数学考前冲刺卷(一)

一、单项选择题(本大题共 10 小题,每小题 4 分,共 40 分)

1. 已知集合 $U=\{0,1,2,3,4\}$,集合 $M=\{1,2,3\}$,$N=\{2,4\}$,则 $M\cap(\complement_U N)$等于 ( )

A. $\{2\}$ B. $\{1,3\}$

C. $\{0,1,3\}$ D. $\{0,1,2,3\}$

2. 已知集合 $A=\{1,3,5\}$,$B=\{2,a,b\}$,若 $A\cap B=\{1,3\}$,则 $a+b$ 的值为 ( )

A. 4 B. 7

C. 9 D. 10

3. “$(x+1)(x-3)=0$”是“$x=3$”的 ( )

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件

C. 充分且必要条件 D. 既不充分也不必要条件

4. 下列函数中,表示同一函数的是 ( )

A. $f(x)=|x|,g(x)=x$ B. $f(x)=|x|,g(x)=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$

C. $f(x)=x,g(x)=\dfrac{x^2}{x}$ D. $f(x)=x(x-1),g(x)=x^2-x(x>1)$

5. 如果指数函数 $y=(a-1)^x$ 是增函数,则 a 的取值范围是 ( )

A. $a>2$ B. $a<2$

C. $a>1$ D. $1<a<2$

6. 已知 $\cos\alpha=-\dfrac{1}{3}$,且 $\alpha\in(-\pi,0)$,则 $\sin\alpha=$ ( )

A. $-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ B. $\dfrac{2}{3}$

C. $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ D. $-\dfrac{2}{3}$

7. 在等比数列$\{a_n\}$中,$a_1=1$,$a_2=-2$,则 a_9 等于 ( )

A. 256 B. -256

C. 512 D. -512

8. 函数 $f(x)=2^{kx}$,$g(x)=\log_3 x$,若 $f(-1)=g(9)$,则实数 k 的值是 ( )

A. 1 B. 2

C. -1 D. -2

9. 下列说法正确的是 ( )

A. 经过三点有且只有一个平面

B. 经过两条直线有且只有一个平面

C. 经过平面外一点有且只有一个平面与已知平面垂直

D. 经过平面外一点有且只有一条直线与已知平面垂直

10. 若有 7 名同学排成一排照相,恰好甲、乙两名同学相邻,并且丙、丁两名同学不相邻的概率是 ( )

A. $\dfrac{4}{21}$ B. $\dfrac{1}{21}$

C. $\dfrac{1}{14}$ D. $\dfrac{2}{7}$

二、填空题(本大题共 5 小题,每小题 4 分,共 20 分)

11. 若指数函数 $y=a^x$ 的图像经过点$(-1,3)$,则 a 等于__________.

12. 若 $y=(m-1)x^2+2mx+3$ 是偶函数,则 $m=$__________.

13. 若 $\tan(\pi+\alpha)=2$,则 $\cos 2\alpha=$________.

14. 经过两条直线 $2x-y+3=0$ 和 $4x+3y+1=0$ 的交点且垂直于直线 $2x-3y+4=0$ 的直线方程为_______________.

15. 已知以点$(-1,2)$为圆心的圆 C 与直线 $2y-x=0$ 相切,则圆 C 的方程为_______________.

三、解答题(本大题共 7 小题,第 16~20 小题,每小题 8 分,第 21~22 小题,每小题 10 分,共 60 分)

16. 已知 $\boldsymbol{a}=(-3,5)$,$\boldsymbol{b}=(-15,m)$.

(1)当实数 m 为何值时,$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$;

(2)当实数 m 为何值时,$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.

17. 已知 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=ax^2-2x$，且 $f(4)=8$.

(1)求实数 a 的值；

(2)求该函数的解析式.

18. 已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $S_n=2n^2-n$，数列$\{b_n\}$满足 $b_n=na_n+7n(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)证明：$\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\frac{1}{b_3}+\cdots+\frac{1}{b_n}<\frac{1}{4}$.

19. 在$\triangle ABC$中，角A,B,C的对边分别为a,b,c，$B=\frac{\pi}{3}$，$\cos A=\frac{4}{5}$，$b=\sqrt{3}$.

(1)求$\sin C$的值；

(2)求$\triangle ABC$的面积.

20. 某班拟组织部分学生参观爱国主义教育基地. 已知该班第一小组有5名男生与3名女生，从中任意选取3名学生去参观.

