

河南省 2022 年普通高校专升本考试试题

高等数学

本试卷共 12 页,53 小题,满分 150 分. 考试时间 120 分钟.

一、单项选择题(每小题 2 分,共 50 分)

1. 函数 $\frac{f(-x)-f(x)}{3}$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内是 ()

- A. 奇函数
- B. 偶函数
- C. 非奇非偶函数
- D. 无法判断奇偶性

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2+7x-1}{2x+5} =$ ()

- A. 2
- B. ∞
- C. 0
- D. $\frac{5}{2}$

3. 当 $x \rightarrow 0$ 时,以下等价无穷小的是 ()

- A. $1 - \cos x$ 与 $\frac{1}{2}x^2$
- B. x 与 $\tan^2 x$
- C. $x - \sin x$ 与 $\cot x$
- D. $1 - \cos x$ 与 $2x$

4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{7x-6}-\sqrt{x}}{x-1} =$ ()

- A. 1
- B. 2
- C. 3
- D. 4

5. 已知 $f(x)$ 可导且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(5x)-f(0)}{2x} = 1$, 则 $f'(0) =$ ()

- A. $\frac{5}{2}$
- B. $\frac{2}{5}$
- C. 1
- D. 5

6. 已知 $f(x) = \sqrt{2x} + \frac{1}{3} \cos 3x$, 则 $f'(x) =$ ()

- A. $\frac{1}{\sqrt{2x}} - \sin 3x$
- B. $\frac{1}{\sqrt{2x}} + \sin 3x$
- C. $-\frac{1}{\sqrt{2x}} - \sin 3x$
- D. $\frac{1}{\sqrt{2x}} - \frac{1}{3} \sin 3x$

7. 已知 $f(x) = \begin{cases} 2-x, & 0 \leq x < 1, \\ 2, & x=1, \\ -x+4, & 1 < x \leq 2, \end{cases}$ 则 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上 ()

- A. 无间断点
- B. 有最大值
- C. 有最小值
- D. 既无最大值又无最小值

8. $y = |\tan x|$ 在 $x=0$ 处 ()

- A. 可导但不连续
- B. 可导且连续
- C. 不可导但连续
- D. 不可导也不连续

9. 设 $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = t + \sin 2t, \end{cases}$ 则 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=\frac{\pi}{2}} =$ ()

- A. 1
- B. 2
- C. 3
- D. 4

10. 设 $f(x) = \begin{cases} a + 2x \sin \frac{1}{x}, & x < 0, \\ 0, & x=0, \\ \frac{\tan x}{x}, & x > 0 \end{cases}$ 是 $f(x)$ 的可去间断点, 则 $a =$ ()

- A. 0
- B. -1
- C. 1
- D. 2

11. 曲线 $y = \frac{3x^2-5x}{(x-3)(x+7)}$ 的渐近线有 ()

- A. 1 条
- B. 2 条
- C. 3 条
- D. 4 条

12. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{\ln(1-kx^2)}, & x > 0, \\ x+3, & x < 0, \end{cases}$ 且 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在, 则 $k =$ ()

