

# 河南省 2022 年普通高校专升本考试试题

## 高等数学

本试卷共 12 页,53 小题,满分 150 分.考试时间 120 分钟.

### 一、单项选择题(每小题 2 分,共 50 分)

1. 函数  $\frac{f(-x)-f(x)}{3}$  在区间  $(-\infty, +\infty)$  内是 ( )

- A. 奇函数  
B. 偶函数  
C. 非奇非偶函数  
D. 无法判断奇偶性

2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2+7x-1}{2x+5} =$  ( )

- A. 2  
B.  $\infty$   
C. 0  
D.  $\frac{5}{2}$

3. 当  $x \rightarrow 0$  时,以下是等价无穷小的是 ( )

- A.  $1 - \cos x$  与  $\frac{1}{2}x^2$   
B.  $x$  与  $\tan^2 x$   
C.  $x - \sin x$  与  $\cot x$   
D.  $1 - \cos x$  与  $2x$

4.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{7x-6}-\sqrt{x}}{x-1} =$  ( )

- A. 1  
B. 2  
C. 3  
D. 4

5. 已知  $f(x)$  可导且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(5x)-f(0)}{2x} = 1$ , 则  $f'(0) =$  ( )

- A.  $\frac{5}{2}$   
B.  $\frac{2}{5}$   
C. 1  
D. 5

6. 已知  $f(x) = \sqrt{2x} + \frac{1}{3} \cos 3x$ , 则  $f'(x) =$  ( )

- A.  $\frac{1}{\sqrt{2x}} - \sin 3x$   
B.  $\frac{1}{\sqrt{2x}} + \sin 3x$   
C.  $-\frac{1}{\sqrt{2x}} - \sin 3x$   
D.  $\frac{1}{\sqrt{2x}} - \frac{1}{3} \sin 3x$

7. 已知  $f(x) = \begin{cases} 2-x, & 0 \leq x < 1, \\ 2, & x = 1, \\ -x+4, & 1 < x \leq 2, \end{cases}$  则  $f(x)$  在  $[0, 2]$  上 ( )

- A. 无间断点  
B. 有最大值  
C. 有最小值  
D. 既无最大值又无最小值

8.  $y = |\tan x|$  在  $x = 0$  处 ( )

- A. 可导但不连续  
B. 可导且连续  
C. 不可导但连续  
D. 不可导也不连续

9. 设  $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = t + \sin 2t, \end{cases}$  则  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=\frac{\pi}{2}} =$  ( )

- A. 1  
B. 2  
C. 3  
D. 4

10. 设  $f(x) = \begin{cases} a+2x \sin \frac{1}{x}, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ \frac{\tan x}{x}, & x > 0 \end{cases}$   $x=0$  是  $f(x)$  的可去间断点, 则  $a =$  ( )

- A. 0  
B. -1  
C. 1  
D. 2

11. 曲线  $y = \frac{3x^2-5x}{(x-3)(x+7)}$  的渐近线有 ( )

- A. 1 条  
B. 2 条  
C. 3 条  
D. 4 条

12. 设  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{\ln(1-kx^2)}, & x > 0, \\ x+3, & x < 0, \end{cases}$  且  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  存在, 则  $k =$  ( )