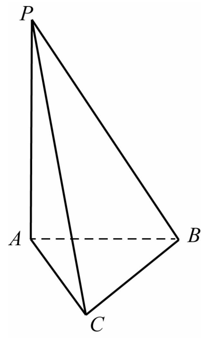
(1)用ξ表示选取的3人中女生的人数，求ξ的分布列；

(2)求选取的3人中，女生人数多于男生人数的概率.

21. 如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA\perp$平面 ABC，$AB\perp BC$.

(1)证明：平面 $PBC\perp$平面 PAB；

(2)若 $AB=BC=2$，直线 PB 与平面 ABC 所成的角为 60°，求三棱锥 $P-ABC$ 的体积.



22. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a,b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{6}}{2}$，左、右焦点分别为 F_1,F_2，且$|F_1F_2|=2\sqrt{3}$.

(1)求双曲线 C 的方程；

(2)设直线 $y=x+\sqrt{3}$与双曲线 C 相交于 M,N 两点，求$\triangle MNF_2$ 的面积.

数学考前冲刺卷(二)

一、单项选择题(本大题共 10 小题,每小题 4 分,共 40 分)

1. 集合 $M=\{a,c,d\}$,$N=\{b,e,f\}$,则 $M\cap N$ 等于 (　　)

A. $\{a\}$　　B. $\{a,b\}$

C. $\{b,c,e\}$　　D. $\varnothing$

2. 已知集合 $A=\{2,3\}$,则集合 A 的子集个数是 (　　)

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

3. 函数 $f(x)=\log_3(1+x)$的定义域为 (　　)

A. $(-\infty,-1)$　　B. $(-1,+\infty)$

C. $[-1,+\infty)$　　D. $(0,+\infty)$

4. 某函数的图像经过点$(-1,-1)$和点$(1,1)$,则它的解析式不可能为 (　　)

A. $y=x$　　B. $y=\dfrac{1}{x}$

C. $y=\sqrt{x}$　　D. $y=x^3$

5. 如果奇函数 $f(x)$在$[3,7]$上是增函数且最小值是 5,那么 $f(x)$在$[-7,-3]$上是 (　　)

A. 减函数且最小值是-5　　B. 减函数且最大值是-5

C. 增函数且最小值是-5　　D. 增函数且最大值是-5

6. 已知 $\sin 2x=a-1$,则实数 a 的取值范围是 (　　)

A. $[-1,1]$　　B. $[0,1]$

C. $[0,2]$　　D. $[-2,0]$

7. 若等差数列$\{a_n\}$的前 7 项和为 70,则 a_1+a_7 等于 (　　)

A. 5　　B. 10

C. 15　　D. 20

8. 若实数 $a>0$,则下列等式成立的是 (　　)

A. $(-a)^{-2}=a^2$　　B. $2a^{-3}=\dfrac{1}{2a^3}$

C. $(-a)^0=-1$　　D. $(a^{-\frac{1}{4}})^4=\dfrac{1}{a}$

9. 过点 $P(1,2)$与圆 $x^2+y^2=5$ 相切的直线方程是 (　　)

A. $x-2y+3=0$　　B. $x-2y+5=0$

C. $x+2y-5=0$　　D. $x+2y-\sqrt{5}=0$

10. 某职业学校的一个数学兴趣小组有 4 名男生和 3 名女生,若从这 7 名学生中任选 3 名参加数学竞赛,要求既有男生又有女生,则不同选法的种数是 (　　)

A. 60　　B. 31

C. 30　　D. 10

二、填空题(本大题共 5 小题,每小题 4 分,共 20 分)

11. 已知集合 $A=\{0,1,2,3\}$,$B=\{x|x^2-x-2<0\}$,则 $A\cap B=$________.

12. 函数 $y=\sqrt{x-1}+\lg(2-x)$的定义域是________.

13. 已知 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,且当 $x<0$ 时,$f(x)=3^x$,则 $f(\log_3 2)$的值为________.

14. 函数 $y=2\cos x-8$ 的最小值为__________.

15. 已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,且 $a_1=16$,$a_2=13$,则 $S_7=$ __________.

三、解答题(本大题共 7 小题,第 16～20 小题,每小题 8 分,第 21～22 小题,每小题 10 分,共 60 分)

16. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,0)$,$\boldsymbol{b}=(-1,\sqrt{3})$.