- A. $\frac{1}{3}$
- B. $-\frac{1}{3}$
- C. 3
- D. -3

13. $\int f'(7x)dx =$	()	22. $f(x, y) = \sqrt{2+x^2+y^2}$ 在点(1, -1)处的梯度为	()
A. $f(x)+C$	B. $\frac{1}{7}f(7x)+C$	A. $\frac{1}{2}\mathbf{i}-\frac{1}{2}\mathbf{j}$	B. $-\frac{1}{2}\mathbf{i}-\frac{1}{2}\mathbf{j}$
C. $7f(x)+C$	D. $7f(7x)+C$	C. $\mathbf{i}-\mathbf{j}$	D. $\mathbf{i}-\frac{1}{2}\mathbf{j}$
14. 已知 $I_1 = \int_1^2 (\ln x)^2 dx$, $I_2 = \int_1^2 (\ln x)^3 dx$, 则	()	23. 二次积分 $\int_0^2 dx \int_x^2 e^{y^2} dy =$	()
A. $I_1=I_2$	B. $I_1 < I_2$	A. $\frac{1}{2}(1-e^4)$	B. $2(e^2-1)$
C. $I_1 > I_2$	D. 无法判断 I_1, I_2 的大小	C. $\frac{1}{2}(e^4-1)$	D. $4(1-e^2)$
15. 下列广义积分发散的是	()	24. 已知等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a(q-3)^n (a \neq 0)$ 收敛, 则公比 q 的取值范围是	()
A. $\int_0^{+\infty} 3xe^{-x^2} dx$	B. $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{2x^3} dx$	A. (1, 3)	B. (-1, 1)
C. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3}{1+x^2} dx$	D. $\int_0^{+\infty} \frac{6x}{x^2+1} dx$	C. (2, 4)	D. (1, 2)
16. 已知 $f(x) = \int_0^{2x} \cos t^2 dt$, 则 $f'(x) =$	()	25. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \cos 2n}{5^n}$ 的敛散性为	()
A. $\cos 4x^2$	B. $2\cos 4x^2$	A. 绝对收敛	B. 条件收敛
C. $4\sin x^2$	D. $4\cos x^2$	C. 发散	D. 不确定
17. 方程 $x^2 + y^2 - 3z = 0$ 表示的曲面是	()	二、填空题(每小题 2 分, 共 30 分)	
A. 旋转单叶双曲面	B. 圆锥面	26. 已知 $f(x) = \sqrt{x^3+2}$, 则 $f^{-1}(2) =$ _____.	
C. 旋转双叶双曲面	D. 旋转抛物面	27. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{\ln(y+e^x)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ _____.	
18. 设 $f(x)$ 在 $[-1, 3]$ 上连续, 在 $(-1, 3)$ 内可导且 $f'(x) < 0$, 则	()	28. $f(x) = 2+xe^{-x}$ 的单调减区间是 _____.	
A. $f(3) > 0$	B. $f(-1) < 0$	29. 已知函数 $f(x) = 5^x$, 则 $f^{(n)}(x) =$ _____.	
C. $f(3) > f(-1)$	D. $f(3) < f(-1)$	30. 曲线 $\begin{cases} x = \cos t + \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ y = \sin 3t \end{cases}$ 在 $t = \frac{\pi}{4}$ 处的切线方程为 _____.	
19. 以 $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x$ 为通解的二阶常系数齐次线性微分方程是	()	31. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \ln(2+t^3) dt}{\sin x} =$ _____.	
A. $y'' + 2y' - y = 0$	B. $y'' + y' - 2y = 0$	32. 函数 $y = e^x - 2$ 在区间 $[0, 1]$ 上满足拉格朗日中值定理的 $\xi =$ _____.	
C. $y'' + 2y' + y = 0$	D. $y'' - 3y' + 2y = 0$	33. 已知 $f(x)$ 的一个原函数是 $\ln x$, 则 $\int x f'(x) dx =$ _____.	
20. 设 $y = \arcsin(3x+1)$, 则 $dy =$	()	34. $\int \frac{3}{(x-3)(x-2)} dx =$ _____.	
A. $\frac{3dx}{\sqrt{1-(3x+1)^2}}$	B. $\frac{-3dx}{\sqrt{1-(3x+1)^2}}$		
C. $\frac{3dx}{\sqrt{1+(3x+1)^2}}$	D. $\frac{-3dx}{\sqrt{1+(3x+1)^2}}$		
21. 已知向量 a 和向量 $b = (-1, 2, 1)$ 平行, 与向量 $c = (1, 2, -1)$ 的数量积为 6, 则向量 a 为 ()			
A. $(-3, 6, -3)$	B. $(3, 6, 3)$		
C. $(3, 6, -3)$	D. $(-3, 6, 3)$		

35. $\int_{-\pi}^{\pi} x(x^2 + 5\cos x + 3)dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

36. 已知点(1, 2, 2)在以原点为球心的球面上, 则球面的方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

37. 已知 $u=5+e^{3x-y}$, 则 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \underline{\hspace{2cm}}$.

