第一章 函数、极限与连续

第一节 函　　数

知识脉络

- 函数
  - 函数的相关概念
    - 集合、区间与邻域
    - 函数的定义
    - 特殊函数
  - 函数的基本性质
    - 函数的有界性
    - 函数的奇偶性
    - 函数的单调性
    - 函数的周期性
  - 基本初等函数
    - 幂函数
    - 指数函数
    - 对数函数
    - 三角函数
    - 反三角函数

知识清单

一、函数的相关概念

1. 集合、区间与邻域

1)集合

一般地，我们把研究对象统称为元素，把一些元素组成的总体叫作集合，简称为集. 通常用大写字母 A，B，C，…表示集合，用小写字母 a，b，c，…表示集合中的元素. 特别地，把不含任何元素的集合称为空集，记作$\varnothing$.

给定一个集合，它的元素必须是确定的，即对于给定的集合，一个元素在或不在这个集合中是确定的. 如果 a 是集合 A 中的元素，就说 a 属于集合 A，记作 $a\in A$；如果 a 不是集合 A 中的元素，就说 a 不属于集合 A，记作 $a\notin A$. 此外，给定集合中的元素必须是互不相同的，即集合中的元素具有互异性.

备考提示

数学中一些常用的数集及其记法：

全体非负整数组成的集合称为非负整数集(或自然数集)，记作 $\mathbf{N}$；

全体正整数组成的集合称为正整数集，记作 $\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$；

全体整数组成的集合称为整数集，记作 $\mathbf{Z}$；

全体有理数组成的集合称为有理数集，记作 $\mathbf{Q}$；

全体实数组成的集合称为实数集，记作 $\mathbf{R}$.

给定两个集合 A，B，如果集合 A 中的元素都是集合 B 中的元素，那么称集合 A 是集合 B 的子集，记作 $A\subset B$(或 $B\supset A$)，读作“A 包含于 B”(或“B 包含 A”).

设 A，B 是两个集合. 由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素组成的集合，称为集合 A 与 B 的并集，记作 $A\cup B$，读作“A 并 B”；由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素组成的集合，称为集合 A 与 B 的交集，记作 $A\cap B$，读作“A 交 B”.

2)区间

设 a，b 是两个实数，且 $a<b$，规定：

满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的实数 x 的集合叫作闭区间，表示为$[a,b]$；

满足不等式 $a<x<b$ 的实数 x 的集合叫作开区间，表示为(a,b)；

满足不等式 $a\leqslant x<b$ 或 $a<x\leqslant b$ 的实数 x 的集合叫作半开半闭区间，分别表示为$[a,b)$，$(a,b]$.

实数集 $\mathbf{R}$ 可以用区间表示为$(-\infty,+\infty)$，其中“∞”读作“无穷大”，“$-\infty$”读作“负无穷大”，“$+\infty$”读作“正无穷大”. 此外，还可以把满足 $x\geqslant a$，$x>a$，$x\leqslant b$，$x<b$ 的实数 x 的集合，用区间分别表示为$[a,+\infty)$，$(a,+\infty)$，$(-\infty,b]$，$(-\infty,b)$.

3)邻域

设 a，δ 是两个实数，且 $\delta>0$，我们把满足 $|x-a|<\delta$ 的实数 x 的集合，即开区间$(a-\delta,a+\delta)$称为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\delta)$；把满足 $0<|x-a|<\delta$ 的实数 x 的集合，也即点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后的集合，称

为点 a 的去心 δ 邻域，记作$\mathring{U}(a,\delta)$.

注：实际上，邻域就表示以点 a 为中心的任何开区间.

2. 函数的定义

定义 1　设 D 是一个实数集. 如果存在一个对应法则 f，使得对 D 中的每一个数 x，在 $\mathbf{R}$ 中都有唯一确定的数 y 与之对应，那么称对应法则 f 为定义在 D 上的一个函数，记为

$$y=f(x),\quad x\in D.$$

其中 x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为函数 f 的定义域.

注：函数的定义域通常由问题的实际背景确定，如果只给出解析式 $y=f(x)$，而没有指明它的定义域，那么函数的定义域就是指能使这个式子有意义的实数的集合.

例题 1.1.1　求下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{x+3}$；　(2) $y=\dfrac{1}{x+2}$；　(3) $y=\ln(x-1)$.

【解析】 (1)因为二次根式的被开方数不小于 0，所以 $x+3\geqslant 0$，解得 $x\geqslant -3$. 故 $y=\sqrt{x+3}$的定义域为$[-3,+\infty)$.

(2)因为分式的分母不能为 0，所以 $x+2\neq 0$，即 $x\neq -2$. 故 $y=\dfrac{1}{x+2}$的定义域为$(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)$.

(3)因为对数的真数大于 0，所以 $x-1>0$，解得 $x>1$. 故 $y=\ln(x-1)$的定义域为$(1,+\infty)$.

例题 1.1.2　函数 $f(x)=\sqrt{x-3}+\arcsin\dfrac{1}{x}$的定义域是(　　).

A. $(-\infty,+\infty)$　　B. $[1,3]$

C. $(-\infty,0)\cup(0,3)$　　D. $[3,+\infty)$

【解析】 使根式$\sqrt{x-3}$有意义的实数 x 的集合是$\{x\mid x-3\geqslant 0\}=\{x\mid x\geqslant 3\}$，使 $\arcsin\dfrac{1}{x}$有意义的实数 x 的集合是$\left\{x\,\middle|\,-1\leqslant\dfrac{1}{x}\leqslant 1\right\}=\{x\mid x\geqslant 1$ 或 $x\leqslant -1\}$. 因此，函数 $f(x)$的定义域是$\{x\mid x\geqslant 3\}\cap\{x\mid x\geqslant 1$ 或 $x\leqslant -1\}=\{x\mid x\geqslant 3\}$，即$[3,+\infty)$. 故本题选 D.

函数定义中，对 D 中的每一个数 x，按照对应法则，总有唯一确定的值 y 与之对应，这个值称为函数在点 x 处的函数值，记作 $f(x)$. 当自变量 x 遍取 D 的所有数值时，对应的函数值 $f(x)$的全体构成的集合称为函数 f 的值域，记作 $f(D)$，即

$$f(D)=\{y\mid y=f(x),x\in D\}.$$

由函数的定义可以看出，函数的定义域与对应法则是确定函数的两个必不可少的要素. 也就是说，如果两个函数的对应法则和定义域都相同，那么这两个函数就是相同的函数.

3. 特殊函数

1)分段函数

定义 2　在自变量的不同变化范围中，对应法则用不同式子来表示的函数，称为分段函数.

例如,分段函数 $f(x)=\begin{cases} x, & x\geqslant 0, \\ -x, & x<0, \end{cases}$ 它的定义域为 $\mathbf{R}$,当 $x\in(-\infty,0)$时,对应的函数值 $f(x)=-x$;当 $x\in[0,+\infty)$时,对应的函数值 $f(x)=x$.

例题 1.1.3　设函数 $f(x)=\begin{cases} 1+\log_2(1-x), & x<1, \\ 2^{x-2}, & x\geqslant 1, \end{cases}$ 则 $f(-1)+f(\log_2 4)=$ ________.

【解析】 由题意,得 $f(-1)=1+\log_2 2=2$,$f(\log_2 4)=f(2)=2^{2-2}=1$,所以 $f(-1)+f(\log_2 4)=3$.

2)复合函数

定义 3　设 $y=f(x)$和 $u=g(x)$是两个函数.如果 $y=f(x)$的定义域包含 $u=g(x)$的值域,那么定义在 $u=g(x)$定义域上的函数 $y=f(g(x))$称为由 $u=g(x)$与 $y=f(x)$构成的复合函数,变量 u 称为中间变量.

函数 g 与函数 f 构成的复合函数,即按"先 g 后 f"的次序复合的函数,通常记为 $f\circ g$,即

$$(f\circ g)(x)=f(g(x)).$$

例如,取 $f(x)=\sin x$,$g(x)=x^2$,则 $g(x)$与 $f(x)$构成的复合函数为 $f(g(x))=\sin x^2$,$f(x)$与 $g(x)$构成的复合函数为 $g(f(x))=\sin^2 x$.

注:(1)不是任何两个函数都可以构成复合函数.例如,函数 $y=\arcsin u$ 与函数 $u=2+x^2$ 就不能构成复合函数.因为函数$y=\arcsin u$ 的定义域为$[-1,1]$,而 $u=2+x^2\geqslant 2$,所以两函数不满足复合函数的条件.

(2)复合函数可以有多个中间变量,如 $y=\mathrm{e}^u$,$u=\sqrt{v}$,$v=x+1$ 复合成函数 $y=\mathrm{e}^{\sqrt{x+1}}$,这里 u,v 都是中间变量.

例题 1.1.4　设 $f(x)=\begin{cases} 1, & |x|\leqslant 1, \\ 0, & |x|>1, \end{cases}$ $g(x)=\begin{cases} 2-x^2, & |x|\leqslant 1, \\ 2, & |x|>1, \end{cases}$ 求 $f(g(x))$,$g(f(x))$.