- A.  $\frac{1}{3}$   
B.  $-\frac{1}{3}$   
C. 3  
D. -3

13.  $\int f'(7x)dx =$  ( )
- A.  $f(x)+C$  B.  $\frac{1}{7}f(7x)+C$
- C.  $7f(x)+C$  D.  $7f(7x)+C$
14. 已知  $I_1 = \int_1^2 (\ln x)^2 dx, I_2 = \int_1^2 (\ln x)^3 dx$ , 则 ( )
- A.  $I_1 = I_2$  B.  $I_1 < I_2$
- C.  $I_1 > I_2$  D. 无法判断  $I_1, I_2$  的大小
15. 下列广义积分发散的是 ( )
- A.  $\int_0^{+\infty} 3xe^{-x^2} dx$  B.  $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{2x^3} dx$
- C.  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3}{1+x^2} dx$  D.  $\int_0^{+\infty} \frac{6x}{x^2+1} dx$
16. 已知  $f(x) = \int_0^{2x} \cos t^2 dt$ , 则  $f'(x) =$  ( )
- A.  $\cos 4x^2$  B.  $2\cos 4x^2$
- C.  $4\sin x^2$  D.  $4\cos x^2$
17. 方程  $x^2 + y^2 - 3z = 0$  表示的曲面是 ( )
- A. 旋转单叶双曲面 B. 圆锥面
- C. 旋转双叶双曲面 D. 旋转抛物面
18. 设  $f(x)$  在  $[-1, 3]$  上连续, 在  $(-1, 3)$  内可导且  $f'(x) < 0$ , 则 ( )
- A.  $f(3) > 0$  B.  $f(-1) < 0$
- C.  $f(3) > f(-1)$  D.  $f(3) < f(-1)$
19. 以  $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x$  为通解的二阶常系数齐次线性微分方程是 ( )
- A.  $y'' + 2y' - y = 0$  B.  $y'' + y' - 2y = 0$
- C.  $y'' + 2y' + y = 0$  D.  $y'' - 3y' + 2y = 0$
20. 设  $y = \arcsin(3x+1)$ , 则  $dy =$  ( )
- A.  $\frac{3dx}{\sqrt{1-(3x+1)^2}}$  B.  $\frac{-3dx}{\sqrt{1-(3x+1)^2}}$
- C.  $\frac{3dx}{\sqrt{1+(3x+1)^2}}$  D.  $\frac{-3dx}{\sqrt{1+(3x+1)^2}}$
21. 已知向量  $a$  和向量  $b = (-1, 2, 1)$  平行, 与向量  $c = (1, 2, -1)$  的数量积为 6, 则向量  $a$  为 ( )
- A.  $(-3, 6, -3)$  B.  $(3, 6, 3)$
- C.  $(3, 6, -3)$  D.  $(-3, 6, 3)$

22.  $f(x, y) = \sqrt{2+x^2+y^2}$  在点  $(1, -1)$  处的梯度为 ( )
- A.  $\frac{1}{2}i - \frac{1}{2}j$  B.  $-\frac{1}{2}i - \frac{1}{2}j$
- C.  $i - j$  D.  $i - \frac{1}{2}j$
23. 二次积分  $\int_0^2 dx \int_x^2 e^{y^2} dy =$  ( )
- A.  $\frac{1}{2}(1-e^4)$  B.  $2(e^2-1)$
- C.  $\frac{1}{2}(e^4-1)$  D.  $4(1-e^2)$
24. 已知等比级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a(q-3)^n (a \neq 0)$  收敛, 则公比  $q$  的取值范围是 ( )
- A.  $(1, 3)$  B.  $(-1, 1)$
- C.  $(2, 4)$  D.  $(1, 2)$
25. 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \cos 2n}{5^n}$  的敛散性为 ( )
- A. 绝对收敛 B. 条件收敛
- C. 发散 D. 不确定

## 二、填空题(每小题 2 分, 共 30 分)

26. 已知  $f(x) = \sqrt{x^3+2}$ , 则  $f^{-1}(2) =$  \_\_\_\_\_.
27.  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{\ln(y+e^x)}{\sqrt{x^2+y^2}} =$  \_\_\_\_\_.
28.  $f(x) = 2 + xe^{-x}$  的单调减区间是 \_\_\_\_\_.
29. 已知函数  $f(x) = 5^x$ , 则  $f^{(n)}(x) =$  \_\_\_\_\_.
30. 曲线  $\begin{cases} x = \cos t + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = \sin 3t \end{cases}$  在  $t = \frac{\pi}{4}$  处的切线方程为 \_\_\_\_\_.
31.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \ln(2+t^3) dt}{\sin x} =$  \_\_\_\_\_.
32. 函数  $y = e^x - 2$  在区间  $[0, 1]$  上满足拉格朗日中值定理的  $\xi =$  \_\_\_\_\_.
33. 已知  $f(x)$  的一个原函数是  $\ln x$ , 则  $\int x f'(x) dx =$  \_\_\_\_\_.
34.  $\int \frac{3}{(x-3)(x-2)} dx =$  \_\_\_\_\_.