38. 已知 $y''=6x$, 则 $y = \underline{\hspace{2cm}}$.

39. 设 L 为圆周 $x^2+y^2=25$, 沿正方向, 则 $\oint_L (x-3y)dx + (7y^2+3x)dy = \underline{\hspace{2cm}}$.

40. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n+1)e^n}$ 的敛散性为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三、计算题(每小题 5 分, 共 50 分)

41. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2}{\ln(1+x)} - \frac{2}{x} \right]$.

42. 设二元函数 $z=f(x,y)$ 由方程 $\sin(x+3y-2z)=x+3y-2z$ 确定, 求 $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$.

43. 求 $y=3+e^{\arctan x}$ 的凹凸区间与拐点.

44. 求微分方程 $\frac{dy}{dx}=y+e^{-x}$ 的通解.

45. 计算定积分 $\int_0^4 e^{-\frac{\sqrt{x}}{2}} dx.$

46. 求不定积分 $\int \left(\frac{3}{1+x^2} - \frac{2+\ln x}{x \ln x} \right) dx.$

47. 已知积分区域 $D = \{(x,y) | 0 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 5\}$, 计算二重积分 $\iint_D \frac{x \ln y}{y \sqrt{x^2+1}} dx dy.$

48. 过点 $(1, -1, 2)$ 作直线 $\frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$ 的垂线, 求垂足的坐标.

49. 求 $f(x,y)=3y^2+6xy-x^3+5$ 的极值.

50. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n+1}$ 的收敛域.

四、证明题(6分)

51. 设 $e < a < b < e^3$, 证明: $\ln^2 b - \ln^2 a > \frac{6}{e^3}(b-a)$.

五、应用题(每小题 7 分,共 14 分)

52. 某房地产公司有 60 套公寓要出租,当月租金定为 3 000 元时,公寓会全部租出去,当月租金每增加 200 元时,就会多一套公寓租不出去,而租出去的公寓每月需花费 200 元的维修费,试问租金定为多少元时可获得最大收入?

53. 已知 D 是由 $y=2\sin x, x=\pm\frac{\pi}{2}$ 和 x 轴所围成的平面区域,试求:

- (1) 区域 D 的面积;
- (2) 区域 D 绕 x 轴旋转一周所形成的旋转体的体积.

河南省 2021 年普通高校专升本考试试题

高等数学

本试卷共 12 页,53 小题,满分 150 分. 考试时间 120 分钟.

一、选择题(每小题 2 分,共 50 分)