【解析】 $f(g(x))=\begin{cases} 1, & |g(x)|\leqslant 1, \\ 0, & |g(x)|>1 \end{cases}=\begin{cases} 1, & |x|=1, \\ 0, & |x|\neq 1. \end{cases}$

$g(f(x))=\begin{cases} 2-[f(x)]^2, & |f(x)|\leqslant 1, \\ 2, & |f(x)|>1 \end{cases}=\begin{cases} 1, & |x|\leqslant 1, \\ 2, & |x|>1. \end{cases}$

例题 1.1.5　下列函数是由哪些较简单的函数复合而成的?

(1)$y=\mathrm{e}^{-x}$;　(2)$y=\sin^2(1+2x)$;　(3)$y=\arccos\sqrt{\tan(a^2+x^2)}$.

【解析】 (1)$y=\mathrm{e}^{-x}$是由 $y=\mathrm{e}^u$ 与 $u=-x$ 复合而成的.

(2)$y=\sin^2(1+2x)$是由 $y=\sin^2 u$ 与 $u=1+2x$ 复合而成的.

(3)$y=\arccos\sqrt{\tan(a^2+x^2)}$是由 $y=\arccos u$,$u=\sqrt{v}$,$v=\tan w$,$w=a^2+x^2$ 复合而成的.

3)反函数

设函数 $y=f(x)$的定义域为 D,值域为 $f(D)$.如果对任一 $y\in f(D)$,都存在唯一的 $x\in D$,使得 $f(x)=y$,即确定了一个以 y 为自变量,x 为因变量的函数,那么称这个新确定的函数为 $y=f(x)$的反函数,记为 $x=f^{-1}(y)$.由于习惯上用 x 表示自变量,用 y 表示因变量,所以将反函数中的 x 与 y 互换位置,即记为 $y=f^{-1}(x)$,$x\in f(D)$.

注:从函数图像上来看,两个互为反函数的函数,它们的图像关于直线 $y=x$ 对称.

备考提示

求函数 $y=f(x)$ 的反函数，通常是把解析式 $y=f(x)$ 变形为 x 关于 y 的等式 $x=g(y)$，然后互换 x 与 y 的位置，得到 $y=g(x)$，函数 $y=g(x)$ 即为函数 $y=f(x)$ 的反函数.

例题 1.1.6　求函数 $y=\dfrac{3x-5}{2x+1}$ 的反函数.

【解析】 在 $y=\dfrac{3x-5}{2x+1}$ 两边同时乘 $2x+1$，移项整理得

$$x(3-2y)=5+y,$$

等号两边同时除以 $3-2y$，得

$$x=\frac{5+y}{3-2y}.$$

故函数 $y=\dfrac{3x-5}{2x+1}$ 的反函数为 $y=\dfrac{5+x}{3-2x}$.

例题 1.1.7　求函数 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 的反函数.

【解析】 分别以 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 的两边为指数，e 为底数，得

$$e^y=x+\sqrt{x^2+1},$$

移项整理得

$$\sqrt{x^2+1}=e^y-x,$$

等号两边同时平方，整理得

$$x=\frac{e^y-e^{-y}}{2}.$$

故函数 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 的反函数为 $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$.

4)隐函数

如果变量 x 与变量 y 满足一个方程 $F(x,y)=0$，且在一定条件下，当 x 取某区间内的任一值时，相应地总有满足这方程的唯一的 y 值存在，那么就说方程 $F(x,y)=0$ 在该区间确定了一个隐函数 $y=f(x)$.

例如，方程 $x^2+y^2=1$ 在 $[-1,1]$ 上确定了两个隐函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 和 $y=-\sqrt{1-x^2}$.

二、函数的基本性质

1. 函数的有界性

定义 4　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X\subset D$. 若存在一个正数 M，使得对任一 $x\in X$，恒有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$ 在 X 上有界，或称 $f(x)$ 是 X 上的有界函数. 若不存在这样的正数 M，则称 $f(x)$ 在 X 上无界.

例如，函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界，因为对任何实数 x，恒有 $|\sin x|\leqslant 1$. 又如，函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 上无界，在 $[1,+\infty)$ 上有界.

例题 1.1.8　判断下列函数在给定区间上是否有界.

(1) $y=x, x\in(-\infty,+\infty)$;

(2) $y=\dfrac{1}{x^2+1}, x\in(-\infty,+\infty)$;

(3) $y=e^x, x\in(-\infty,0)$;

(4) $y=\arctan x, x\in(-\infty,+\infty)$.

【解析】 (1) 显然，函数 $y=x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上无界.

(2) 因为当 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时，$\left|\dfrac{1}{x^2+1}\right|\leqslant\dfrac{1}{1}=1$，所以函数 $y=\dfrac{1}{x^2+1}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界.

(3) 因为当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$|e^x|\leqslant e^0=1$，所以函数 $y=e^x$ 在 $(-\infty,0)$ 上有界.

(4) 因为当 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时，$|\arctan x|\leqslant\dfrac{\pi}{2}$，所以函数 $y=\arctan x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界.

2. 函数的奇偶性

定义 5　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，且 D 关于原点对称，即对任一 $x\in D$，都有 $-x\in D$. 若

$$f(-x)=f(x)$$

对一切 $x\in D$ 成立，则称 $f(x)$ 为偶函数；若

$$f(-x)=-f(x)$$

对一切 $x\in D$ 成立，则称 $f(x)$ 为奇函数.

从函数图像上看，偶函数的图像关于 y 轴对称，奇函数的图像关于原点对称.

例题 1.1.9　判断下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=x^2(1+x^2)$;

(2) $f(x)=x(x+1)(x-1)$.

【解析】 (1) 因为函数 $f(x)=x^2(1+x^2)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且

$$f(-x)=(-x)^2[1+(-x)^2]=x^2(1+x^2)=f(x),$$

所以 $f(x)=x^2(1+x^2)$ 是偶函数.

(2) 因为函数 $f(x)=x(x+1)(x-1)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且

$$f(-x)=(-x)[(-x)+1][(-x)-1]=-x(x+1)(x-1)=-f(x),$$

所以 $f(x)=x(x+1)(x-1)$ 是奇函数.

注：在判断函数的奇偶性时，一定要先判断函数的定义域是否关于原点对称，再判断 $f(x)$ 与 $f(-x)$ 的关系.

3. 函数的单调性

定义 6　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$. 若对于 I 上任意两点 x_1,x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称 $f(x)$ 在 I 上是单调增加的；若对于区间 I 上任意两点 x_1,x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)>f(x_2),$$

则称 $f(x)$ 在 I 上是单调减少的.

例题 1.1.10　判断下列函数的单调性.

(1) $f(x)=\dfrac{1}{1-x}, x\in(-\infty,1)$;

(2) $f(x)=x^2-2x, x\in(1,+\infty)$.

【解析】 (1)任取 $x_1, x_2\in(-\infty,1)$，且 $x_1<x_2$，则

$$1-x_1>1-x_2>0,$$

从而

$$\frac{1}{1-x_1}<\frac{1}{1-x_2},$$

即得

$$f(x_1)<f(x_2).$$

故 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$在$(-\infty,1)$上单调增加.

(2)任取 $x_1, x_2\in(1,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，则

$$x_1+x_2>2, x_2-x_1>0,$$

从而

$$f(x_2)-f(x_1)=x_2^2-x_1^2-2(x_2-x_1)=(x_2+x_1-2)(x_2-x_1)>0,$$

即得

$$f(x_1)<f(x_2).$$

故 $f(x)=x^2-2x$ 在$(1,+\infty)$上单调增加.

注：作差与作商是判断函数单调性常用的方法，需要注意的是，作商判断单调性时，要考虑函数值的正负.

4. 函数的周期性

定义 7　设函数 $f(x)$的定义域为 D. 若存在一个正数 T，使得对任一 $x\in D$，有$(x+T)\in D$，且

$$f(x+T)=f(x)$$

恒成立，则称 $f(x)$为周期函数，同时称 T 为 $f(x)$的一个周期. 如果函数 $f(x)$的所有周期中，存在一个最小的周期 T_0，那么称 T_0 为 $f(x)$的最小正周期.

注：并非所有的周期函数都有最小正周期. 例如，对狄利克雷函数 $D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 是有理数},\\ 0, & x\text{ 是无理数},\end{cases}$ 任何正有理数都是它的周期，由于不存在最小的正有理数，因此它没有最小正周期.

例题 1.1.11　判断下列函数的周期性，如果是周期函数，写出它们的最小正周期.

(1) $f(x)=\tan 2x$；　(2) $f(x)=x\tan x$；　(3) $f(x)=|\sin 2x|$.

【解析】 (1)函数 $f(x)=\tan 2x$ 是周期函数，它的最小正周期是$\dfrac{\pi}{2}$.

(2)函数 $f(x)=x\tan x$ 不是周期函数.

(3)函数 $f(x)=|\sin 2x|$是周期函数，它的最小正周期是$\dfrac{\pi}{2}$.