(1)求向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$;

(2)求$|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|$.

17. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2x-5, x\geqslant 0,\\ x^2+2x, x<0.\end{cases}$

(1)求 $f[f(1)]$的值；

(2)若 $f(|a-1|)<3$,求实数 a 的取值范围.

18. 设数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,已知 $S_n=2-a_n$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)设 $b_n=na_n$,求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 T_n.

19. 在$\triangle ABC$中，内角A，B，C的对边分别是a，b，c. 已知$b=2$，$c=1$，$\cos A=\frac{3}{4}$.

(1)求a的值；

(2)求$\sin\left(2A+\frac{\pi}{3}\right)$的值.

20. 端午节吃粽子是我国的传统习俗. 设一盘中装有 6 个粽子，其中肉粽 1 个，蛋黄粽 2 个，豆沙粽 3 个，这三种粽子的外观完全相同，从中任意选取 2 个.

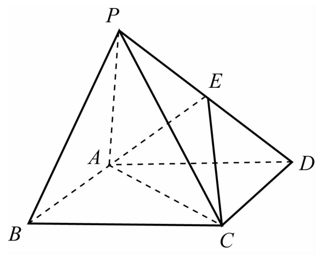
(1)用ξ表示取到的豆沙粽的个数，求ξ的分布列；

(2)求选取的 2 个中至少有 1 个豆沙粽的概率.

21. 如图，四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是矩形，$PA\perp$平面 $ABCD$，E 为 PD 的中点.

(1)证明：$PB//$平面 ACE；

(2)设 $PA=1$，$AD=\sqrt{3}$，直线 PB 与平面 $ABCD$ 所成的角为 $45°$，求四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 的体积.



22. 已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$经过点 $A(2,0)$，且离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(1)求椭圆 C 的方程；

(2)设直线 $y=x-1$ 与椭圆 C 相交于 P，Q 两点，求$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}$的值.

数学考前冲刺卷(一)
参考答案及解析

一、单项选择题

1. B **解析**:因为 $\complement_U N=\{0,1,3\}$,所以 $M\cap(\complement_U N)=\{1,3\}$. 故选 B.

2. A **解析**:由题意可知 $a=1,b=3$ 或 $a=3,b=1$,所以 $a+b=4$,故选 A.

3. B **解析**:方程 $(x+1)(x-3)=0$ 的解为 $x=-1$ 或 $x=3$,所以"$(x+1)(x-3)=0$"是"$x=3$"的必要不充分条件.

4. B **解析**:A 中的两个函数的对应法则不同,C 和 D 中的两个函数的定义域不同,所以 A,C,D 选项中的两个函数都不是同一函数,故选 B.

5. A **解析**:由题意可得 $a-1>1$,解得 $a>2$.

6. A **解析**:因为 $\alpha\in(-\pi,0)$,所以 $\sin\alpha<0$. 所以 $\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

7. A **解析**:公比 $q=\frac{a_2}{a_1}=-2$,则 $a_9=a_1q^8=1\times(-2)^8=256$. 故选 A.

8. C **解析**:$g(9)=\log_3 9=2=f(-1)=2^{-k}$,解得 $k=-1$,故选 C.

9. D **解析**:在 A 中,经过不共线的三点有且只有一个平面,经过共线的三点有无数个平面,故 A 错误;
在 B 中,两条相交线能确定一个平面,两条平行线能确定一个平面,两条异面直线不能确定一个平面,故 B 错误;
在 C 中,经过平面外一点有无数个平面与已知平面垂直,故 C 错误;
在 D 中,由线面垂直的性质得经过平面外一点有且只有一条直线与已知平面垂直,故 D 正确. 故选 D.

10. A **解析**:先利用捆绑法将甲、乙进行捆绑并全排列,有 A_2^2 种排列方法,将甲、乙作为一个整体,除去丙、丁将其他人进行全排列,有 A_4^4 种排列方法,再利用插空法将丙、丁进行插空,有 A_5^2 种排列方法;总共有 A_7^7 种排列方法,所以概率为 $\frac{A_2^2A_4^4A_5^2}{A_7^7}=\frac{4}{21}$.

二、填空题

11. $\frac{1}{3}$ **解析**:把点 $(-1,3)$ 代入函数表达式可得 $a^{-1}=3$,解得 $a=\frac{1}{3}$.

