高等数学考前冲刺卷(一)

一、单项选择题(每小题 2 分,共计 50 分)

1. 已知函数 $f(4x-3)$ 的定义域为 $[0,2]$,则函数 $f(x)$ 的定义域为 (　　)

A. $\left[\frac{3}{4},\frac{5}{4}\right]$　　B. $[-3,5]$

C. $[0,2]$　　D. $[-1,2]$

2. 函数 $y=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)(-\infty<x<+\infty)$ 是 (　　)

A. 奇函数　　B. 偶函数

C. 非奇非偶函数　　D. 既奇又偶函数

3. 当 $x\to0$ 时,x^3+x 是 $\sin x$ 的 (　　)

A. 高阶无穷小量　　B. 低阶无穷小量

C. 同阶非等价无穷小量　　D. 等价无穷小量

4. $x=0$ 是函数 $f(x)=\arctan\frac{1}{x}$ 的 (　　)

A. 连续点　　B. 可去间断点

C. 跳跃间断点　　D. 第二类间断点

5. 设 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导,且 $f'(1)=1$,则 $\lim\limits_{A\to0}\frac{f(1-2h)-f(1+h)}{h}=$ (　　)

A. -1　　B. -2

C. -3　　D. -4

6. 若函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内有 $f'(x)>0$,$f''(x)<0$,则在区间 (a,b) 内,$f(x)$ 图形 (　　)

A. 单调递减且凸的　　B. 单调递增且凸的

C. 单调递减且凹的　　D. 单调递增且凹的

7. 曲线 $y=1+x^3$ 的拐点是 (　　)

A. $(0,1)$　　B. $(1,0)$

C. $(0,0)$　　D. $(1,1)$

8. 设函数 $f(x)$ 在 $[1,3]$ 上连续,在 $(1,3)$ 内可导,且 $f(3)-f(1)=1$,则在 $(1,3)$ 内曲线 $y=f(x)$ 至少有一条切线平行于直线 (　　)

A. $y=2x$　　B. $y=-2x$

C. $y=\frac{1}{2}x$　　D. $y=-\frac{1}{2}x$

9. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}\tan t\mathrm{d}t}{x^4}=$ (　　)

A. 0　　B. $\frac{1}{2}$

C. 1　　D. 2

10. 若函数 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的原函数,则下列正确的是 (　　)

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=g(x)+C$　　B. $\int g(x)\mathrm{d}x=f(x)+C$

C. $\int g'(x)\mathrm{d}x=f(x)+C$　　D. $\int f'(x)\mathrm{d}x=g(x)+C$

11. $\int\cos(1-3x)\mathrm{d}x=$ (　　)

A. $-\frac{1}{3}\sin(1-3x)+C$　　B. $\frac{1}{3}\sin(1-3x)+C$

C. $-\sin(1-3x)+C$　　D. $3\sin(1-3x)+C$

12. 设 $y=\int_0^x(t-1)(t-3)\mathrm{d}t$,则 $y'(0)=$ (　　)

A. -3　　B. -1

C. 1　　D. 3

13. 下列广义积分收敛的是 (　　)

A. $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$　　B. $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x}$

C. $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x}}$　　D. $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x}}$

14. 对不定积分 $\int\frac{1}{\sin^2x\cos^2x}\mathrm{d}x$,下列结果计算错误的是 (　　)

A. $\tan x-\cot x+C$　　B. $\tan x-\frac{1}{\tan x}+C$

C. $\cot x-\tan x+C$　　D. $-\cot2x+C$

15. 函数 $y=x^2$ 在区间[$[1,3]$的平均值为 (　　)

A. $\frac{26}{3}$　　B. $\frac{13}{3}$

C. 8　　D. 4

16. 下列各平面中,与平面 $x+2y-3z=6$ 垂直的是 ( )

A. $2x+4y-6z=1$　　B. $2x+4y-6z=3$

C. $\frac{x}{-1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$　　D. $-x+2y+z=1$

17. 双曲线 $\begin{cases}\frac{x^2}{3}-\frac{z^2}{4}=1\\ y=0\end{cases}$,绕 z 轴旋转所成曲面方程为 ( )