- | | |
|---|---|
| <p>1. 对称区间上 $f(x)$ 为奇函数, $g(x)$ 为偶函数, 则以下函数为奇函数的是 ()</p> <p>A. $f(x^4)$
B. $f(x) + g(x)$
C. $g(x)f(x)$
D. $-g(-x)$</p> <p>2. 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{2x}$ = ()</p> <p>A. $\frac{3}{2}$
B. $\frac{2}{3}$
C. 0
D. ∞</p> <p>3. 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 下列不属于无穷大量的函数是 ()</p> <p>A. $\frac{x^2+1}{\sqrt{2x^3+4}}$
B. $\lg x$
C. 3^x
D. $\arctan x$</p> <p>4. $f(x) = \begin{cases} 2x + \frac{\sin x}{x}, & x > 0, \\ x \cos x, & x \leq 0, \end{cases}$, 则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的_____间断点. ()</p> <p>A. 无穷
B. 可去
C. 跳跃
D. 振荡</p> <p>5. $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} \right) =$ ()</p> <p>A. $\frac{1}{2}$
B. $\frac{1}{4}$
C. $-\frac{1}{4}$
D. ∞</p> <p>6. 下列关于函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的命题不正确的是 ()</p> <p>A. 可导必连续
B. 可微必可导
C. 可导必可微
D. 连续必可导</p> | <p>7. $y=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n$, 则 $y^{(n)} =$ ()</p> <p>A. a_n
B. $n!$
C. 0
D. $a_n! x^n$</p> <p>8. $f(x)=\ln \sqrt{1+x}$, 则 $f'(1) =$ ()</p> <p>A. $\frac{1}{4}$
B. $-\frac{1}{4}$
C. $\frac{1}{2}$
D. $-\frac{1}{2}$</p> <p>9. 函数 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x^2-1} = 3$, 则 $f'(1) =$ ()</p> <p>A. 2
B. 3
C. 6
D. 12</p> <p>10. 曲线 $y=x^3(x-4)$ 在 $(-\infty, -4)$ 上的特性为 ()</p> <p>A. 单调递减且为凸
B. 单调递减且为凹
C. 单调递增且为凸
D. 单调递增且为凹</p> <p>11. 下列积分正确的是 ()</p> <p>A. $\int_{-1}^1 2 dx = 2$
B. $\int_{-1}^1 \sqrt{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2}$
C. $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{2}$
D. $\int_{-1}^1 (\sin x + \cos x) dx = 0$</p> <p>12. 已知 $\int f(x) dx = F(x) + C$, 则 $\int \frac{1}{x} f(\ln x) dx =$ ()</p> <p>A. $F(\ln x)$
B. $F(\ln x) + C$
C. $x F(\ln x) + C$
D. $\frac{1}{x} F(\ln x) + C$</p> <p>13. 下列正确的是 ()</p> <p>A. $\frac{d}{dx} \int f(x) dx = f(x)$
B. $d \int f(x) dx = f(x)$
C. $\frac{d}{dx} \int f(x) dx = f(x) + C$
D. $\int f'(x) dx = f(x)$</p> <p>14. 直线 $L: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{-4}$ 与平面 $\pi: x+y+z=3$ 的位置关系是 ()</p> <p>A. 直线在平面上
B. 垂直
C. 平行
D. 相交但不垂直</p> |
|---|---|

15. 方程 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$ 所表示的曲面为

- A. 椭圆锥面
C. 椭圆球面

- B. 椭圆柱面
D. 抛物柱面

16. 下列广义积分发散的是

- A. $\int_{-2}^2 \frac{dx}{x}$
B. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$
C. $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$
D. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2} dx$

17. 已知 $a > 0$, 则 $\int_{-a}^a (x^2 + x \sqrt{a^2 - x^2}) dx =$

- A. 0
B. a^3
C. $\frac{3}{2}a^3$
D. $\frac{2}{3}a^3$

18. 已知二次积分 $\int_0^3 dy \int_0^{3-y} f(x, y) dx$, 交换积分次序后得

- A. $\int_0^3 dx \int_0^x f(x, y) dy$
B. $\int_0^3 dx \int_0^{3-x} f(x, y) dy$
C. $\int_0^3 dx \int_0^{x-3} f(x, y) dy$
D. $\int_0^x dx \int_0^{y-3} f(x, y) dy$

19. $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处有一阶、二阶偏导数, 且取得极小值, 则下列成立的是

- A. $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$
B. $f(x_0, y_0) = 0$
C. $f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2 > 0, f_{xx} > 0$
D. $f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2 > 0, f_{xx} < 0$

20. 二重积分 $\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy =$ _____, 其中 $D = \{(x, y) \mid 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$

- A. 0
B. $\frac{\pi}{2}$
C. π
D. 2π

21. 已知 $z = x^2 - 2xy - y^2$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{(1,2)} =$

- A. 2
C. 6
D. -6

22. 函数 $f(x, y) = 2xy$ 在 $(-1, 2)$ 处沿 $\mathbf{l} = (2, -1)$ 的变化率为

- A. $2\sqrt{5}$
C. $-2\sqrt{5}$
D. -10

()

23. 下列是一阶线性微分方程的是

- A. $(xy + xy')^2 = xy'$
C. $x^2 y' + y = x$
D. $y'' - 2y' + y = 0$

()

24. 方程 $y'' - y' - 6y = 0$ 的通解为 $y =$

- A. $C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x}$
C. $C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x}$
D. $C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}$

()

25. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3}{4^n} x^n$ 的收敛半径为

- A. 3
B. 4
C. $\frac{1}{4}$
D. 1

二、填空题(每小题 2 分, 共 30 分)

26. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} + \ln(x+1)$ 的连续区间为 _____.