35.  $\int_{-\pi}^{\pi} x(x^2 + 5\cos x + 3)dx =$  \_\_\_\_\_.

36. 已知点(1,2,2)在以原点为球心的球面上,则球面的方程为\_\_\_\_\_.

37. 已知  $u=5+e^{3x-y}$ , 则  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} =$  \_\_\_\_\_.

38. 已知  $y''=6x$ , 则  $y=$  \_\_\_\_\_.

39. 设  $L$  为圆周  $x^2+y^2=25$ , 沿正方向, 则  $\oint_L (x-3y)dx + (7y^2+3x)dy =$  \_\_\_\_\_.

40. 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n+1)e^n}$  的敛散性为 \_\_\_\_\_.

**三、计算题(每小题 5 分,共 50 分)**

41. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{2}{\ln(1+x)} - \frac{2}{x} \right]$ .

42. 设二元函数  $z=f(x,y)$  由方程  $\sin(x+3y-2z)=x+3y-2z$  确定, 求  $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$ .

43. 求  $y=3+e^{\arctan x}$  的凹凸区间与拐点.

44. 求微分方程  $\frac{dy}{dx}=y+e^{-x}$  的通解.

45. 计算定积分  $\int_0^4 e^{-\frac{\sqrt{x}}{2}} dx$ .

46. 求不定积分  $\int \left( \frac{3}{1+x^2} - \frac{2+\ln x}{x \ln x} \right) dx$ .

47. 已知积分区域  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 5\}$ , 计算二重积分  $\iint_D \frac{x \ln y}{y \sqrt{x^2 + 1}} dx dy$ .

48. 过点  $(1, -1, 2)$  作直线  $\frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$  的垂线, 求垂足的坐标.

49. 求  $f(x, y) = 3y^2 + 6xy - x^3 + 5$  的极值.

50. 求级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n+1}$  的收敛域.

四、证明题(6分)

51. 设  $e < a < b < e^3$ , 证明:  $\ln^2 b - \ln^2 a > \frac{6}{e^3}(b-a)$ .

五、应用题(每小题 7 分,共 14 分)

52. 某房地产公司有 60 套公寓要出租,当月租金定为 3 000 元时,公寓会全部租出去,当月租金每增加 200 元时,就会多一套公寓租不出去,而租出去的公寓每月需花费 200 元的维修费,试问租金定为多少元时可获得最大收入?

53. 已知  $D$  是由  $y=2\sin x, x=\pm\frac{\pi}{2}$  和  $x$  轴所围成的平面区域,试求:

- (1) 区域  $D$  的面积;
- (2) 区域  $D$  绕  $x$  轴旋转一周所形成的旋转体的体积.



15. 方程  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$  所表示的曲面为 ( )

- A. 椭圆锥面  
B. 椭圆柱面  
C. 椭圆球面  
D. 抛物柱面

16. 下列广义积分发散的是 ( )

- A.  $\int_{-2}^2 \frac{dx}{x}$   
B.  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$   
C.  $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$   
D.  $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2} dx$

17. 已知  $a > 0$ , 则  $\int_{-a}^a (x^2 + x \sqrt{a^2 - x^2}) dx =$  ( )

- A. 0  
B.  $a^3$   
C.  $\frac{3}{2}a^3$   
D.  $\frac{2}{3}a^3$

18. 已知二次积分  $\int_0^3 dy \int_0^{3-y} f(x, y) dx$ , 交换积分次序后得 ( )

- A.  $\int_0^3 dx \int_0^x f(x, y) dy$   
B.  $\int_0^3 dx \int_0^{3-x} f(x, y) dy$   
C.  $\int_0^3 dx \int_0^{x-3} f(x, y) dy$   
D.  $\int_0^x dx \int_0^{y-3} f(x, y) dy$