12. 0 **解析**:因为函数 $y=(m-1)x^2+2mx+3$ 为偶函数,所以 $f(-x)=f(x)$,
即 $(m-1)(-x)^2+2m(-x)+3=(m-1)x^2+2mx+3$,整理,得 $m=0$.

13. $-\frac{3}{5}$ **解析**:由 $\tan(\pi+\alpha)=2$ 得 $\tan\alpha=2$,$\sin\alpha=2\cos\alpha$. 因为 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$,
所以 $4\cos^2\alpha+\cos^2\alpha=1$,于是 $\cos^2\alpha=\frac{1}{5}$.
故 $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=-\frac{3}{5}$.

14. $3x+2y+1=0$ **解析**:由 $\begin{cases}2x-y+3=0,\\4x+3y+1=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=-1,\\y=1,\end{cases}$ 所以两条直线 $2x-y+3=0$ 和 $4x+3y+1=0$ 的交点为 $(-1,1)$. 设垂直于直线 $2x-3y+4=0$ 的直线方程为 $3x+2y+C=0$,把 $(-1,1)$ 代入得 $-3+2+C=0$,计算得出 $C=1$,故所求直线方程为 $3x+2y+1=0$.

15. $(x+1)^2+(y-2)^2=5$ **解析**:圆心到切线的距离为 $\frac{|2\times2+(-1)\times(-1)|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$. 因为直线与圆相切,所以圆心到切线的距离等于圆的半径. 故圆 C 的方程为 $(x+1)^2+(y-2)^2=5$.

三、解答题

16. **解**:(1)当 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 时,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.
即 $(-3)\times(-15)+5m=0$,解得 $m=-9$.
(2)当 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 时,$-3m=5\times(-15)$,解得 $m=25$.

17. **解**:(1)由题意可知,因为 $f(4)=8$,

所以 $16a-8=8$，即 $a=1$.

(2)设 $x<0$，则 $-x>0$，$f(-x)=x^2+2x$.

因为 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，

所以 $-f(x)=f(-x)$，

即 $f(x)=-f(-x)=-x^2-2x$.

综上所述，$f(x)=\begin{cases}-x^2-2x, x<0,\\ x^2-2x, x\geqslant 0.\end{cases}$

18.(1)**解**：当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=1$，当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2n^2-n-[2(n-1)^2-(n-1)]=4n-3$.

$a_1=1$ 满足上式，所以 $a_1=4n-3(n\in N^*)$.

(2)**证明**：$b_n=na_n+7n=n(4n-3)+7n=4n(n+1)$，

则 $\frac{1}{b_n}=\frac{1}{4n(n+1)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$，

所以有 $\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\frac{1}{b_3}+\cdots+\frac{1}{b_n}$

$=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)<\frac{1}{4}$.

19.**解**：(1)因为角 A 是三角形内角，且 $\cos A=\frac{4}{5}$，

所以 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{3}{5}$. 于是 $\sin C=\sin[\pi-(A+B)]=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3+4\sqrt{3}}{10}$.

(2)在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理，得 $a=\frac{b\cdot\sin A}{\sin B}=\frac{\sqrt{3}\times\frac{3}{5}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{6}{5}$，所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}ab\sin C$

$=\frac{1}{2}\times\frac{6}{5}\times\sqrt{3}\times\frac{3+4\sqrt{3}}{10}=\frac{36+9\sqrt{3}}{50}$.

20.**解**：(1)根据题意，ξ 可能的取值为 0,1,2,3，

$P(\xi=0)=\frac{C_5^3}{C_8^3}=\frac{10}{56}=\frac{5}{28}$，

$P(\xi=1)=\frac{C_3^1C_5^2}{C_8^3}=\frac{30}{56}=\frac{15}{28}$，

$P(\xi=2)=\frac{C_3^2C_5^1}{C_8^3}=\frac{15}{56}$，

$P(\xi=3)=\frac{C_3^3}{C_8^3}=\frac{1}{56}$，

所以 ξ 的分布列为

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{5}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{1}{56}$

(2)选取的 3 人中，女生人数多于男生人数的概率 $P=P(\xi=2)+P(\xi=3)=\frac{15}{56}+\frac{1}{56}=\frac{2}{7}$.

21.(1)**证明**：因为 $PA\perp$ 平面 ABC，$BC\subset$ 平面 ABC，

所以 $PA\perp BC$.