27. $f(x)$ 为可导的奇函数且 $f'(-2) = 3$, 则 $f'(2) =$ _____.

28. $y = \ln x$ 当 $x =$ _____ 时的切线平行于过点 $(1, 0), (e, 1)$ 的弦.

29. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{x+2021} =$ _____.

30. $y = \frac{2x^2 - 1}{x - 1}$ 的垂直渐近线是 _____.

31. 设曲线方程为 $\begin{cases} x = 2\cos \theta + \sin 2\theta, \\ y = 2\sin \theta + \cos 2\theta \end{cases}$ (θ 为参数), 则 $\frac{dy}{dx} \Big|_{\theta=0} =$ _____.

32. $\int x \sin x dx =$ _____.

33. $\int_0^2 \max\{x, 2-x\} dx =$ _____.

34. $\frac{d}{dx} \int_0^x \cos \sqrt{t} dt (x > 0) =$ _____.

35. $y = 4e^x + e^{-x}$ 的极值点为 _____.

36. 曲面 $e^z - 5z + xy = 3$ 在点 $(2, 1, 0)$ 处的切平面方程为 _____.

37. 二元函数 $z = 2xy + y^2$, 则 $dz \Big|_{(3,1)} =$ _____.

38. $y = \ln \sin x$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi\right]$ 上满足罗尔定理的 $\xi =$ _____.

39. 已知 L 为 $(x-1)^2 + y^2 = 4$, 沿着 L 的正向圆周, 则 $\oint_L (2y+x^3) dx + (x+2y) dy = \underline{\hspace{2cm}}$.

40. $\frac{1}{x^2-6x+5}$ 展开为 x 的幂级数为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三、计算题(每小题 5 分, 共 50 分)

41. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+5x\sin x)}{1-\cos x}$.

42. 已知 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+3}{x-1} - ax + b \right) = 0$, 求 a, b 的值.

43. 已知 $y = \arctan \sqrt{x}$, 求 $\frac{dy}{dx}$ 及 $\frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{x=1}$.

44. 求曲线 $y = 3 + \ln(x^2 + 1)$ 的拐点及凹凸区间.

45. 求不定积分 $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}+1} dx$.

47. 求过点 $(-3, -2, 0)$ 且与直线 $L: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{-1}$ 垂直相交的直线方程.

46. $f(x) = \begin{cases} 1+x^2, & x < 0, \\ \cos \frac{\pi}{2}x, & x \geq 0, \end{cases}$ 求 $\int_{-1}^2 f(x-1) dx$.

48. 已知二元函数 $z = \frac{x^2}{3y} + \arcsin(xy)$, 求 $xy \frac{\partial z}{\partial x} - y^2 \frac{\partial z}{\partial y}$.

49. 计算 $\iint_D e^{\frac{y}{x}} dx dy$, 其中 D 是由 $y=x, x=3, y=0$ 所围成的区域.

50. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{5^n n!}$ 的敛散性.

四、应用题(每小题 7 分,共 14 分)

51. 已知曲线 $y=e^{-x}$.

(1) 求该曲线过原点的切线方程;

(2) 求该切线与曲线 $y=e^{-x}$ 和 y 轴所围成的图形绕 x 轴旋转一周的旋转体体积.

52. 一个质量为 1 g 的质点,受外力的作用做直线运动,该外力和时间成正比,和质点的速度成反比.当 $t=10\text{ s}$ 时,质点的速度 v 为 100 cm/s ,外力 F 为 $2\text{ g} \cdot \text{cm/s}^2$,求 $t=30\text{ s}$ 时,质点的速度.
($\sqrt{65} \approx 8.062$, $F=ma$, a 为加速度)

五、证明题(6分)

53. 已知多项式 $f(x)=2x^3-6x+a$, 证明 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上至多有一个零点, a 为任意常数.