注：如果函数 $f(x)$的周期是 T，那么函数 $f(\omega x)(\omega>0)$的周期是$\dfrac{T}{\omega}$.

三、基本初等函数

1. 幂函数

形如 $y=x^a$（a 为常数）的函数称为幂函数. $a=1,2,3,\frac{1}{2},-1$ 时，幂函数 $y=x^a$ 的图像如图 1.1.1 所示.

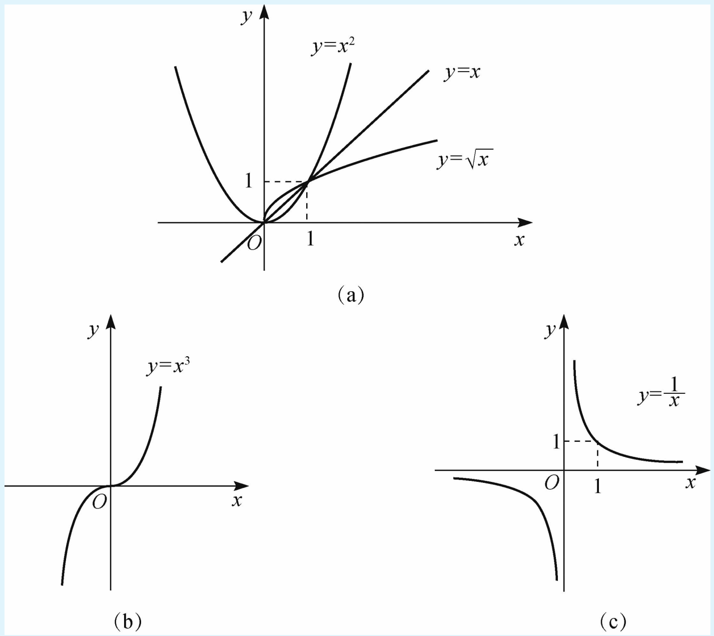

图 1.1.1

幂函数 $y=x^a$ 的图像恒过点(1,1). 当 $a>0$ 时，幂函数 $y=x^a$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调增加；当 $a<0$ 时，幂函数 $y=x^a$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调减少.

备考提示

指数幂及其运算性质：

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m};\ a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}};\ a^m a^n=a^{m+n};\ (a^m)^n=a^{mn};\ (ab)^m=a^m b^m.$$

其中 $a>0,b>0,m\in\mathbf{R},n\in\mathbf{R}$.

2. 指数函数

形如 $y=a^x$（$a>0,a\neq1$）的函数称为指数函数. 指数函数的定义域为 $\mathbf{R}$，值域为 $(0,+\infty)$，它的图像如图 1.1.2 所示.

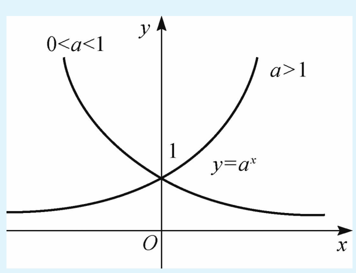

图 1.1.2

指数函数 $y=a^x$ 的图像恒过点(0,1). 当 $a>1$ 时,指数函数 $y=a^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调增加;当 $0<a<1$ 时,指数函数 $y=a^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调减少.

3. 对数函数

形如 $y=\log_a x\ (a>0,a\neq 1)$ 的函数称为对数函数. 对数函数的定义域为 $(0,+\infty)$,值域为 $\mathbf{R}$,它的图像如图 1.1.3 所示.

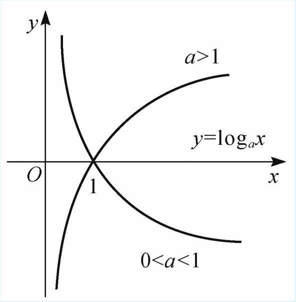

图 1.1.3

特别地,以 10 为底的对数函数称为常用对数函数,简记为 $y=\lg x$;以 e(e=2.718 28…是一个无理数)为底的对数函数称为自然对数函数,简记为 $y=\ln x$.

对数函数 $y=\log_a x$ 的图像恒过点(1,0). 当 $a>1$ 时,对数函数 $y=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调增加;当 $0<a<1$ 时,对数函数 $y=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调减少.

注: 对于确定的实数 $a\ (a>0,a\neq 1)$,指数函数 $y=a^x$ 与对数函数 $y=\log_a x$ 互为反函数,它们的图像关于直线 $y=x$ 对称.

备考提示

对数的运算性质:

$\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$;　　$\log_a \dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$;

$\log_a M^n=n\log_a M$;　　$\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$(换底公式).

其中 $a>0$,且 $a\neq 1$;$b>0$;$c>0$,且 $c\neq 1$;$M>0$,$N>0$;$n\in\mathbf{R}$.

4. 三角函数

正弦函数 $y=\sin x$、余弦函数 $y=\cos x$、正切函数 $y=\tan x$、余切函数 $y=\cot x$ 统称为三角函数,它们的图像如图 1.1.4 所示.

正弦函数 $y=\sin x$ 和余弦函数 $y=\cos x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,值域为 $[-1,1]$;正切函数 $y=\tan x$ 的定义域为 $\left\{x\,\middle|\,x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$,值域为 $\mathbf{R}$;余切函数 $y=\cot x$ 的定义域为 $\{x\,|\,x\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$,值域为 $\mathbf{R}$.

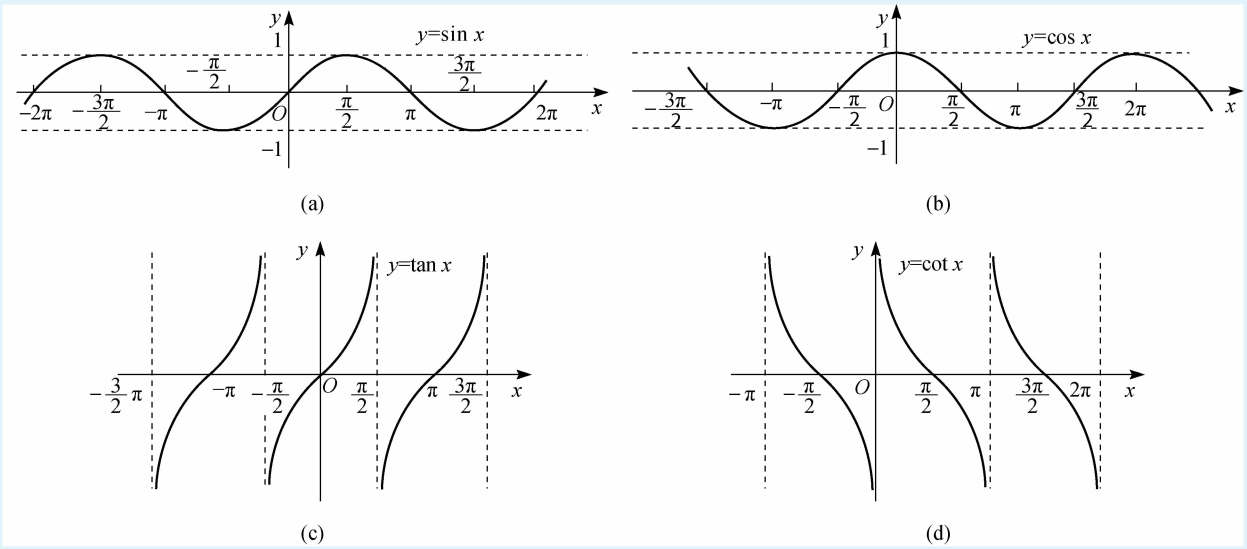

图 1.1.4

备考提示

三角函数的常用公式：

$\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$； $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$；

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$； $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$；

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$； $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$.

5. 反三角函数

正弦函数 $y=\sin x$ 在区间$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$上的反函数，称为反正弦函数，记作 $y=\arcsin x$，其定义域为$[-1,1]$，值域为$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$，图像如图 1.1.5(a)所示.

余弦函数 $y=\cos x$ 在区间$[0,\pi]$上的反函数，称为反余弦函数，记作 $y=\arccos x$，其定义域为$[-1,1]$，值域为$[0,\pi]$，图像如图 1.1.5(b)所示.

正切函数 $y=\tan x$ 在区间$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$上的反函数，称为反正切函数，记作 $y=\arctan x$，其定义域为 $\mathbf{R}$，值域为$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$，图像如图 1.1.5(c)所示.

余切函数 $y=\cot x$ 在区间$(0,\pi)$上的反函数，称为反余切函数，记作 $y=\operatorname{arccot} x$，其定义域为 $\mathbf{R}$，值域为$(0,\pi)$，图像如图 1.1.5(d)所示.