19.  $f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处有一阶、二阶偏导数, 且取得极小值, 则下列成立的是 ( )

- A.  $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$   
B.  $f(x_0, y_0) = 0$   
C.  $f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2 > 0, f_{xx} > 0$   
D.  $f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2 > 0, f_{xx} < 0$

20. 二重积分  $\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy =$  \_\_\_\_\_, 其中  $D = \{(x, y) \mid 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$  ( )

- A. 0  
B.  $\frac{\pi}{2}$   
C.  $\pi$   
D.  $2\pi$

21. 已知  $z = x^2 - 2xy - y^2$ , 则  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{(1,2)} =$  ( )

- A. 2  
B. -2  
C. 6  
D. -6

22. 函数  $f(x, y) = 2xy$  在  $(-1, 2)$  处沿  $l = (2, -1)$  的变化率为 ( )

- A.  $2\sqrt{5}$   
B. 10  
C.  $-2\sqrt{5}$   
D. -10

23. 下列是一阶线性微分方程的是 ( )

- A.  $(xy + xy')^2 = xy'$   
B.  $xy' + (y')^2 + y = 0$   
C.  $x^2 y' + y = x$   
D.  $y'' - 2y' + y = 0$

24. 方程  $y'' - y' - 6y = 0$  的通解为  $y =$  ( )

- A.  $C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x}$   
B.  $C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$   
C.  $C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x}$   
D.  $C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}$

25. 幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3}{4^n} x^n$  的收敛半径为 ( )

- A. 3  
B. 4  
C.  $\frac{1}{4}$   
D. 1

## 二、填空题(每小题 2 分, 共 30 分)

26.  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} + \ln(x+1)$  的连续区间为\_\_\_\_\_.

27.  $f(x)$  为可导的奇函数且  $f'(-2) = 3$ , 则  $f'(2) =$ \_\_\_\_\_.

28.  $y = \ln x$  当  $x =$ \_\_\_\_\_ 时的切线平行于过点  $(1, 0), (e, 1)$  的弦.

29.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{x+2021} =$ \_\_\_\_\_.

30.  $y = \frac{2x^2 - 1}{x - 1}$  的垂直渐近线是\_\_\_\_\_.

31. 设曲线方程为  $\begin{cases} x = 2\cos \theta + \sin 2\theta, \\ y = 2\sin \theta + \cos 2\theta \end{cases}$  ( $\theta$  为参数), 则  $\frac{dy}{dx} \Big|_{\theta=0} =$ \_\_\_\_\_.

32.  $\int x \sin x dx =$ \_\_\_\_\_.

33.  $\int_0^2 \max\{x, 2-x\} dx =$ \_\_\_\_\_.

34.  $\frac{d}{dx} \int_0^{x^2} \cos \sqrt{t} dt (x > 0) =$ \_\_\_\_\_.

35.  $y = 4e^x + e^{-x}$  的极值点为\_\_\_\_\_.

36. 曲面  $e^z - 5z + xy = 3$  在点  $(2, 1, 0)$  处的切平面方程为\_\_\_\_\_.

37. 二元函数  $z = 2xy + y^2$ , 则  $dz \Big|_{(3,1)} =$ \_\_\_\_\_.

38.  $y = \ln \sin x$  在区间  $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi\right]$  上满足罗尔定理的  $\xi =$ \_\_\_\_\_.



39. 已知  $L$  为  $(x-1)^2 + y^2 = 4$ , 沿着  $L$  的正向圆周, 则  $\oint_L (2y+x^3) dx + (x+2y) dy =$

\_\_\_\_\_.

40.  $\frac{1}{x^2-6x+5}$  展开为  $x$  的幂级数为\_\_\_\_\_.

三、计算题(每小题 5 分,共 50 分)

41. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+5x \sin x)}{1-\cos x}$ .

42. 已知  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2+3}{x-1} - ax + b \right) = 0$ , 求  $a, b$  的值.

43. 已知  $y = \arctan \sqrt{x}$ , 求  $\frac{dy}{dx}$  及  $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=1}$ .