河南省 2020 年普通高校专升本考试试题

高等数学

本试卷共 12 页,53 小题,满分 150 分. 考试时间 120 分钟.

一、选择题(每小题 2 分,共 60 分)

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $3x^2 - 6x$ 是 x 的 ()
 A. 高阶无穷小 B. 等价无穷小
 C. 同阶非等价无穷小 D. 低阶无穷小
2. 设 $f(x)$ 为 $(-\infty, +\infty)$ 内的奇函数, 则函数 $\sin f(x) + \ln(\sqrt{1+x^2} - x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是 ()
 A. 奇函数 B. 偶函数
 C. 非奇非偶函数 D. 无法判断
3. 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{4x} =$ ()
 A. e^4 B. e^{-4}
 C. e D. 1
4. 已知函数 $f(x+1) = 2x+1$, 则 $f^{-1}(x-5) =$ ()
 A. $2x-9$ B. $2x-11$
 C. $\frac{x}{2}-3$ D. $\frac{x}{2}-2$
5. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2(x-1)}{x-1}, & x < 1 \\ 2, & x = 1 \\ x^2 - 1, & x > 1 \end{cases}$, 则 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 为 ()
 A. 0 B. 1
 C. 2 D. 不存在
6. 设函数 $f(x) = \frac{x}{\sin x}$, 则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的 ()
 A. 连续点 B. 可去间断点
 C. 跳跃间断点 D. 第二类间断点

7. 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续, 则下列说法正确的是 ()
 A. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 可能不存在
 B. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 必定存在, 但不一定等于 $f(x_0)$
 C. 当 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x) - f(x_0)$ 必为无穷小
 D. $f(x)$ 在点 x_0 必定可导
8. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某个邻域内有定义, 若 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^3} = 6$, 则在 $x=a$ 处 ()
 A. $f(x)$ 导数存在且 $f'(a) \neq 0$ B. $f(x)$ 导数不存在
 C. $f(x)$ 取得极小值 D. $f(x)$ 不取极值
9. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-4}{x^2-4x+8} =$ ()
 A. -1 B. 0
 C. $\frac{1}{2}$ D. 2
10. 设 $f'(x)$ 在点 x_0 的邻域内存在, 且 $f(x_0)$ 为极大值, 则 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{h} =$ ()
 A. 0 B. $-\frac{1}{2}$
 C. $\frac{1}{2}$ D. 2
11. 设 $\begin{cases} x = \cos t \\ y = t \cos t - \sin t \end{cases}$ (t 为参数), 则 $\frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{t=\frac{\pi}{4}} =$ ()
 A. $-\sqrt{2}$ B. $\sqrt{2}$
 C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
12. 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} =$ ()
 A. $-\frac{1}{6}$ B. -6
 C. $\frac{1}{6}$ D. 6
13. 设函数 $y = 3x \cdot 3^x$ 在点 x_0 处取得极小值, 则 $x_0 =$ ()
 A. $-\frac{1}{\ln 3}$ B. $-\ln 3$
 C. $\frac{1}{\ln 3}$ D. $\ln 3$