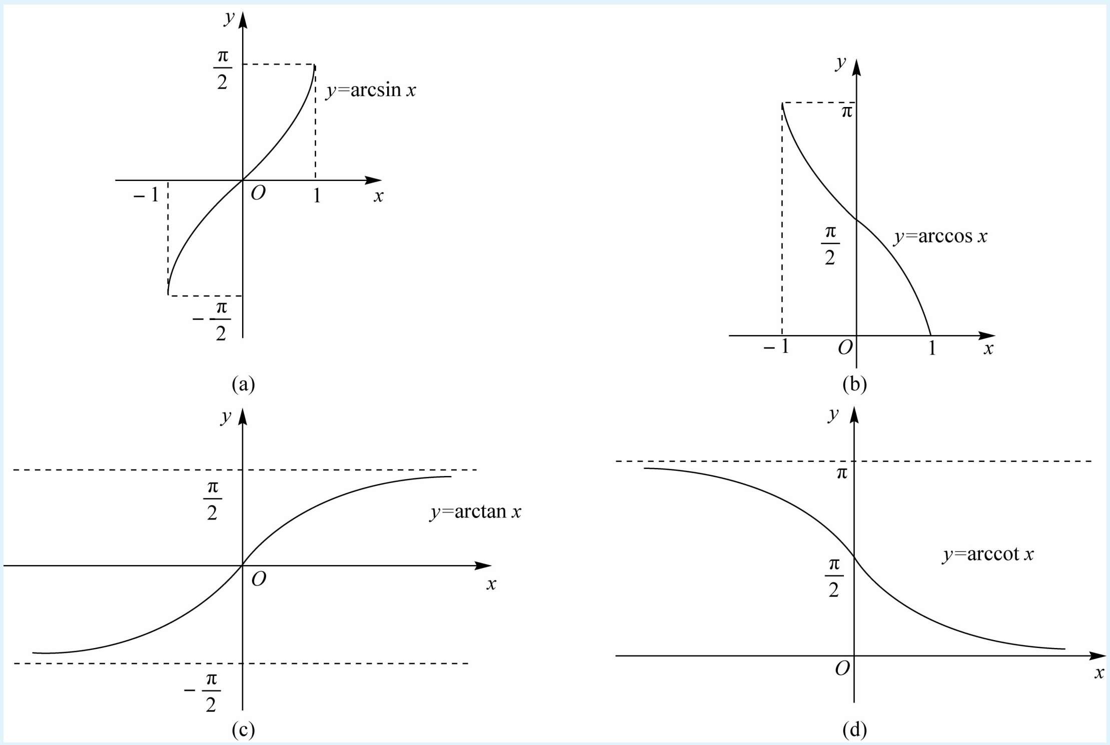

图 1.1.5

定义 8　由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合所构成的函数，称为初等函数.

巩固练习

1. 函数 $f(x)=\sin\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 的定义域为(　　).

A. $(-\infty,0)$　　B. $(-\infty,0]$　　C. $(0,+\infty)$　　D. $[0,+\infty)$

2. 函数 $f(x)=\sqrt{3-x}+\ln(x-2)$ 的定义域为(　　).

A. $(2,3]$　　B. $[3,+\infty)$　　C. $(-\infty,2)$　　D. $[2,3)$

3. 函数 $f(x)=\arcsin\dfrac{x+1}{2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ 的定义域为(　　).

A. $[-3,-1]$　　B. $(-3,-1]$　　C. $[-3,-1)$　　D. $(-3,-1)$

4. 函数 $y=\arcsin|x-2|+\dfrac{1}{\sqrt{e^x-1}}$ 的定义域为(　　).

A. $(1,3]$　　B. $[1,3)$　　C. $(0,3)$　　D. $[1,3]$

5. 函数 $f(x)=\dfrac{x-1}{\ln x}+\sqrt{16-x^2}$ 的定义域为(　　).

A. $(0,1)$　　B. $(0,1)\cup(1,4)$

C. $(0,4)$　　D. $(0,1)\cup(1,4]$

6. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\leqslant 1, \\ x+\dfrac{6}{x}-6, & x>1, \end{cases}$ 则 $f(f(-3))=$(　　).

A. $\dfrac{11}{3}$　　B. 9　　C. $\dfrac{2}{3}$　　D. 6

7. 设函数 $y=2+\ln(x+3)$,则此函数的反函数是(　　).

A. $y=\mathrm{e}^{2x+3}-3$　　B. $y=\mathrm{e}^{x-2}-3$

C. $x=\ln(y-2)-3$　　D. $y=\ln(x-2)-3$

8. 函数 $y=\sqrt{x-2}+1(x\geqslant 2)$ 的反函数是(　　).

A. $y=2-(x-1)^2(x\geqslant 2)$　　B. $y=2+(x-1)^2(x\geqslant 2)$

C. $y=2-(x-1)^2(x\geqslant 1)$　　D. $y=2+(x-1)^2(x\geqslant 1)$

9. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$在其定义域内是(　　).

A. 有界函数　　B. 无界函数　　C. 奇函数　　D. 偶函数

10. 已知函数 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数. 若 $f(x)$的最小正周期为 4,且 $f(1)>0$,$f(3)=\dfrac{m-3}{m+1}$,则 m 的取值范围是(　　).

A. $-3<m<1$　　B. $m>1$ 或 $m<-3$　　C. $-1<m<3$　　D. $m>3$ 或 $m<-1$

第二节　极　　限

知识脉络

- 极限
  - 数列极限
    - 数列与数列极限的定义
    - 收敛数列的性质
  - 函数极限
    - 自变量趋于有限值时函数的极限
    - 单侧极限
    - 自变量趋于无穷时函数的极限
    - 函数极限的性质
  - 无穷小量与无穷大量
    - 无穷小量与无穷大量的定义
    - 无穷小量的比较
    - 等价无穷小量因子替换求极限
  - 两个重要极限

9. 讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x$ 的连续性，若有间断点，判断其类型.

10. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,2a]$ 上连续，且 $f(0)=f(2a)$. 证明：在 $[0,a]$ 上有一点 ξ，使得 $f(\xi)=f(\xi+a)$.

考点总结

考点一 求函数的定义域和函数值

方法突破

1. 分段函数的定义域

分段函数的定义域是各分段区域的并集.

2. 初等函数的定义域

在没有特别指明的情况下，函数 $y=f(x)$ 的定义域是使 $f(x)$ 有意义的实数 x 的集合. 特别地，若所求函数是由几个函数经有限次四则运算所构成的，则所求函数的定义域就是这几个函数的定义域的交集.

3. 复合函数的定义域

若 $f(x)$ 的定义域为 I_1，则复合函数 $f(g(x))$ 的定义域为 $I=\{x|g(x)\in I_1\}$，特别地，若 $f(x)$ 的定义域为 (a,b)，则复合函数 $f(g(x))$ 的定义域为 $I=\{x|a<g(x)<b\}$.

例题 1 求下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{1}{x-1}$； (2) $y=\ln(1-x^2)$； (3) $y=\arccos(2x+1)$.

【解析】 (1) 使 $\dfrac{1}{x-1}$ 有意义的实数 x 的取值范围是 $\{x|x-1\neq0\}=\{x|x\neq1\}$，即 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$，所以 $y=\dfrac{1}{x-1}$ 的定义域为 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$；

(2) 使 $\ln(1-x^2)$ 有意义的实数 x 的取值范围是 $\{x|1-x^2>0\}=\{x|-1<x<1\}$，即 $(-1,1)$，所以 $y=\ln(1-x^2)$ 的定义域为 $(-1,1)$；

(3) 使 $\arccos(2x+1)$ 有意义的实数 x 的取值范围是 $\{x|-1\leqslant2x+1\leqslant1\}=\{x|-1\leqslant x\leqslant0\}$，即 $[-1,0]$，所以 $y=\arccos(2x+1)$ 的定义域为 $[-1,0]$.

例题 2 函数 $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{3}-1}$ 的定义域为________.

【答案】 $[3,+\infty)$

【解析】 使 $\sqrt{\dfrac{x}{3}-1}$ 有意义的实数 x 的取值范围是 $\left\{x\,\middle|\,\dfrac{x}{3}-1\geqslant0\right\}=\{x|x\geqslant3\}$，即 $[3,+\infty)$，故函数 $f(x)$ 的定义域为 $[3,+\infty)$.

例题 3　函数 $y=\arcsin(1-x)+\frac{1}{2}\lg\frac{1+x}{1-x}$ 的定义域为(　　).

A. $(0,1)$　　B. $[0,1)$　　C. $(0,1]$　　D. $[0,1]$

【答案】 B

【解析】 使 $\arcsin(1-x)$ 有意义的实数 x 的取值范围是 $\{x\mid -1\leqslant 1-x\leqslant 1\}=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 2\}$，即 $[0,2]$；使 $\frac{1}{2}\lg\frac{1+x}{1-x}$ 有意义的实数 x 的取值范围是 $\left\{x\,\middle|\,\frac{1+x}{1-x}>0\right\}=\{x\mid(1+x)(1-x)>0\}=\{x\mid -1<x<1\}$，即 $(-1,1)$. 因此，题中函数的定义域为 $(-1,1)\cap[0,2]=[0,1)$.

例题 4　函数 $f(x)=\sqrt{4-x^2}+\frac{1}{\ln\cos x}$ 的定义域为__________.