44. 求曲线  $y = 3 + \ln(x^2 + 1)$  的拐点及凹凸区间.

45. 求不定积分  $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}+1} dx$ .

46.  $f(x) = \begin{cases} 1+x^2, & x < 0, \\ \cos \frac{\pi}{2}x, & x \geq 0, \end{cases}$  求  $\int_{-1}^2 f(x-1) dx$ .

47. 求过点  $(-3, -2, 0)$  且与直线  $L: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{-1}$  垂直相交的直线方程.

48. 已知二元函数  $z = \frac{x^2}{3y} + \arcsin(xy)$ , 求  $xy \frac{\partial z}{\partial x} - y^2 \frac{\partial z}{\partial y}$ .

49. 计算  $\iint_D e^{\frac{y}{x}} dx dy$ , 其中  $D$  是由  $y=x, x=3, y=0$  所围成的区域.

50. 判断级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{5^n n!}$  的敛散性.

#### 四、应用题(每小题 7 分,共 14 分)

51. 已知曲线  $y=e^{-x}$ .

(1) 求该曲线过原点的切线方程;

(2) 求该切线与曲线  $y=e^{-x}$  和  $y$  轴所围成的图形绕  $x$  轴旋转一周的旋转体体积.

52. 一个质量为  $1\text{ g}$  的质点, 受外力的作用做直线运动, 该外力和时间成正比, 和质点的速度成反比. 当  $t=10\text{ s}$  时, 质点的速度  $v$  为  $100\text{ cm/s}$ , 外力  $F$  为  $2\text{ g}\cdot\text{cm/s}^2$ , 求  $t=30\text{ s}$  时, 质点的速度. ( $\sqrt{65}\approx 8.062$ ,  $F=ma$ ,  $a$  为加速度)

### 五、证明题(6分)

53. 已知多项式  $f(x)=2x^3-6x+a$ , 证明  $f(x)$  在区间  $[-1,1]$  上至多有一个零点,  $a$  为任意常数.

# 河南省 2020 年普通高校专升本考试试题

## 高等数学

本试卷共 12 页,53 小题,满分 150 分.考试时间 120 分钟.

### 一、选择题(每小题 2 分,共 60 分)

1. 当  $x \rightarrow 0$  时,  $3x^2 - 6x$  是  $x$  的 ( )  
A. 高阶无穷小 B. 等价无穷小  
C. 同阶非等价无穷小 D. 低阶无穷小
2. 设  $f(x)$  为  $(-\infty, +\infty)$  内的奇函数, 则函数  $\sin f(x) + \ln(\sqrt{1+x^2} - x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内是 ( )  
A. 奇函数 B. 偶函数  
C. 非奇非偶函数 D. 无法判断
3. 极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{4x} =$  ( )  
A.  $e^4$  B.  $e^{-4}$   
C.  $e$  D. 1
4. 已知函数  $f(x+1) = 2x+1$ , 则  $f^{-1}(x-5) =$  ( )  
A.  $2x-9$  B.  $2x-11$   
C.  $\frac{x}{2}-3$  D.  $\frac{x}{2}-2$
5. 设函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2(x-1)}{x-1}, & x < 1 \\ 2, & x = 1 \\ x^2 - 1, & x > 1 \end{cases}$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  为 ( )  
A. 0 B. 1  
C. 2 D. 不存在
6. 设函数  $f(x) = \frac{x}{\sin x}$ , 则  $x=0$  是  $f(x)$  的 ( )  
A. 连续点 B. 可去间断点  
C. 跳跃间断点 D. 第二类间断点

