

历年真题汇编(一)

一、单项选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,共 15 分)

- 函数 $z = \arccos \frac{x^2+y^2}{4} + \ln(x^2+y^2)$ 的定义域是().
 A. $\{(x, y) | 0 < x^2+y^2 < 4\}$ B. $\{(x, y) | 0 \leq x^2+y^2 < 4\}$
 C. $\{(x, y) | 0 < x^2+y^2 \leq 4\}$ D. $\{(x, y) | 0 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$
- 设下列导数存在,则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 等于().
 A. $2f'(x)$ B. $f'(x)$
 C. $f'(x_0)$ D. $2f'(x_0)$
- 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n)$ 收敛,则().
 A. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 同时收敛
 B. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 同时收敛或同时发散
 C. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛而 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散
 D. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散而 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛
- 设 D 是 $1 \leq x^2+y^2 \leq 4$ 所确定的平面区域,则二重积分 $\iint_D dx dy =$ ().
 A. π B. 15π
 C. 4π D. 3π
- 设 \mathbf{A}, \mathbf{B} 为同阶方阵,则下列选项中正确的是().
 A. $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}|$ B. $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$
 C. $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{A}^T \mathbf{B}^T$ D. $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}^{-1}$

二、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,共 15 分)

- 微分方程 $y''+5y'-6y=0$ 的通解为_____.
- 设函数 $y = \frac{\arcsin x}{x(x+3)}$, 则 $x =$ _____是可去间断点.
- 设 $y = 2 \ln x$, 则 $dy =$ _____.
- 已知 $\mathbf{a} = (1, 2, 3), \mathbf{b} = (0, 1, 1)$, 则 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} =$ _____.
- 已知 \mathbf{A} 是 3 阶方阵, $|\mathbf{A}| = 2$, 则 $|-3\mathbf{A}| =$ _____.

三、计算下列极限(本题共 2 小题,每小题 5 分,共 10 分)

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^{\sin x}$.
- $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$.

四、计算下列积分(本题共 3 小题,每小题 6 分,共 18 分)

- $\int_{e^2}^{e^5} \frac{1}{x \ln x} dx$.
- $\int e^{\sqrt{x}} dx$.
- $\int_1^3 dx \int_{x-1}^2 \frac{\sin y}{y} dy$.

五、多元函数微分学部分(共 6 分)

设 $z = x^4 + y^4 - 4x^2y^2$, 求 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial x}$.

六、级数部分(本题共 2 小题,每小题 6 分,共 12 分)

1. 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin \frac{\pi}{3^n}$ 的敛散性.

2. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n^2}$ 的收敛区间.

七、常微分方程部分(共 6 分)

求微分方程 $y' + \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{1}{1+x^2}$ 的通解.

八、线性代数部分(本题共 2 小题,每小题 6 分,共 12 分)

1. 已知 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 求 \mathbf{A}^{-1} .

2. 求非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 5x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 2 \end{cases}$ 的通解.

九、证明题(共 6 分)

证明: 当 $x \geq 0$ 时, $\ln(1+x) \geq x - \frac{1}{2}x^2$.

2. 求由方程 $e^{-xy} - 2x + e^z = \ln 3 + e^2$ 所确定的隐函数 $z = z(x, y)$ 的全微分 dz .

五、求下列积分(本题共 3 小题,每小题 6 分,共 18 分)

1. $\int_0^2 x e^{-x} dx.$

2. $\int \frac{2}{x(1+x^5)} dx.$

3. 计算二重积分 $\iint_D y dx dy$, 其中 D 是由曲线 $y + x^2 = 0$ 和 $y = x - 2$ 围成的区域.

六、多元函数微分学部分(共 7 分)

求函数 $z = -x^2 + 6x + y^3 - 12y + \ln 3$ 的极值.

七、级数部分(共 5 分)

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^n$ 的收敛半径和收敛域.

八、常微分方程部分(共 7 分)

求微分方程 $xy' + 2y = 3x^2$ 的通解.

九、线性代数计算题(本题共 2 小题,第一小题 5 分,第二小题 8 分,共 13 分)

1. 设矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, 计算 \mathbf{AB} .