A. $\frac{x^2+y^2}{3}-\frac{z^2}{4}=1$　　B. $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2+z^2}{4}=1$

C. $\frac{(x+y)^2}{3}-\frac{z^2}{4}=1$　　D. $\frac{x^2}{3}-\frac{(y+z)^2}{4}=1$

18. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{3-\sqrt{xy+9}}{xy}=$ ( )

A. $\frac{1}{6}$　　B. $-\frac{1}{6}$

C. 0　　D. 极限不存在

19. 若 $z=x^y$,则 $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(e,1)}=$ ( )

A. $\frac{1}{\mathrm{e}}$　　B. 1

C. e　　D. 0

20. 方程 $z^2y-xz^3=1$ 确定隐函数 $z=f(x,y)$,则 $\frac{\partial z}{\partial x}=$ ( )

A. $\frac{z^2}{2y-3xz}$　　B. $\frac{z^2}{3xz-2y}$

C. $\frac{z}{2y-3xz}$　　D. $\frac{z}{3xz-2y}$

21. 设 C 为抛物线 $y=x^2$ 上从(0,0)到(1,1)的一段弧,则 $\int_C 2xy\,\mathrm{d}x+x^2\,\mathrm{d}y=$ ( )

A. -1　　B. 0

C. 1　　D. 2

22. 下列正项级数收敛的是 ( )

A. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{3n+1}$　　B. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$

C. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}$　　D. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$

23. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{\sqrt{n}}$ 的收敛域为 ( )

A. $[2,4]$　　B. $[-1,1)$　　C. $[2,4)$　　D. $[-1,1]$

24. 微分方程 $y''+3y'+2y=\mathrm{e}^{-x}\cos x$ 的特解形式应设为 $y^*=$ ( )

A. $c\mathrm{e}^x\cos x$　　B. $\mathrm{e}^{-x}(c_1\cos x+c_2\sin x)$

C. $x\mathrm{e}^{-x}(c_1\cos x+c_2\sin x)$　　D. $x^2\mathrm{e}^{-x}(c_1\cos x+c_2\sin x)$

25. 设函数 $y=f(x)$是微分方程士 $y''+y'=\mathrm{e}^{2x}$的解,且 $f'(x_0)=0$,则 $f(x)$在 x_0 处 ( )

A. 取极小值　　B. 取极大值　　C. 不取极值　　D. 取最大值

二、填空题(每小题 2 分,共 30 分)

26. 设函数 $f(x)=\frac{2x}{x+1}$,则 $f[f(x)]=$__________.

27. $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{3}}{x^2-2x}=$__________.

28. 设函数 $y=\arctan 2x$,则 $\mathrm{d}y=$__________.

29. 设函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx$ 在 $x=-1$ 处取得极小值 -2,则常数 a 和 b 分别为__________.

30. 曲线 $y=2x^3-5x$ 的拐点为__________.

31. 设函数 $f(x)$,$g(x)$均可微,且同为某函数的原函数,有 $f(1)=3$,$g(1)=1$ 则 $f(x)-g(x)=$__________.

32. $\int_{-\pi}^{\pi}(x^2+\sin^3x)\mathrm{d}x$ __________.

33. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x, x\geqslant0\\ x^2, x<0\end{cases}$,则 $\int_0^2 f(x-1)\mathrm{d}x$ __________.

34. 向量 $\vec{a}=\{1,1,2\}$与向量 $\vec{b}=\{2,-1,1\}$的夹角为__________.

35. 曲线 L:$\begin{cases}y^2=2x\\ z=0\end{cases}$ 绕 x 轴旋转一周所形成的旋转曲面方程为__________.

36. 设函数 $z=xy+x^2\sin y$,则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$__________.

37. 设区域 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant1,-1\leqslant y\leqslant1\}$,则 $\iint\limits_D(y-x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$______.

38. 函数 $f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$ 在 $x_0=0$ 处展开的幂级数是__________.

39. 已知 L 是直线 $y=x$ 上从点(0,0)到点(1,1)的直线段,则 $\int_L(y-x^2)\mathrm{d}s$ __________.

40. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)=$ __________.

三、计算题(每小题 5 分,共 50 分)

41. 计算 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)$.

42. 求函数 $y=(x^2+3x)^{sin2x}$ 的导数$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

43. 求不定积分 $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

44. 计算定积分 $\int_{-0}^{1} \frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}\mathrm{d}x$.

45. 设 $z=f(2x+y)+g(x,xy)$，其中 $f(t)$，$g(u,v)$ 皆可微，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$.

46. 计算二重积分 $I=\iint\limits_{D}x^{2}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 由 $y=x$，$y=2x$ 及 $x=1$ 所围成.

47. 若直线 $\frac{x-1}{1}=\frac{y+3}{n}=\frac{z-2}{3}$ 与平面 $3x-4y+3z+1=0$ 平行，求常数 n 的值.

48. 求微分方程 $\sin x\cos y\mathrm{d}y+\cos x\sin y\mathrm{d}x=0$ 的通解.

49. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{1+(-3)^n}(x-1)^n$ 的收敛区间(不考虑区间端点的情况).

50. 求微分方程 $x^2 \mathrm{d}y+(2xy-x+1)\mathrm{d}y=0$ 通解.

四、应用题(每小题 7 分,共计 14 分)

51. 某公司的甲、乙两厂生产同一种产品,月产量分别为 x,y 千件;甲厂月生产成本是 $C_1=x^2-2x+5$(千元),乙厂月生产成本是 $C_2=y^2+2y+3$(千元)若要求该产品每月总产量为 8 千件,并使总成本最小,求甲、乙两厂最优产量和相应最小成本.

52. 由曲线 $y=(x-1)(x-2)$ 和 x 轴所围成一平面图形，求此平面图形绕 y 轴旋转一周所成的旋转体的体积.

五、证明题(6分)

53. 已知 $f(x)$ 是定义在 R 上的单调递减的可导函数，且 $f(1)=2$，函数 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-x^2-1$. 证明：方程 $F(x)=0$ 在区间 $(0,1)$ 内有且仅有一个实根.

高等数学考前冲刺卷(一)参考答案及解析

一、单项选择题

1.【答案】B

【解析】因为 $0\leqslant x\leqslant 2$,则 $-3\leqslant 4x-3\leqslant 5$,所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-3,5]$. 故选 B.

2.【答案】A

【解析】由题意可知,$f(x)+f(-x)=ln(\sqrt{x^2+1}-x)+\ln(\sqrt{x^2+1}+x)=\ln 1=0$. 故选 A.

3.【答案】D

【解析】因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(x^2+1)=1$,所以 $x\to 0$ 时,x^3+x 是 $\sin x$ 的等价无穷小,故应选 D.

4.【答案】C

【解析】首先,因 $x=0$ 时,函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1}{x}$ 无定义,所以 $x=0$ 为 $f(x)$ 的一个间断点,不是连续点. 又

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2},\ \lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\arctan\frac{1}{x}=-\frac{\pi}{2}$$

于是,点 $x=0$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点.

5.【答案】C

【解析】
$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(1-2h)-f(1+h)}{h}&=\lim_{h\to 0}\left[(-2)\frac{f(1-2h)-f(1)}{-2h}-\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\right]\\&=-3f'(1)=-3\end{aligned}$$

6.【答案】B

【解析】$f'(x)>0\Rightarrow$ 单调增加,$f''(x)<0\Rightarrow$ 凸的.

7.【答案】A

【解析】令 $y''=6x=0\Rightarrow x=0$,当 $x<0$ 时,$y''<0$,当 $x>0$ 时,$y''>0$,故点 $(0,1)$ 是曲线的拐点.

8.【答案】C

【解析】由拉格朗日中值定理可得至少存在一点 $\xi\in(1,3)$,使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(3)-f(1)}{3-1}=\dfrac{1}{2}$,即曲线 $y=f(x)$ 在点 $x=\xi$ 处的切线斜率为 $\dfrac{1}{2}$,所以曲线 $y=f(x)$ 至少有一条切线平行于直线 $y=\dfrac{1}{2}x$.