7. 设函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处连续, 则下列说法正确的是 ( )  
A.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  可能不存在  
B.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  必定存在, 但不一定等于  $f(x_0)$   
C. 当  $x \rightarrow x_0$  时,  $f(x) - f(x_0)$  必为无穷小  
D.  $f(x)$  在点  $x_0$  必定可导
8. 设  $f(x)$  在  $x=a$  的某个邻域内有定义, 若  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^3} = 6$ , 则在  $x=a$  处 ( )  
A.  $f(x)$  导数存在且  $f'(a) \neq 0$  B.  $f(x)$  导数不存在  
C.  $f(x)$  取得极小值 D.  $f(x)$  不取极值
9.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-4}{x^2-4x+8} =$  ( )  
A. -1 B. 0  
C.  $\frac{1}{2}$  D. 2
10. 设  $f'(x)$  在点  $x_0$  的邻域内存在, 且  $f(x_0)$  为极大值, 则  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+2h) - f(x_0)}{h} =$  ( )  
A. 0 B.  $-\frac{1}{2}$   
C.  $\frac{1}{2}$  D. 2
11. 设  $\begin{cases} x = \cos t \\ y = t \cos t - \sin t \end{cases}$  ( $t$  为参数), 则  $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=\frac{\pi}{4}} =$  ( )  
A.  $-\sqrt{2}$  B.  $\sqrt{2}$   
C.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  D.  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
12. 极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} =$  ( )  
A.  $-\frac{1}{6}$  B. -6  
C.  $\frac{1}{6}$  D. 6
13. 设函数  $y = 3x \cdot 3^x$  在点  $x_0$  处取得极小值, 则  $x_0 =$  ( )  
A.  $-\frac{1}{\ln 3}$  B.  $-\ln 3$   
C.  $\frac{1}{\ln 3}$  D.  $\ln 3$





44. 求函数  $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 5$  的凹凸区间与拐点.

45. 已知  $f(x) = x \sin \frac{1}{x} + \frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{\ln(1+x)}$ , 求  $f(x)$  的渐近线 (不考虑斜渐近线).

46. 计算定积分  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x + 3} dx$ .

47. 已知向量  $\mathbf{a} = (4, 4, 0)$ ,  $\mathbf{b} = (3, 2, 8)$ ,  $\mathbf{c} = (1, 0, 6)$ , 求  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$



48. 设函数  $z=z(x,y)$  由方程  $x^2+y^3+3xyz^2+2z=1$  所确定, 求  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$  (其中  $6xyz+2 \neq 0$ ).

49. 计算  $\iint_D y dx dy$ , 其中  $D=\{(x,y) | x^2+y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ .

50. 将函数  $f(x)=\frac{1}{x^2+24x-25}$  展开成  $x$  的幂级数.

#### 四、应用题(每小题 7 分, 共 14 分)

51. 某文物于 1972 年 8 月发掘出土, 经研究测算该文物出土时  $^{14}\text{C}$  (放射性同位素碳-14) 标本存量为初始量  $R_0$  的 0.776 1 倍. 已知  $^{14}\text{C}$  的衰变速度与它的现存量成正比, 且它的半衰期(由初始量  $R_0$  衰变至  $\frac{R_0}{2}$  所需要的时间)为 5 730 年.

(1) 试求  $^{14}\text{C}$  的现存量与时间  $t$  (年) 的函数关系 (其中涉及的对数不必写出具体数值).

(2) 计算该文物至 1972 年 8 月大约经历了多少年, 能否认为该文物为西汉时期 (公元前 202 年 ~ 公元 8 年) 的作品并说明理由 (计算结果取整数;  $\ln 2 \approx 0.693 1, \ln 0.776 1 \approx -0.253 5$ ).

52. 已知抛物线  $y=1-x^2$  与  $x$  轴交于  $A, B$  两点, 以  $AB$  为下底的等腰梯形  $ABCD$  内接于该抛物线, 试问当  $C$  点的纵坐标为多少时, 等腰梯形的面积达到最大?

### 五、证明题(6分)

53. 设  $f(x)$  在闭区间  $[0, 1]$  上连续, 在开区间  $(0, 1)$  内可导, 且  $f(0)=0, f(1)=\frac{1}{a+1}$ , 证明: 在开区间  $(0, 1)$  内至少存在不同的两点  $\xi_1, \xi_2$ , 使得  $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=\xi_1^a+\xi_2^a$  成立(其中  $a$  为大于  $-1$  的实数).