又因为 $AB\perp BC$，$PA\cap AB=A$，

所以 $BC\perp$ 平面 PAB，

而 $BC\subset$ 平面 PBC，所以平面 $PBC\perp$ 平面 PAB.

(2)**解**：因为 $PA\perp$ 平面 ABC，所以 $\angle PBA$ 是直线 PB 与平面 ABC 所成的角，$\angle PBA=60^\circ$.

在直角三角形 PAB 中，$PA=2\tan 60^\circ=2\sqrt{3}$，

$S_{\triangle ABC}=\frac{2\times 2}{2}=2$，故 $V_{P\text{-}ABC}=\frac{1}{3}\times 2\times 2\sqrt{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

22.**解**：(1)由题知 $2c=|F_1F_2|=2\sqrt{3}$，$c=\sqrt{3}$，离心率为 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，得 $a=\sqrt{2}$.

所以 $b^2=c^2-a^2=1$，

所以双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{2}-y^2=1$.

(2)设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，依题意列方程组得

$\begin{cases}y=x+\sqrt{3},\\ \frac{x^2}{2}-y^2=1,\end{cases}$ 消元得 $x^2+4\sqrt{3}x+8=0$，由根与系数的关系可得 $x_1+x_2=-4\sqrt{3}$，$x_1x_2=8$.

由弦长公式可得 $|MN|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{2}\sqrt{(-4\sqrt{3})^2-4\times 8}=4\sqrt{2}$.

点 $F_2(\sqrt{3},0)$ 到直线 MN 的距离 $d=\frac{|\sqrt{3}+\sqrt{3}|}{\sqrt{2}}=\sqrt{6}$.

所以 $S_{\triangle MNF_2}=\frac{1}{2}|MN|\cdot d=\frac{1}{2}\times 4\sqrt{2}\times\sqrt{6}=4\sqrt{3}$.

数学考前冲刺卷(二)
参考答案及解析

一、单项选择题

1. D　**解析**:因为集合 $M=\{a,c,d\}$,$N=\{b,e,f\}$,所以两集合中没有相同的元素,即 $M\cap N=\varnothing$,故选 D.

2. D　**解析**:集合 $A=\{2,3\}$ 的子集分别是 $\varnothing$,$\{2\}$,$\{3\}$,$\{2,3\}$,共有 4 个.故选 D.

3. B　**解析**:由题意可得 $1+x>0$,解得 $x>-1$.故选 B.

4. C　**解析**:$y=\sqrt{x}$的定义域为$\{x|x\geqslant 0\}$,所以不可能经过点$(-1,-1)$.

5. D　**解析**:由函数图像可知 $f(x)$在$[-7,-3]$上是增函数且最大值是-5.

6. C　**解析**:因为$-1\leqslant\sin 2x\leqslant 1$,所以$-1\leqslant a-1\leqslant 1$,解得 $0\leqslant a\leqslant 2$.

7. D　**解析**:根据等差数列前 n 项和公式得 $S_7=\dfrac{7\times(a_1+a_7)}{2}=70$,故 $a_1+a_7=20$.故选 D.

8. D　**解析**:A 中$(-a)^{-2}=\dfrac{1}{a^2}$,B 中 $2a^{-3}=\dfrac{2}{a^3}$,C 中$(-a)^0=1$,故 D 选项正确.

9. C　**解析**:将点 $P(1,2)$代入圆方程,可知点 P 在圆上.又因为将点 P 坐标代入 B,D,等式不成立,可排除 B,D.又因为直线与圆相切,所以圆心到直线的距离等于半径,又圆心为$(0,0)$,半径为$\sqrt{5}$,即圆心到直线 $x-2y+3=0$ 的距离 $d=\dfrac{3}{\sqrt{5}}\neq\sqrt{5}$,圆心到直线 $x+2y-5=0$ 的距离 $d'=\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$,则只有 C 符合.

10. C　**解析**:由题知,有两种情况:①两名男生一名女生有 $C_4^2C_3^1=18$(种),②两名女生一名男生有 $C_4^1C_3^2=12$(种),所以一共有 $18+12=30$(种)选法.

二、填空题

11. $\{0,1\}$　**解析**:因为 $B=\{x|x^2-x-2<0\}=\{x|-1<x<2\}$,所以 $A\cap B=\{0,1\}$.