9.【答案】B

【解析】
$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\tan t\mathrm{d}t}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\tan x^2}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot x^2}{4x^3}=\frac{1}{2}$$

10.【答案】B

【解析】根据不定积分与原函数的关系知 $\int g(x)\mathrm{d}x=f(x)+C$.

11.【答案】A

【解析】
$$\int\cos(1-3x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}\int\cos(1-3x)d(1-3x)=-\frac{1}{3}\sin(1-3x)+C$$

12.【答案】D

【解析】$y'=(x-1)(x-3)\Rightarrow y'(0)=3$,故选 D.

13.【答案】C

【解析】由 p 一积分的敛散性知 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x}}$ 收敛

14.【答案】C

【解析】对各选项求导,分析结果. C 项中 $(\cot x-\tan x+C)'=-\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{\cos^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}$,故选 C.

15.【答案】B

【解析】$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_1^3 x^2\mathrm{d}x=\frac{x^3}{6}\Big|_1^3=\frac{13}{3}$

16.【答案】D

【解析】平面 $x+2y-3z=6$ 的法向量 $n=\{1,2,-3\}$,A 项和 B 项中平面的法向量均为 $n_1=\{2,4,-6\}=2n$,所以与平面 $x+2y-3z=6$ 平行. C 项中平面的法向量 $n_2=\left\{-1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right\}$,但 $n\cdot n_2=-1\neq 0$,所以与平面 $x+2y-3z=6$ 不垂直. D 项中平面的法向量 $n_3=\{-1,2,1\}$,且 $n\cdot n_3=0$,所以与平面 $x+2y-3z=6$ 垂直.

17.【答案】A

【解析】把 $\frac{x^2}{3}-\frac{z^2}{4}=1$ 中 x^2 换成 x^2+y^2 得 $\frac{x^2+y^2}{3}-\frac{z^2}{4}=1$,应选 A

18.【答案】B

【解析】
$$\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{3-\sqrt{xy+9}}{xy}=\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{-xy}{xy(3+\sqrt{xy+9})}$$
$$=-\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{1}{3+\sqrt{xy+9}}=-\frac{1}{6}$$

19.【答案】C

【解析】$\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(\mathrm{e},1)}=x^y\ln x\,|_{(\mathrm{e},1)}=\mathrm{e}\ln\mathrm{e}=\mathrm{e}$,故选 C.

20.【答案】A

【解析】令 $F(x,y,z)=z^2y-xz^3-1\Rightarrow F_x=-z^3,F_z=2zy-3xz^2\Rightarrow$ 当 $F_z\neq 0$ 时,$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{z^2}{2y-3xz}$

21.【答案】C

【解析】C:$\begin{cases}x=x,\\y=x^2,\end{cases}$ 从 0 变到 1,$\int_C 2xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y=\int_0^1 4x^3\mathrm{d}x=1$,故选 C.

22.【答案】C

【解析】$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x$ 发散. $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^2}\mathrm{d}x$ 收敛,由积分判别法知 B 项发散 C 项收敛;其余几个级数均与级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ 具有相同的发散性.

23.【答案】C

【解析】因为 $\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}=1$,所以幂级数的收敛半径为 $R=\frac{1}{\rho}=1$,则 $-1<x-3<1$,得 $2<x<4$,即幂级数的收敛区间为 $(2,4)$. 当 $x=4$ 时,幂级数化为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$,为 $p=\frac{1}{2}$ 的 p 级数,发散;当 $x=2$ 时,幂级数化为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$,为交错级数,由莱布尼茨定理知它是收敛的. 故幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{\sqrt{n}}$ 的收敛域为 $[2,4)$.

24.【答案】B

【解析】特征方程为 $r^2+3r+2=0$,特征根为 $r_1=-1,r_2=-2$,而 $-1+i$ 不是特征方程的特征根,特解

应设为 $y^* = e^{-x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$.

25.【答案】A

【解析】$f''(x_0)+f'(x_0)=e^{2x_0} \Rightarrow f''(x_0)=e^{2x_0}>0$,则 $f(x)$ 在 x_0 处取极小值,故选 A.