【答案】 $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

【解析】 使 $\sqrt{4-x^2}$ 有意义的实数 x 的集合是 $\{x\mid 4-x^2\geqslant 0\}=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 2\}$，即 $[-2,2]$；使 $\frac{1}{\ln\cos x}$ 有意义的实数 x 的集合是 $\{x\mid 0<\cos x<1\}=\{x\mid -\frac{\pi}{2}+2k\pi<x<2k\pi$ 或 $2k\pi<x<\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$，故函数 $f(x)$ 的定义域为 $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

例题 5　设函数 $f(x)$ 的定义域是 $[-2,1]$，则函数 $f(3x-5)$ 的定义域是__________.

【答案】 $[1,2]$

【解析】 根据题意，令 $-2\leqslant 3x-5\leqslant 1$，解得 $1\leqslant x\leqslant 2$，所以复合函数 $f(3x-5)$ 的定义域为 $[1,2]$.

例题 6　设 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$，则 $f(9x^2)$ 的定义域是__________.

【答案】 $\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$

【解析】 根据题意，令 $0\leqslant 9x^2\leqslant 1$，解得 $-\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant\frac{1}{3}$，所以函数 $f(9x^2)$ 的定义域为 $\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$.

例题 7　如果函数 $f(x)$ 的定义域是 $\left[-\frac{1}{3},3\right]$，则 $f\left(\frac{1}{x}\right)$ 的定义域是(　　).

A. $\left[-3,\frac{1}{3}\right]$　　B. $[-3,0)\cup\left(0,\frac{1}{3}\right]$

C. $(-\infty,-3]\cup\left[\frac{1}{3},+\infty\right)$　　D. $(-\infty,-3]\cup\left(0,\frac{1}{3}\right]$

【答案】 C

【解析】 根据题意，令 $-\frac{1}{3}\leqslant\frac{1}{x}\leqslant 3$，解得 $x\geqslant\frac{1}{3}$ 或 $x\leqslant -3$，所以函数 $f\left(\frac{1}{x}\right)$ 的定义域为 $(-\infty,-3]\cup\left[\frac{1}{3},+\infty\right)$.

例题 8　若函数 $f(x+1)$ 的定义域是 $[-1,1]$，则函数 $f(x)$ 的定义域是(　　).

A. $[0,2]$　　B. $[-1,1]$　　C. $[-2,0]$　　D. $[-2,2]$

【答案】 A

【解析】 令 $u=x+1$，则 $x=u-1$，于是 $f(x)$ 的定义域即为 $f(u-1)$ 的定义域. 由题意，$f(u)$ 的定义域为 $[-1,1]$，令 $-1\leqslant u-1\leqslant 1$，解得 $0\leqslant u\leqslant 2$，所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0,2]$.

例题 9　已知函数 $f(x)=(x-1)^2+2$，则 $f(f(2))=$________.

【答案】 6

【解析】 $f(2)=(2-1)^2+2=3$，$f(f(2))=f(3)=(3-1)^2+2=6$.

例题 10　设 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & |x|>1,\\ 0, & |x|\leqslant 1,\end{cases}$ 则 $f(f(2\,021))=$________.

【答案】 0

【解析】 根据题意，$f(2\,021)=\frac{1}{2\,021}<1$，所以 $f(f(2\,021))=f\left(\frac{1}{2\,021}\right)=0$.

考点二　函数基本性质的判定和应用

方法突破

1. 利用定义判定函数的基本性质

利用函数有界性、奇偶性、单调性、周期性的定义直接判定函数的基本性质. 需要注意的是，判定奇偶性时要先判断函数的定义域是否关于原点对称.

2. 利用图像判定函数的基本性质

有界函数的图像夹在两条平行于 x 轴的直线之间；奇函数的图像关于原点对称；偶函数的图像关于 y 轴对称；单调增加的函数的图像呈上升的趋势；单调减少的函数的图像呈下降趋势；周期函数的图像具有周期性.

3. 复合函数的奇偶性与单调性

若 $g(x)$ 是偶函数，则 $f(g(x))$ 是偶函数；若 $g(x)$ 是奇函数，则当 $f(x)$ 是奇函数时 $f(g(x))$ 是奇函数，当 $f(x)$ 是偶函数时 $f(g(x))$ 是偶函数.

若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 具有相同的单调性，则 $f(g(x))$ 单调递增；若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 具有相反的单调性，则 $f(g(x))$ 单调递减.

4. 两个周期函数的和的周期性

设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的最小正周期分别为 T_1 和 T_2，则当 $\frac{T_1}{T_2}=\frac{m}{n}(m,n\in\mathbf{N}^*)$ 时，$f(x)+g(x)$ 具有周期性，且最小正周期为 $T=\frac{[m,n]}{m}T_1=\frac{[m,n]}{n}T_2$（这里 $[m,n]$ 表示 m,n 的最小公倍数）；否则 $f(x)+g(x)$ 不具有周期性.

例题 11　下列函数中，周期是 $\frac{\pi}{2}$ 的偶函数是（　　）.

A. $y=\sin 4x$　　B. $y=\cos 4x$　　C. $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$　　D. $y=\cos 2x$

【答案】 B

【解析】 A 选项是奇函数；B 选项是偶函数且周期为 $\frac{\pi}{2}$；C 选项是非奇非偶函数；D 选项是偶函数且周

期为 π.

例题 12　对称区间上 $f(x)$为奇函数,$g(x)$为偶函数,则以下函数为奇函数的是(　　)

A. $f(x^4)$　　B. $f(x)+g(x)$　　C. $f(x)g(x)$　　D. $-g(-x)$

【答案】 C

【解析】 根据题意,在对称区间上 $f(-x)=-f(x)$,$g(-x)=g(x)$,则 $f((-x)^4)=f(x^4)$,$f(-x)+g(-x)=-f(x)+g(x)$,$f(-x)g(-x)=-f(x)g(x)$,$-g(-(-x))=-g(x)=-g(-x)$,从而 $f(x)g(x)$是奇函数.

例题 13　函数 $f(x)=\ln(\sqrt{1+x^2}-x)$在定义域内是(　　)

A. 不确定奇偶性　　B. 偶函数　　C. 非奇非偶函数　　D. 奇函数

【答案】 D

【解析】 因为函数 $f(x)=\ln(\sqrt{1+x^2}-x)$的定义域为 $\mathbf{R}$,且 $f(-x)=\ln(\sqrt{1+x^2}+x)=\ln\dfrac{(\sqrt{1+x^2}+x)(\sqrt{1+x^2}-x)}{\sqrt{1+x^2}-x}=\ln\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}-x}=-\ln(\sqrt{1+x^2}-x)=-f(x)$,所以 $f(x)$是奇函数.

例题 14　设 $f(x)$为$(-\infty,+\infty)$内的奇函数,则函数 $\sin f(x)+\ln(\sqrt{1+x^2}-x)$在$(-\infty,+\infty)$内是(　　)

A. 奇函数　　B. 偶函数　　C. 非奇非偶函数　　D. 无法判断

【答案】 A

【解析】 因为 $f(x)$是奇函数,所以 $\sin f(-x)+\ln(\sqrt{1+(-x)^2}-(-x))=-\sin f(x)-\ln(\sqrt{1+x^2}-x)=-[\sin f(x)+\ln(\sqrt{1+x^2}-x)]$,即 $\sin f(x)+\ln(\sqrt{1+x^2}-x)$是奇函数.

例题 15　函数 $f(x)=e^{x^2}\sin x$ 的图形关于__________对称.

【答案】 原点

【解析】 因为函数 $f(x)=e^{x^2}\sin x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,且 $f(-x)=e^{(-x)^2}\sin(-x)=-e^{x^2}\sin x=-f(x)$,所以 $f(x)$为奇函数,从而其图形关于原点对称.

例题 16　假设函数 $f(x)=\sin\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{3}$,则 $f(x)$的周期为__________.

【答案】 12π

【解析】 因为 $\sin\dfrac{x}{2}$ 的周期为 $T_1=\dfrac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$,$\cos\dfrac{x}{3}$ 的周期为 $T_2=\dfrac{2\pi}{\frac{1}{3}}=6\pi$,所以函数 $f(x)$的周期为 12π.

考点三　求反函数

方法突破

求函数 $y=f(x)$反函数的步骤:

第一步,由 $y=f(x)$推出 x 关于 y 的表达式 $x=f^{-1}(y)$;

第二步,交换 x,y,得到反函数的表达式 $y=f^{-1}(x)$;

第三步,注明反函数的定义域(原函数的值域).

例题 17　函数 $y=3^{x+1}$ 的反函数为__________.

【答案】 $y=\log_3 x-1(x>0)$

【解析】 由 $y=3^{x+1}$，得 $x=\log_3 y-1$，交换 x,y 得 $y=\log_3 x-1$，于是 $y=3^{x+1}$ 的反函数为 $y=\log_3 x-1(x>0)$.

例题 18　$y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$ 的反函数是__________.