14. 过曲线 $y=x\ln x$ 上 M_0 点的切线平行于直线 $y=2x+1$, 则切点 M_0 的坐标是 ()
- A. $(1,0)$
B. $(e,0)$
C. $(e,1)$
D. (e,e)
15. 设 $y=f(x)$ 由方程 $y^2-3xy+x^3=1$ 确定, 则 $y' =$ ()
- A. $\frac{3x^2-3y}{2y-3x}$
B. $\frac{3y-3x^2}{2y-3x}$
C. $\frac{2y-3x}{3x^2-3y}$
D. $\frac{3x-2y}{3x^2-3y}$
16. 设函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 其二阶导数 $f''(x)$ 的图形如图所示, 则曲线 $y=f(x)$ 的拐点的个数为 ()
- A. 1 个
B. 2 个
C. 3 个
D. 4 个
-
17. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续, 在开区间 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=f(1)$, 则在 $(0,1)$ 内曲线 $y=f(x)$ 的所有切线中 ()
- A. 至少有一条平行于 x 轴
B. 至少有一条平行于 y 轴
C. 没有一条平行于 x 轴
D. 可能有一条平行于 y 轴
18. $\int \sin(1-2x)dx =$ ()
- A. $\cos(1-2x)+C$
B. $-\cos(1-2x)+C$
C. $\frac{1}{2}\cos(1-2x)+C$
D. $-\frac{1}{2}\cos(1-2x)+C$
19. 设 $\int_0^x f(t)dt = e^{2x} - 1$, 其中 $f(x)$ 为连续函数, 则 $f^{(n)}(x) =$ ()
- A. $2e^{2x}$
B. $2^{n-1}e^{2x}$
C. $2^n e^{2x}$
D. $2^{n+1} e^{2x}$
20. 曲线 $y=x$, $y=2x$ 与 $x=1$ 所围成的平面图形绕 x 轴旋转所形成旋转体的体积 $V =$ ()
- A. $\frac{7}{15}\pi$
B. π
C. $\frac{1}{\pi}$
D. $\frac{15}{7}\pi$
21. 下列广义积分收敛的是 ()
- A. $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$
B. $\int_e^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$
C. $\int_1^{+\infty} \sin x dx$
D. $\int_4^{+\infty} \frac{1}{4-x^2} dx$

22. 平面 $\pi_1: x-2y+3z+1=0$ 与 $\pi_2: 2x+y+2=0$ 的位置关系为 ()
- A. 垂直
B. 斜交
C. 平行不重合
D. 重合
23. 方程 $x^2+y^2-z=0$ 表示的二次曲面是 ()
- A. 球面
B. 圆锥面
C. 旋转抛物面
D. 柱面
24. 设函数 $z=\sin(xy^2)$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} =$ ()
- A. $y^4 \cos(xy^2)$
B. $-y^4 \cos(xy^2)$
C. $y^4 \sin(xy^2)$
D. $-y^4 \sin(xy^2)$
25. 设函数 $z=ye^{-x}$ 在点 $(0,-1)$ 处沿方向 \mathbf{l} 的方向导数最大, 则 $\mathbf{l}=$ ()
- A. $-\mathbf{i}-\mathbf{j}$
B. $\mathbf{i}+\mathbf{j}$
C. $-\mathbf{i}+\mathbf{j}$
D. $\mathbf{i}-\mathbf{j}$
26. 二次积分 $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x,y) dy$ 交换积分次序后是 ()
- A. $\int_0^1 dy \int_0^{1-y} f(x,y) dx$
B. $\int_0^1 dy \int_0^{1-x} f(x,y) dx$
C. $\int_0^{1-x} dy \int_0^1 f(x,y) dx$
D. $\int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y) dx$
27. 区域 D 由曲线 $y=1+x^2$, $y=x^2$ 与 $x=0$, $x=1$ 所围成, 则 $\iint_D (x+y) dxdy =$ ()
- A. $-\frac{4}{3}$
B. $\frac{4}{3}$
C. $-\frac{3}{4}$
D. $\frac{3}{4}$
28. 设 L 为取正向的圆周 $x^2+y^2=6$, 则曲线积分 $\oint_L (3x^2y-2y) dx + (x^3+4x) dy =$ ()
- A. 6π
B. -6π
C. 36π
D. -36π
29. 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{kx^n}{n!}$ 在 $k>0$ 时的收敛区间为 ()
- A. $(-1,1)$
B. $(-\frac{1}{k}, \frac{1}{k})$
C. $(-k,k)$
D. $(-\infty, +\infty)$

30. 用待定系数法求微分方程 $y'' - 6y' + 8y = e^{2x} \sin x$ 的特解 y^* 时, 下列 y^* 设法正确的是

()

- A. $Ce^{2x} \cos x$
B. $e^{2x} (C_1 \sin x + C_2 \cos x)$
C. $xe^{2x} (C_1 \sin x + C_2 \cos x)$
D. $x^2 e^{2x} (C_1 \sin x + C_2 \cos x)$

42. 求函数 $y = x^{\ln x}$ 的导数.