2. 设矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$, 判断 \mathbf{A} 是否可逆,若可逆,求出其逆矩阵.

历年真题汇编(三)

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,共 15 分)

1. 曲线 $y=x^2$ 上点(1,1)处的切线方程是_____.
2. 矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, 则 $\mathbf{A}^T\mathbf{B}=\underline{\hspace{2cm}}$.
3. 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (2u_n+1)$ 的敛散性为_____.
4. 设 $f(x)=\begin{cases} 2e^x \cos x, & x>0, \\ 2x+a, & x\leq 0 \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 则 $a=\underline{\hspace{2cm}}$.
5. 微分方程 $y''-7y'+12y=0$ 的通解是_____.

二、单项选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,共 15 分)

1. 若 $f'(x)$ 为连续函数, 则 $\int f'(2x)dx$ 等于().
A. $\frac{1}{2}f(2x)+C$ B. $f(x)+C$
C. $f(2x)+C$ D. $2f(2x)+C$
2. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{2-p}}$ 收敛, 则 p 满足().
A. $p\geq 1$ B. $p< 1$
C. $p< 2$ D. $p\geq 2$
3. 交换积分次序 $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$ 为().
A. $\int_0^1 dx \int_1^{x^2} f(x,y)dy$ B. $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)dy$
C. $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x,y)dy$ D. $\int_0^1 dx \int_{x^2}^1 f(x,y)dy$
4. $f_x(x,y), f_y(x,y)$ 连续是 $z=f(x,y)$ 可微的()条件.
A. 必要 B. 充分
C. 充要 D. 无关
5. 若矩阵 \mathbf{A} 是 3 阶方阵, 且 $|\mathbf{A}|=3$, 则 $|-2\mathbf{A}|=(\quad)$.
A. 6 B. -6
C. 24 D. -24

三、求下列极限(本题共 2 小题,每小题 5 分,共 10 分)

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{\int_x^0 e^{-t^2} dt}$.
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$.

四、求下列导数或微分(本题共 2 小题,每小题 5 分,共 10 分)

1. 设由方程 $e^y+x+2=\sin(x+y)$ 确定了一个隐函数 $y=y(x)$, 求 $\frac{dy}{dx}$.
2. 设 $z=u^2 \ln v, u=\frac{x}{y}, v=3x-2y$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

五、求下列积分(本题共 3 小题,每小题 5 分,共 15 分)

1. 计算 $\int \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx$.

2. 计算二重积分 $\iint_D x dx dy$, 其中 D 是由曲线 $y=x^2$ 和 $y=x+2$ 围成的区域.

3. 计算 $\iint_D \sqrt{x^2+y^2} dx dy$, 其中 D 是由不等式 $1 \leq x^2+y^2 \leq e^2$ 所表示的区域.

六、解答下列各题(本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分)

1. 求由曲线 $y=x^2-4$ 和 $y=x+2$ 围成的平面图形的面积.

2. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{2^n(n+1)}$ 的收敛域.

3. 求齐次线性方程组
$$\begin{cases} x_1+x_2=0, \\ 2x_1+x_2+x_3+2x_4=0, \\ 5x_1+3x_2+2x_3+2x_4=0 \end{cases}$$
 的通解.

4. 求微分方程 $xy' + y = xe^x$ 的通解.

七、求 $f(x)=2x^3-6x^2-18x-7$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内的极值和单调区间. (共 5 分)

八、某公司可通过电台及报纸两种方式做销售某商品的广告. 其销售收入 R 与电台广告费用 x 及报纸广告费用 y 之间满足关系式: (单位: 万元) $R=15+14x+26y-8xy-2x^2-10y^2$, 若提供的广告费用为 1.5 万元, 求相应的最优广告策略. (要求用拉格朗日乘数法)(共 5 分)

九、某商品的价格 P 关于需求量 Q 的函数为 $Q=120-6P^2+2P$, 求:

(1) 当 $P=5$ 时的边际需求, 并说明其经济意义;

(2) 当 $P=5$ 时的需求弹性, 并说明其经济意义. (共 5 分)