【答案】 $y=\log_2 \dfrac{x}{1-x}, x\in(0,1)$

【解析】 由 $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$，得 $2^x=\dfrac{y}{1-y}$，等号两边取 2 为底的对数，得 $x=\log_2 \dfrac{y}{1-y}$，交换 x,y 得 $y=\log_2 \dfrac{x}{1-x}$，于是 $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$ 的反函数为 $y=\log_2 \dfrac{x}{1-x}, x\in(0,1)$.

考点四　极限的计算

方法突破

1.利用函数的连续性

若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，即 x_0 直接代入 $f(x)$ 表达式. 由于初等函数在其定义域内连续，所以求初等函数在一点处的极限(或单侧)可以使用此方法. 特别地，若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} e^{f(x)}=e^a$.

2.利用极限的四则运算

若函数是由几个已知极限值存在的函数经有限次四则运算所构成的，则可直接利用极限的四则运算计算极限. 此外，对于 $\lim\limits_{x\to\square}(1+u(x))^{v(x)}$ ($x\to\square$ 时，$u(x)\to 0, v(x)\to\infty$) 形式的极限，有 $\lim\limits_{x\to\square}(1+u(x))^{v(x)}=e^{\lim\limits_{x\to\square}u(x)v(x)}$.

3.利用等价变形和等价变换

通过通分、约分、有理化或等价变换(如 $a^b=e^{b\ln a}$)将函数变换成可以用前两种方法计算极限的形式.

4.利用等价无穷小因子替换

在包含无穷小量的乘除式中将作为乘法因子或除法因子的无穷小量用与其等价的无穷小量替换，从而简化乘除式，以便用前三种方法计算极限.

1.利用函数的连续性和极限的四则运算求极限

例题 19　求极限 $\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)$.

【解析】 因为 $y=2x-1$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的初等函数，所以 $\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)=2\cdot 1-1=1$.

例题 20　已知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=2$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n^2+2b_n)=$__________.

【答案】 5

【解析】 根据极限的四则运算，$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n^2+2b_n)=(\lim\limits_{n\to\infty}a_n)^2+2\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1^2+2\times2=5$.

例题 21 求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{3}\sin\dfrac{1}{x}$.

【解析】 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{3}\sin\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}}=\dfrac{1}{3}$.

例题 22 求极限$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$.

【解析】 (方法一)$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{2}{x-1}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{\dfrac{x-1}{2}}\right)^{\frac{x-1}{2}}\cdot\left(1+\dfrac{2}{x-1}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2=e^2$.

(方法二)$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{2}{x-1}\right)^x=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{x-1}}=e^2$.

例题 23 求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+1}\right)^x$.

【解析】 (方法一)$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+1}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{2}{x+1}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{\dfrac{x+1}{2}}\right)^{\frac{x+1}{2}}\cdot\left(1+\dfrac{2}{x+1}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^2=e^2$.

(方法二)$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+1}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{2}{x+1}\right)^x=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{x+1}}=e^2$.

2. 利用等价变形和等价变换求极限

例题 24 求极限$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4-1}{x-1}$.

【解析】 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}(x+1)(x^2+1)=4$.

例题 25 求极限$\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{1}{x^2-3x+2}-\dfrac{1}{x-2}\right)$.

【解析】 $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{1}{x^2-3x+2}-\dfrac{1}{x-2}\right)=\lim\limits_{x\to2}\left[\dfrac{1}{(x-1)(x-2)}-\dfrac{x-1}{(x-1)(x-2)}\right]$

$$=\lim_{x\to2}\frac{2-x}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to2}\frac{-1}{x-1}=-1.$$

例题 26 求极限$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2+1})$.

【解析】 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2+1})=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2+1})(\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x^2+1}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x^2+1}}=0.$$

例题 27 求极限$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{\sqrt{2x-3}-1}$.

【解析】 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{\sqrt{2x-3}-1}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)(\sqrt{2x-3}+1)}{(\sqrt{2x-3}-1)(\sqrt{2x-3}+1)}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)(\sqrt{2x-3}+1)}{2x-4}$

$$=\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{2x-3}+1}{2}=1.$$

例题 28 求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-x^2}{3x^3+1}$.

【解析】 分子分母同除x^3，得$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-x^2}{3x^3+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{3+\frac{1}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3+\frac{1}{x^3}\right)}=\frac{1}{3}$.

注：一般地，对于$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0}(a_n\neq0,b_m\neq0)$形式的极限，可以用分子分母同除$x$的最高次幂计算得到$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m}$，这就是“抓大头”方法.

例题 29 求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+3x^2}{x^2+x+2}-x\right)$.

【解析】 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+3x^2}{x^2+x+2}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-2x}{x^2+x+2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2-\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\frac{2}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}=2$.

例题 30 求极限$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\sin\frac{2}{x}\right)^{2x}$.

【解析】 （方法一）$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\sin\frac{2}{x}\right)^{2x}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sin\frac{2}{x}\cdot2x\right)}=e^4$.

（方法二）$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\sin\frac{2}{x}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{2x\ln\left(1+\sin\frac{2}{x}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}2x\ln\left(1+\sin\frac{2}{x}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}2x\cdot\sin\frac{2}{x}}=e^4$.

3. 利用等价无穷小因子替换求极限

例题 31 求极限$\lim\limits_{x\to0}\frac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}$.

【解析】 因为当$x\to0$时，$\ln(1+x)\sim x$，$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$，所以$\lim\limits_{x\to0}\frac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x\cdot x}{\frac{1}{2}x^2}=2$.

例题 32 求极限$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos 3x}{3x^2}$.

【解析】 因为当$x\to0$时，$1-\cos 3x\sim\frac{1}{2}(3x)^2$，所以$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos 3x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}(3x)^2}{3x^2}=\frac{3}{2}$.

例题 33 求极限$\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$.

【解析】 （方法一）$\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{x+1-1}=\lim\limits_{x\to0}(\sqrt{x+1}+1)=2$.

（方法二）因为当$x\to0$时，$\sqrt{x+1}-1\sim\frac{1}{2}x$，所以$\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\frac{1}{2}x}=2$.

例题 34 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)})=$______.

【答案】 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】（方法一）原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{\dfrac{n(n+1)}{2}}-\sqrt{\dfrac{n(n-1)}{2}}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n(n+1)}-\sqrt{n(n-1)})$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n(n+1)}+\sqrt{n(n-1)}}{n(n+1)-n(n-1)}=\frac{\sqrt{2}}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}}{2n}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

（方法二）原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}\left(\sqrt{1+\dfrac{n}{1+2+\cdots+(n-1)}}-1\right)$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}}{1+2+\cdots+(n-1)}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

例题 35　求极限$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2}$.

【解析】原式$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\sin\left(x-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}{4\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}=\dfrac{1}{4}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}=\dfrac{1}{4}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\left[1+\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-1\right]}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-1}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}=-\frac{1}{8}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}=-\frac{1}{8}.$$

考点五　无穷小量与无穷大量

方法突破

1. 无穷小量与无穷大量的判断

无穷小量是极限值为 0 的变量(常数列{0}和常数函数 $y=0$ 是特殊的无穷小量)，非零无穷小量的倒数是无穷大量，无穷小量与有界量的乘积是无穷小量，有限个无穷小量的和是无穷小量.

2. 无穷小量的比较

给定两个 $x\to\square$ 时的无穷小量 $f(x)$，$g(x)$，判断极限$\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{f(x)}{g(x)}$，若极限值为 0，则 $x\to\square$ 时 $f(x)$是 $g(x)$的高阶无穷小量；若极限为无穷，则 $x\to\square$ 时 $f(x)$是 $g(x)$的低阶无穷小量；若极限值为非零常数，则 $x\to\square$ 时 $f(x)$是 $g(x)$的同阶无穷小量，特别地，极限值为 1 时，$f(x)$，$g(x)$称为等价无穷小量. 此外，若$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{[g(x)]^k}=M(M\neq0)$，则称 $x\to0$ 时，$f(x)$是 $g(x)$的 k 阶无穷小量.

例题 36　当 $x\to0$ 时，以下函数是无穷小量的是(　　).

A. e^x　　B. $\ln(x+2)$　　C. $\sin x$　　D. $\cos x$

【答案】C

【解析】 因为$\lim\limits_{x\to0}\sin x=0$，所以当 $x\to0$ 时，$\sin x$ 是无穷小量.

例题 37　当 $x\to0$ 时，下列函数是无穷小量的是(　　).

A. $\sqrt{x}$　　B. $\arctan(x+1)$　　C. $\frac{1}{x}$　　D. e^{x}

【答案】 A

【解析】 因为$\lim\limits_{x\to0}\sqrt{x}=0$，$\lim\limits_{x\to0}\arctan(x+1)=\frac{\pi}{4}$，$\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}=\infty$，$\lim\limits_{x\to0}e^{x}=1$，所以当 $x\to0$ 时，$\sqrt{x}$是无穷小量.

例题 38　当 $x\to0$ 时，以下函数是无穷大量的是(　　).