二、填空题

26.【答案】$\dfrac{4x}{3x+1}$

【解析】$f[f(x)]=\dfrac{2\cdot\dfrac{2x}{x+1}}{\dfrac{2x}{x+1}+1}=\dfrac{4x}{2x+(x+1)}=\dfrac{4x}{3x+1}$.

27.【答案】$\dfrac{\sqrt{3}}{12}$

【解析】$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{3}}{x^2-2x}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)}{x(x-2)(\sqrt{x+1}+\sqrt{3})}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{1}{x(\sqrt{x+1}+\sqrt{3})}=\dfrac{1}{4\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{12}$.

28.【答案】$\dfrac{2}{1+4x^2}\mathrm{d}x$

【解析】$\mathrm{d}y=d(\arctan 2x)=\dfrac{2}{1+4x^2}\mathrm{d}x$.

29.【答案】4,5

【解析】$f'(x)=3x^2+2ax+b \Rightarrow 3-2a+b=0, -2=-1+a-b \Rightarrow a=4, b=5$.

30.【答案】$(0,0)$

【解析】由题意可知,函数 $y=2x^3-5x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$, $y'=6x^2-5$, $y''=12x$,令 $y''=0$,得 $x=0$,当 $x<0$ 时,$y''<0$;当 $x>0$ 时,$y''>0$,$y(0)=0$,故曲线的拐点为 $(0,0)$.

31.【答案】2

【解析】$f(x)-g(x)=C \Rightarrow C=f(1)-g(1)=2 \Rightarrow f(x)-g(x)=2$.

32.【答案】$\dfrac{2\pi^3}{3}$

【解析】$\int_{-\pi}^{\pi}(x^2+\sin^3 x)\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}x^2\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{\pi}\sin^3 x\mathrm{d}x=2\int_0^{\pi}x^2\mathrm{d}x+0=\dfrac{2\pi^3}{3}$.

33.【答案】$e-\dfrac{2}{3}$

【解析】$\int_0^2 f(x-1)\mathrm{d}x \xlongequal{x-1=t} \int_{-1}^{1}f(t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^{0}x^2\mathrm{d}x+\int_0^1 e^x\mathrm{d}x=e-\dfrac{2}{3}$.

34.【答案】$\dfrac{\pi}{3}$

【解析】因为 $\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{3}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}}=\dfrac{1}{2}$,所以 $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\dfrac{\pi}{3}$.

35.【答案】$z^2+y^2=2x$

【解析】把 $y^2=2x$ 中的 y^2 换成 z^2+y^2,即得所求曲面方程 $z^2+y^2=2x$.

36.【答案】$1+2x\cos y$

【解析】$\dfrac{\partial z}{\partial x}=y+2x\sin y \Rightarrow \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=1+2x\cos y$.

37.【答案】$-\dfrac{2}{3}$

【解析】$\iint\limits_D(y-x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{-1}^{1}(y-x^2)\mathrm{d}y=-2\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=-\dfrac{2}{3}$.

38.【答案】$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n!}x^{2n}, x\in(-\infty,+\infty)$

【解析】$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\Rightarrow f(x)=e^{-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x^2)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!}x^{2n},x\in(-\infty,+\infty)$.

39.【答案】$\frac{\sqrt{2}}{6}$

【解析】$\int_L(y-x^2)ds=\int_0^1(x-x^2)\sqrt{1+1^2}dx=\sqrt{2}\int_0^1(x-x^2)dx=\sqrt{2}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1=\frac{\sqrt{2}}{6}$.

40.【答案】$\frac{1}{2}$

【解析】级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 的和为 $S_1=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ 的和为 $S_2=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$,故 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)=$

$S_1-S_2=\frac{1}{2}$.

三、计算题

41.【解析】$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-x^2-e^{-x^2}}{x\sin^3 2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-x^2-e^{-x^2}}{8x^4}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{-2x+2xe^{-x^2}}{32x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{-x^2}-1}{16x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{-2xe^{-x^2}}{32x}=-\frac{1}{16}\lim\limits_{x\to0}e^{-x^2}$

$=-\frac{1}{16}$.