二、填空题(每小题 2 分, 共 20 分)

31. 已知 $f(1+x) = \arctan x$, $f[\varphi(x)] = x-2$, 则 $\varphi(x+2) = \underline{\hspace{2cm}}$.

32. 设当 $x \neq 0$ 时, $f(x) = \frac{\sin 2x}{x}$, $F(x)$ 在点 $x=0$ 处连续, 当 $x \neq 0$ 时, $F(x) = f(x)$, 则 $F(0) = \underline{\hspace{2cm}}$.

33. 函数 $f(x) = \int_0^x \ln(t+3) dt$ 的单调递增区间是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

34. 设 $f(x) = x^3 + 3x \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, 且 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ 存在, 则 $f'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

35. 定积分 $\int_{-2}^2 x \sqrt{4-x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

36. 设 $\int f(x) dx = F(x) + C$, 则 $\int f(\sin x) \cos x dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

37. 过点 $M_0(1, -1, 2)$ 且垂直于平面 $9x+y+9z=0$ 的直线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

38. 设 $z = \ln(x^2 + y)$, 则全微分 $dz = \underline{\hspace{2cm}}$.

39. 当 $x > 0$ 时, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(2n)!}$ 的和函数 $S(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

40. 微分方程 $y'' + y' + y = 0$ 的通解为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

43. 求不定积分 $\int \frac{1}{x(2x+1)} dx$.

三、计算题(每小题 5 分, 共 50 分)

41. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right]^{3n-2}$.

44. 求函数 $f(x)=3x^4-8x^3+6x^2+5$ 的凹凸区间与拐点.

46. 计算定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x + 3} dx$.

45. 已知 $f(x)=x\sin\frac{1}{x}+\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{\ln(1+x)}$, 求 $f(x)$ 的渐近线(不考虑斜渐近线).

47. 已知向量 $\mathbf{a}=(4,4,0)$, $\mathbf{b}=(3,2,8)$, $\mathbf{c}=(1,0,6)$, 求 $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$

48. 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $x^2+y^3+3xyz^2+2z=1$ 所确定, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ (其中 $6xyz+2\neq 0$).

49. 计算 $\iint_D y \, dx \, dy$, 其中 $D=\{(x,y) | x^2+y^2\leqslant 1, x\geqslant 0, y\geqslant 0\}$.

50. 将函数 $f(x)=\frac{1}{x^2+24x-25}$ 展开成 x 的幂级数.

四、应用题(每小题 7 分,共 14 分)

51. 某文物于 1972 年 8 月发掘出土, 经研究测算该文物出土时 ^{14}C (放射性同位素碳-14)标本存量为初始量 R_0 的 0.776 1 倍. 已知 ^{14}C 的衰变速度与它的现存量成正比, 且它的半衰期(由初始量 R_0 衰变至 $\frac{R_0}{2}$ 所需要的时间)为 5 730 年.

- (1) 试求 ^{14}C 的现存量与时间 t (年)的函数关系(其中涉及的对数不必写出具体数值).
- (2) 计算该文物至 1972 年 8 月大约经历了多少年, 能否认为该文物为西汉时期(公元前 202 年~公元 8 年)的作品并说明理由(计算结果取整数; $\ln 2 \approx 0.693 1, \ln 0.776 1 \approx -0.253 5$).

52. 已知抛物线 $y=1-x^2$ 与 x 轴交于 A, B 两点, 以 AB 为下底的等腰梯形 $ABCD$ 内接于该抛物线, 试问当 C 点的纵坐标为多少时, 等腰梯形的面积达到最大?

五、证明题(6分)

53. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续, 在开区间 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=0, f(1)=\frac{1}{a+1}$, 证明: 在开区间 $(0,1)$ 内至少存在不同的两点 ξ_1, ξ_2 , 使得 $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=\xi_1^a+\xi_2^a$ 成立 (其中 a 为大于 -1 的实数).