A. e^{-x}　　B. $\frac{1}{x+1}$　　C. $\frac{1}{x^2}$　　D. $\frac{1}{\cos x}$

【答案】 C

【解析】 因为$\lim\limits_{x\to0}x^2=0$，所以当 $x\to0$ 时，x^2 是无穷小量，从而$\frac{1}{x^2}$是无穷大量.

例题 39　当 $x\to+\infty$时，下列不属于无穷大量的函数是(　　)

A. $\frac{x^2+1}{\sqrt{2x^3+4}}$　　B. $\lg x$　　C. 3^x　　D. $\arctan x$

【答案】 D

【解析】 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{2x^3+4}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{\sqrt{2x^3}}=\sqrt{\frac{x}{2}}=\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\lg x=\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}3^x=\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$. 故当 $x\to+\infty$时，$\arctan x$ 不是无穷大量.

例题 40　当 $x\to1$ 时，判断下列变量是否为无穷小量，若是，则与无穷小量 $x-1$ 进行比较.

(1)x^2-1　　(2)$\ln x$；　　(3)x^3-3x+2.

【解析】 (1) 因为$\lim\limits_{x\to1}(x^2-1)=0$，所以 $x\to1$ 时，x^2-1 是无穷小量，又

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x+1)=2,$$

所以当 $x\to1$ 时，x^2-1 是 $x-1$ 的同阶无穷小量.

(2) 因为$\lim\limits_{x\to1}\ln x=0$，所以当 $x\to1$ 时，$\ln x$ 是无穷小量，又

$$\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\ln[1+(x-1)]}{x-1}=1,$$

所以当 $x\to1$ 时，$\ln x$ 是 $x-1$ 的等价无穷小量.

(3) 因为$\lim\limits_{x\to1}(x^3-3x+2)=0$，所以 $x\to1$ 时，x^3-3x+2 是无穷小量，又

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3-3x+2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^2(x+2)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x-1)(x+2)=0,$$

所以当 $x\to1$ 时，x^3-3x+2 是 $x-1$ 的高阶无穷小量.

例题 41　当 $x\to0$ 时，$\sqrt[3]{1+ax^2}-1$ 与$-\frac{1}{2}x^2$ 等价，则 $a=$(　　)

A. $-\frac{3}{2}$　　B. $-\frac{2}{3}$　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. $\frac{2}{3}$

【答案】 A

【解析】 根据题意，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+ax^2}-1}{-\dfrac{1}{2}x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{a}{3}x^2}{-\dfrac{1}{2}x^2}=-\dfrac{2a}{3}=1$，所以 $a=-\dfrac{3}{2}$.

例题 42 下列函数在 $x\to0$ 时，与 x^2 为等价无穷小的是( ).

A. 2^x B. 2^x-1

C. $\ln(1+2x)$ D. $x\sin x$

【答案】 D

【解析】 A 项，当 $x\to0$ 时 2^x 不是无穷小量；B 项，因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2^x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\ln 2}{x^2}=\infty$，所以当 $x\to0$ 时 2^x-1 为 x^2 的低阶无穷小量；C 项，因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+2x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x}{x^2}=\infty$，所以当 $x\to0$ 时 $\ln(1+2x)$ 为 x^2 的低阶无穷小量；D 项，因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\sin x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{x^2}=1$，所以当 $x\to1$ 时，$x\sin x$ 为 x^2 的等价无穷小量.

例题 43 下列函数在 $x\to0$ 时，是对于 x 的三阶无穷小的是( ).

A. $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}$ B. $\sqrt{1+x^3}-1$ C. $x^3+0.002x^2$ D. $\sqrt[3]{\sin x^3}$

【答案】 B

【解析】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^{\frac{1}{3}}-1}{x^{\frac{8}{3}}}=\infty$，A 项错误；$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x^3}-1}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{x^3}{2}}{x^3}=\dfrac{1}{2}$，B 项正确；$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3+0.002x^2}{x^3}=1+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{0.002}{x}=\infty$，C 项错误；$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{\sin x^3}}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^2}=\infty$，D 项错误.

考点六 极限式中参数的确定

方法突破

求解极限式中的参数问题时，在所求极限存在的前提下，可利用极限的四则运算法则、等价无穷小代换等方法求解.

例题 44 若极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin kx}{x}=3$，则 k 的值为( ).

A. 1 B. 3 C. -1 D. $\dfrac{1}{3}$

【答案】 B

【解析】 根据题意，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin kx}{x}=k\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin kx}{kx}=k=3$.

例题 45 已知极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{2x}=e^2$，则 $a=$__________.

【答案】 1

【解析】 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a}\cdot 2a}=e^{2a}=e^2$，故 $a=1$.

例题 46 设 a,b 为常数,若 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(bx+\dfrac{ax^2}{x+1}\right)=2$,则 $a+b=$________.

【答案】 0

【解析】 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(bx+\dfrac{ax^2}{x+1}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(a+b)x^2+bx}{x+1}=2$,所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(a+b)x^2+bx}{x+1}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(a+b)x^2+bx}{(x+1)^2}=a+b=2\times0=0$.

例题 47 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+3}{x-1}-ax+b\right)=0$,求 a,b 的值.

【解析】 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+3}{x-1}-ax+b\right)=0$,所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-ax^2+ax+bx-b+3}{x-1}=0$,于是

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-ax^2+ax+bx-b+3}{x-1}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-ax^2+ax+bx-b+3}{x^2-2x+1}=1-a=0,a=1,$$

从而

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-ax^2+ax+bx-b+3}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+bx-b+3}{x-1}=b+1=0,b=-1.$$

考点七 函数的连续性

方法突破

函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续需要满足三个条件:① $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有定义;② $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在;③ $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$. 在讨论②时,常常需要讨论 $f(x)$ 在 x_0 处的左极限和右极限,左、右极限存在且相等时 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在.

如果函数 $f(x)$ 在某一区间内连续,那么 $f(x)$ 在区间内的每一个点都连续(端点处单侧连续).

例题 48 若函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续,则 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=($ $)$.

A. 0　　B. $f(0)$　　C. ∞　　D. 不存在

【答案】 B

【解析】 由连续性的定义可知,$\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$.

例题 49 若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x^2}, & x\neq0,\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则 $a=$________.

【答案】 $\dfrac{1}{2}$

【解析】 因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,所以 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$,又 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$,$f(0)=a$,所以 $a=\dfrac{1}{2}$.

例题 50 若 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x<0,\\ a+2x, & x\geqslant0\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续,则 $a=($ $)$.

A. 0　　B. 1　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. 2

【答案】 B

【解析】 因为 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，从而 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=f(0)$，又 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}x^2+1=1$，$f(0)=a$，所以 $a=1$.

例题 51 如果函数 $f(x)=\begin{cases}-2, & x<-1,\\ x^2+ax-1, & -1\leqslant x\leqslant1,\\ 2, & x>1\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，则 $a=($ $)$.

A. 0　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. 1　　D. 2

【答案】 D

【解析】 因为 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，从而 $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=f(1)$，又 $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=2$，$f(1)=a$，所以 $a=2$.

例题 52 如果函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-16}{x-4}, & x\neq4,\\ a, & x=4\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，则 $a=($ $)$.

A. 6　　B. 7　　C. 8　　D. 9

【答案】 C

【解析】 因为函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，所以函数在 $x=4$ 处连续，从而 $\lim\limits_{x\to4}f(x)=f(4)$，又 $\lim\limits_{x\to4}f(x)=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-16}{x-4}=\lim\limits_{x\to4}(x+4)=8$，$f(4)=a$，所以 $a=8$.

例题 53 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+a, & x<0,\\ 1, & x=0,\\ b-\cos x, & x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 a 和 b 的值为(　　).

A. $a=1,b=2$　　B. $a=1,b=-2$　　C. $a=-1,b=2$　　D. $a=-1,b=-2$

【答案】 A

【解析】 因为函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，所以 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)$. 又 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(x^2+a)=a$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(b-\cos x)=b-1$，$f(0)=1$，所以 $a=b-1=1$，解得 $a=1,b=2$.

考点八　函数的间断点

方法突破

1. 函数间断点的判断

根据函数连续的定义，如果函数 $f(x)$ 有下列三种情形之一：

(1) $f(x)$ 在点 x_0 处没有定义；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$，

那么 x_0 为函数 $f(x)$ 的间断点.

2.函数间断点类型的判断

(1) $f(x)$ 在 x_0 处的左、右极限都存在时，x_0 称为 $f(x)$ 的第一类间断点. 此时，若左、右极限相等，则称间断点为可去间断点；若左、右极限不相等，则称间断点为跳跃间断点.

(2) $f(x)$ 在 x_0 处的左、右极限不都存在时，x_0 称为 $f(x)$ 的第二类间断点. 此时，若左、右极限中有一个为无穷，则称间断点为无穷间断点. 此外，若 $f(x)$ 在 x_0 处的极限是振荡不存在的（如函数 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ 在 $x\to 0$ 时，函数值在 -1 与 1 之间无限多次变动），则称 x_0 是振荡间断点.

例题 54　设 $f(x)=\begin{cases} x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ x+1, & x>1, \end{cases}$ 判断 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的连续性.