42.【解析】取对数得:$\ln y=\sin 2x\ln(x^2+3x)$,

两边对 x 求导得:$\frac{1}{y}y'=2\cos 2x\ln(x^2+3x)+\frac{2x+3}{x^2+3x}\sin 2x$,

所以 $y'=(x^2+3x)^{\sin 2x}\left[2\cos 2x\ln(x^2+3x)+\frac{2x+3}{x^2+3x}\sin 2x\right]$

$=2(x^2+3x)^{\sin 2x}\cos 2x\ln(x^2+3x)+(x^2+3x)^{\sin 2x-1}(2x+3)\sin 2x$.

43.【解析】$\int\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx\ \overset{x=2\sin t}{\underset{-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}}{=\!=\!=}}\ \int\frac{4\sin^2 t}{2\cos t}2\cos t\,dt=4\int\sin^2 t\,dt=2\int(1-\cos 2t)dt=2t-\sin 2t+$

$C=2\arcsin\frac{x}{2}-2\sin t\cos t+C=2\arcsin\frac{x}{2}-\frac{x\sqrt{4-x^2}}{2}+C$.

44.【解析】$\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}dx=\int_0^1\ln(1+x)d\frac{1}{2-x}$

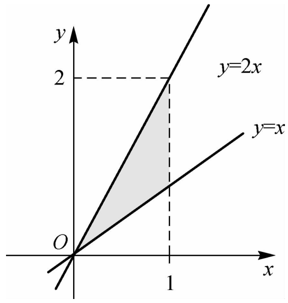
$$
\begin{aligned}
&=\frac{\ln(1+x)}{2-x}\Big|_0^1-\int_0^1\frac{1}{(2-x)(1+x)}dx\\
&=\ln 2-\frac{1}{3}\int_0^1\left(\frac{1}{2-x}+\frac{1}{1+x}\right)dx\\
&=\ln 2+\frac{1}{3}\ln\left|\frac{2-x}{1+x}\right|\Big|_0^1\\
&=\ln 2-\frac{2}{3}\ln 2\\
&=\frac{1}{3}\ln 2.
\end{aligned}
$$

45.【解析】$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(2x+y)\frac{\partial(2x+y)}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=2f'(2x+y)+g'_u(x,xy)+yg'_v(x,xy)$,

$\frac{\partial z}{\partial y}=f'(2x+y)\frac{\partial(2x+y)}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=f'(2x+y)+xg'_v(x,xy)$.

46.【解析】积分区域如图 06-1 所示,

可表示为:$0\leqslant x\leqslant1,x\leqslant y\leqslant2x$.



所以 $I=\iint\limits_{D}x^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^{2x}x^2y\mathrm{d}y$

$$=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x\left(\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_x^{2x}=\frac{3}{2}\int_0^1 x^4\mathrm{d}x=\frac{3}{10}x^5\Bigg|_0^1=\frac{3}{10}.$$

47.【解析】因为 $\{1,n,3\}\perp\{3-4,3\}$，

所以 $3-4n+9=0$，解得 $n=3$.

48.【解析】因为 $\sin x\cos y\mathrm{d}y+\cos x\sin y\mathrm{d}x=0\Rightarrow\frac{\cos y}{\sin y}\mathrm{d}y=-\frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x$，

则 $\frac{\mathrm{d}\sin y}{\sin y}=-\frac{d\sin x}{\sin x}$，

所以 $\ln\sin y+\ln\sin x=\ln C$，

所以 $\sin x\sin y=C$.

49.【解析】令 $x-1=t$，级数化为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n}{1+(-3)^n}t^n$，这是不缺项的标准的幂级数.

因为 $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{1+(-3)^n}{1+(-3)^{n+1}}\cdot\frac{n+1}{n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(-3)^n}+1}{\frac{1}{(-3)^n}-3}\right|=\frac{1}{3}$，

故级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n}{1+(-3)^n}t^n$ 的收敛半径 $R=\frac{1}{\rho}=3$，即级数收敛区间为 $(-3,3)$.

对级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n}{1+(-3)^n}(x-1)^n$ 有 $-3<x-1<3$，即 $-2<x<4$.

故所求级数的收敛区间为 $(-2,4)$.

