方米，求 y 与 x 之间的函数关系式；

（2）经过多少年后，该地区的廉租住房面积能达到 300 万平方米？

5. 教育储蓄是指个人按国家有关规定在指定银行开户、存入规定数额资金、用于教育目的的专项储蓄，是一种专门为学生支付非义务教育所需教育金的专项储蓄. 某同学依教育储蓄方式从 2018 年 1 月 1 日开始，每月按时存入 200 元，连

续存 5 年，若月利率为 0.2%，到期可支取本息共多少元？

6. 正在参加比赛的运动员将小球沿与地面成一定角度的方向击出，在不考虑空气阻力的条件下，小球的飞行高度 h(m)与它的飞行时间 t(s)满足二次函数关系，t 与 h 的几组对应值如下表所示.



（第 6 题）

t/s	0	0.5	1	1.5	2	…
h/m	0	8.75	15	18.75	20	…

（1）求 h 与 t 之间的函数关系式.

（2）求小球飞行 4 s 时的高度.

（3）小球的飞行高度能否达到 21 m？请说明理由.

7.《九章算术》是中国古代的一部数学专著，是“算经十书”中最重要的一部，成书于公元 1 世纪左右. 书中有这样一道题目：“今有垣厚五尺，两鼠对穿. 大鼠日一尺，小鼠亦日一尺. 大鼠日自倍，小鼠日自半，问几何日相逢?”其意思是：有两只老鼠从厚五尺的墙的两边打洞穿墙，大老鼠第一天进一尺，以后每天加倍；小老鼠第一天也进一尺，以后每天减半. 问几日两鼠相逢？请你用所学数学知识解答.