【解析】　因为 $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x+1)=2$，$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}x^2=1$，所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的左、右极限存在但不相等，从而 $f(x)$ 在 $x=1$ 处间断，且 $x=1$ 是跳跃间断点.

例题 55　判断下列函数的间断点及其类型.

(1) $y=\frac{x^2-1}{x-1}$；

(2) $y=\tan x$；

(3) $y=\cos\frac{1}{x}$.

【解析】　(1) 因为 $y=\frac{x^2-1}{x-1}$ 在 $x=1$ 处没有意义，（根据初等函数的连续性）在其他点处连续，所以函数的间断点为 $x=1$，又 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$，所以 $x=0$ 是可去间断点.

(2) 因为 $y=\tan x$ 在 $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$ 处没有意义，在其他点处连续，所以函数的间断点为 $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，又 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+k\pi}\tan x=\infty$，所以 $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$ 是无穷间断点.

(3) 因为 $y=\cos\frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处没有意义，在其他点处连续，所以函数的间断点为 $x=0$，又 $\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ 振荡不存在，所以 $x=0$ 是振荡间断点.

例题 56　设 $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$，则 $x=2$ 是 $f(x)$ 的（　　）.

A. 可去间断点　　B. 跳跃间断点

C. 无穷间断点　　D. 连续点

【答案】　A

【解析】　因为 $f(x)$ 在 $x=2$ 处没有意义，所以 $x=2$ 是 $f(x)$ 的间断点. 又 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x+2)=4$，所以 $x=2$ 是 $f(x)$ 的可去间断点.

例题 57　$x=1$ 是函数 $f(x)=e^{\frac{1}{x-1}}$ 的第________类间断点.

【答案】 二

【解析】 因为 $\lim\limits_{x\to1^+}e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty$,所以 $x=1$ 是函数的第二类间断点.

例题 58 $f(x)=\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x}}$的第二类间断点为__________.

【答案】 $x=-1$

【解析】 因为 $f(x)$在点 $x=-1,x=0$ 和 $x=1$ 处没有意义,在其他点处连续,所以 $f(x)$的间断点为 $x=-1,x=0,x=1$.

因为 $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x-1}{x+1}=\infty$,所以 $x=-1$ 为第二类间断点;

因为$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-1}{x+1}=-1$,所以 $x=0$ 为第一类间断点;

因为$\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{x+1}=0$,所以 $x=1$ 为第一类间断点.

考点九 零点存在定理的应用

方法突破

零点存在定理的相关题目通常分为两类:

第一类,证明方程 $f(x)=0$($f(x)$为连续函数)在区间(a,b)内有实根;

第二类,证明在区间(a,b)内存在一点 x_0 使得等式 $f(x)=g(x)$成立($f(x),g(x)$为连续函数)或方程 $f(x)=g(x)$在区间(a,b)内有实根.

对第一类题目,只需在区间$[a,b]$上寻找两个函数值异号的点(通常为端点),从而应用零点存在定理,得到函数的零点,即方程的实根.

对第二类题目,只需将等式变形转化成第一类题目证明.

例题 59 证明:方程 $x^3-4x^2+1=0$ 在$(0,1)$内至少有一个实根.

【证明】 令 $f(x)=x^3-4x^2+1$,则 $f(x)$在$[0,1]$上连续,且

$$f(0)=1>0,f(1)=-2<0,$$

于是由零点存在定理知,存在一点 $\xi\in(0,1)$,使得 $f(\xi)=0$,即方程 $x^3-4x^2+1=0$ 在区间$(0,1)$内至少有一个实根.

例题 60 证明:方程 $x^5-2x^2+x+1=0$ 在$(-1,1)$内至少有一个实根.

【证明】 令 $f(x)=x^5-2x^2+x+1$,则 $f(x)$在$[-1,1]$上连续,且

$$f(-1)=-3<0,f(1)=1>0,$$

于是由零点存在定理知，$f(x)$在$(-1,1)$内存在一个零点，即方程 $x^5-2x^2+x+1=0$ 在$(-1,1)$内至少有一个实根.

例题 61　证明：方程 $x=a\sin x+b(a>0,b>0)$至少有一个不超过 $a+b$ 的正根.

【证明】　令 $f(x)=x-a\sin x-b$，则 $f(x)$在$[0,a+b]$上连续，且

$$f(0)=-b<0,f(a+b)=a[1-\sin(a+b)]\geqslant 0.$$

若 $f(a+b)=0$，则 $x=a+b$ 是 $x=a\sin x+b$ 的正根；

若 $f(a+b)\neq 0$，则 $f(a+b)>0$，从而由零点存在定理知，存在一点 $\xi\in(0,a+b)$，使得 $f(\xi)=0$，即方程 $x=a\sin x+b$ 在$(0,a+b)$内有一个根.

例题 62　设函数 $f(x)$在$[0,1]$上连续，且 $f(0)\neq 0,0<f(1)<1$，证明：存在 $x_0\in(0,1)$，使得 $f^2(x_0)=x_0$.

【证明】　令 $F(x)=f^2(x)-x$，因为 $f(x)$在$[0,1]$上连续，所以 $F(x)$在$[0,1]$上连续. 又

$$f(0)\neq 0,0<f(1)<1,$$

所以

$$F(0)=f^2(0)>0,F(1)=f^2(1)-1<0,$$

从而由零点存在定理可知，存在 $x_0\in(0,1)$，使得 $F(x_0)=0$，即 $f^2(x_0)=x_0$.

例题 63　设函数 $f(x)$在$[0,1]$上连续，且 $f(1)=1$，证明：对于任意 $\lambda\in(0,1)$，存在 $\xi\in(0,1)$，使 $f(\xi)=\frac{\lambda}{\xi^2}$.

【证明】　令 $F(x)=x^2f(x)-\lambda$，因为 $f(x)$在$[0,1]$上连续，所以 $F(x)$在$[0,1]$上连续，又对于任意 $\lambda\in(0,1)$，

$$F(0)=-\lambda<0,F(1)=1-\lambda>0,$$

所以由零点存在定理知，存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=\frac{\lambda}{\xi^2}$.

复习题

一、选择题

1. 函数 $f(x)=\sqrt{2^x-1}+\arctan\frac{1}{x-1}$的定义域为(　　).

A. $[0,1)$　　B. $(1,+\infty)$

C. $[0,1)\cup(1,+\infty)$　　D. $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$

2. 已知函数 $f(x+1)$的定义域为$[2,5]$，则函数 $y=\frac{f(3x)}{\sqrt{\log_2(4-x^2)}}$的定义域为(　　).

A. $[1,+\infty)$　　B. $[1,\sqrt{3})$

C. $(1,+\infty)$　　D. $\left[\frac{1}{3},\sqrt{3}\right)$

3. 下列命题中为真命题的是(　　).

①函数 $y=\frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$与 $y=\ln\tan\frac{x}{2}$是同一函数；

②若函数 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称,则函数 $y=f(2x)$ 与 $y=\frac{1}{2}g(x)$ 的图像也关于直线 $y=x$ 对称;

③若奇函数 $f(x)$ 对定义域内任意 x 都有 $f(x)=f(2-x)$,则 $f(x)$ 为周期函数.

A. ①②　　B. ①③

C. ②③　　D. ②

4. 下列函数中既是偶函数又在 $(0,+\infty)$ 上单调递减的是(　　).

A. $f(x)=e^x-1$　　B. $f(x)=x+\frac{1}{x}$

C. $f(x)=\frac{1}{x^4}$　　D. $f(x)=\lg|x|$

5. 设函数 $y=2+\ln(x+3)$,则此函数的反函数是(　　).

A. $y=e^{2x+3}-3$　　B. $y=e^{x-2}-3$

C. $x=\ln(y-2)-3$　　D. $y=\ln(x-2)-3$

6. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\log_a x, & 0<x<1,\\ (4a-1)x+2a, & x\geqslant 1,\end{cases}$ 满足对任意 $x_1\neq x_2$,都有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$ 成立,则实数 a 的取值范围是(　　).

A. $\left(0,\frac{1}{6}\right)$　　B. $\left(0,\frac{1}{6}\right]$

C. $\left(0,\frac{1}{4}\right)$　　D. $(1,+\infty)$

7. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{8^x}{8^x-5^x}=$(　　).

A. 1　　B. $\frac{5}{8}$

C. $\frac{8}{5}$　　D. 0

8. 函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有意义是极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在的(　　).

A. 充分条件　　B. 必要条件

C. 充分必要条件　　D. 无关条件

9. 函数 $f(x)=\begin{cases}2x-1, & 0<x\leqslant 1,\\ 2-x, & 1<x\leqslant 3\end{cases}$ 在(　　)时极限为 1.

A. $x\to\frac{1}{2}$　　B. $x\to 1$

C. $x\to\frac{3}{2}$　　D. $x\to 2$

10. 设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$,则下列正确的是(　　).

A. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]=\infty$　　B. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)]=\infty$

C. $\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=0$　　D. $\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{f(x)+g(x)}=0$