50.【解析】微分方程 $x^2\mathrm{d}y+(2xy-x+1)\mathrm{d}x=0$ 可化为 $y'+\frac{2}{x}y=\frac{1-x}{x^2}$，这是一阶线性微分方程，它对应的齐次线性微分方程 $y'+\frac{2}{x}y=0$ 通解为 $y=\frac{C}{x^2}$.

设非齐次线性微分方程的通解为 $y=\frac{C(x)}{x^2}$，则 $y'=\frac{xC'(x)-2C(x)}{x^3}$，代入方程得 $C'(x)=1-x\Rightarrow C(x)=x-\frac{x^2}{2}+C$.

故所求方程的通解为 $y=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}+\frac{C}{x^2}$.

四、应用题

51.【解析】由题意可知：总成本 $C=C_1+C_2=x^2+y^2-2x+2y+8$，

约束条件为 $x+y=8$.

问题转化为在 $x+y=8$ 条件下求总成本 C 的最小值.

把 $x+y=8$ 代入目标函数得 $C=2x^2-20x+88$（$x>0$ 的整数）.

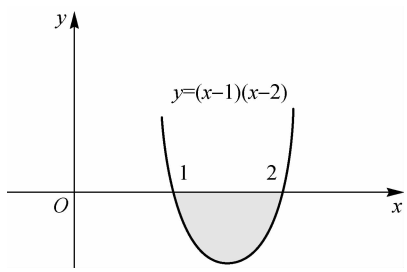
则 $C'=4x-20$，令 $C'=0$ 得唯一驻点为 $x=5$，此时有 $C''=4>0$.

故 $x=5$ 是唯一极值点且为极小值,即最小值点.此时有 $y=3$,$C=38$.

所以甲、乙两厂最优产量分别为 5 千件和 3 千件,最低成本为 38 千元.

52.【解析】平面图形如图 06-2 所示,此立体可看作 X 型区域绕 y 轴旋转一周而得到.利用体积公式 $V_y=2\pi\int_a^b x\,|f(x)|\,\mathrm{d}x$.

显然,抛物线与 x 两交点分别为(1,0)、(2,0),平面图形在 x 轴的下方.



故 $V_y=2\pi\int_a^b x\,|\,f(x)\,|\,\mathrm{d}x=-2\pi\int_1^2 x(x-1)(x-2)\mathrm{d}x=-2\pi\int_1^2(x^3-3x^2+2x)\mathrm{d}x$

$$=-2\pi\left(\frac{x^4}{4}-x^3+x^2\right)\Big|_1^2=\frac{\pi}{2}.$$

五、证明题

53.【证明】显然 $F(x)$在区间[0,1]上连续,且 $F(0)=-1<0$,

由于 $f(x)$单调递减,$f(1)=2$,故在(0,1)内,$f(x)>f(1)=2$,

$F(1)=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t-2>\int_0^1 2\mathrm{d}t-2=0$,

由零点定理可得方程 $F(x)=0$ 在区间(0,1)内至少有一个实根.

又因为 $F'(x)=f(x)-2x>0$,所以 $F(x)$在(0,1)内单调递增,

因此方程 $F(x)=0$ 在(0,1)内至多只有一个实根,

综上可知方程 $F(x)=0$ 在区间(0,1)内有且仅有一个实根.

高等数学考前冲刺卷(二)参考答案及解析

一、单项选择题

1.【答案】C

【解析】因为 $y=f(x)$的图像关于原点对称,所以 y 是奇函数,则 $f(-x)=-f(x)$,即 $f(x)+f(-x)=0$.故选 C.

2.【答案】A

【解析】若使函数 $f(x)$有意义,则需满足 $\begin{cases}x^5-x^4>0,\\x^2-4x+5>0,\end{cases}$ 解得 $x>1$,故 $f(x)$的定义域为$(1,+\infty)$.故选 A.

3.【答案】C

【解析】由题意可知,$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-\sin x}{x}=-1$.故选 C.

4.【答案】B

【解析】由题意可知,$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+3\sin n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[2+3\dfrac{\sin n}{n}\right]=2$.故选 B.