12. $[1,2)$　**解析**:使根式$\sqrt{x-1}$有意义的实数 x 的集合是$\{x|x-1\geqslant 0\}=\{x|x\geqslant 1\}$,使对数 $\lg(2-x)$有意义的实数 x 的集合是$\{x|2-x>0\}=\{x|x<2\}$.因此,函数 $y=\sqrt{x-1}+\lg(2-x)$的定义域是$\{x|1\leqslant x<2\}$,即$[1,2)$.

13. $-\dfrac{1}{2}$　**解析**:由题意可知,$f(\log_3 2)=-f(-\log_3 2)=-f\left(\log_3\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}$.

14. -10　**解析**:由$-1\leqslant\cos x\leqslant 1$,得$-10\leqslant 2\cos x-8\leqslant -6$.所以原函数的最小值为$-10$.

15. 49　**解析**:设公差为 d,则 $d=a_2-a_1=-3$.所以 $S_7=7a_1+\dfrac{7\times(7-1)}{2}\times(-3)=49$.

三、解答题

16. **解**:(1)因为 $\boldsymbol{a}=(2,0)$,$\boldsymbol{b}=(-1,\sqrt{3})$,

所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2\times(-1)+0\times\sqrt{3}=-2$,

所以 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=-\dfrac{1}{2}$,

则向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 的夹角为 120°.

(2)$|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=\sqrt{\boldsymbol{a}^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{b}^2}=\sqrt{4-8+16}=2\sqrt{3}$.

17. **解**:(1)因为 $1>0$,

所以 $f(1)=2\times 1-5=-3$,

因为$-3<0$,

所以 $f[f(1)]=f(-3)=(-3)^2+2\times(-3)=3$.

(2)因为$|a-1|\geqslant 0$,

则 $f(|a-1|)=2|a-1|-5$.

因为 $f(|a-1|)<3$,

所以 $2|a-1|-5<3$,

即$|a-1|<4$,

解得$-3<a<5$.

故实数 a 的取值范围为$(-3,5)$,或者写为$\{a|-3<a<5\}$亦可.

18. **解**:(1)当 $n\geqslant 2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=a_{n-1}-a_n\Rightarrow$

$a_n=\frac{1}{2}a_{n-1}$，当 $n=1$ 时，$a_1=2-a_1\Rightarrow a_1=1$，因此 $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

(2)$b_n=na_n=n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，则 $T_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=1+2\times\frac{1}{2}+3\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，①

$2T_n=2+2\times1+3\times\frac{1}{2}+4\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+n\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$，②

② − ① 得，$T_n=3+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}\right)-n\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=4-\frac{1}{2^{n-2}}-n\cdot\frac{1}{2^{n-1}}$.

19. **解**：(1)根据余弦定理，得 $a=\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos A}=\sqrt{2^2+1^2-2\times2\times1\times\frac{3}{4}}=\sqrt{2}$.

(2)因为 $\cos A=\frac{3}{4}$，所以 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{\sqrt{7}}{4}$，于是 $\sin\left(2A+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\sin 2A+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2A=\sin A\cos A+\frac{\sqrt{3}}{2}(2\cos^2 A-1)=\frac{3\sqrt{7}+\sqrt{3}}{16}$.

20. **解**：(1)由条件可知 ξ 的可能取值为 0，1，2，

$P(\xi=0)=\frac{C_3^2}{C_6^2}=\frac{1}{5}$，

$P(\xi=1)=\frac{C_3^1C_3^1}{C_6^2}=\frac{3}{5}$，

$P(\xi=2)=\frac{C_3^2}{C_6^2}=\frac{1}{5}$.

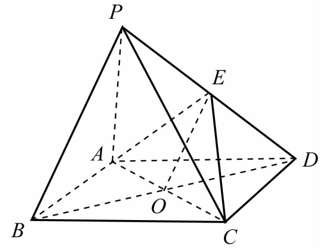
ξ 的分布列：

ξ	0	1	2
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

(2)选取的 2 个中至少有 1 个豆沙粽的对立事件是 1 个豆沙粽都没有，故选取的 2 个中至少有 1 个豆沙粽的概率 $P=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$.

21. (1)**证明**：连接 BD 交 AC 于点 O，连接 OE.

在 $\triangle PBD$ 中，因为 $PE=DE$，$BO=DO$，所以 $PB/\!/OE$. 因为 $OE\subset$ 平面 ACE，$PB\not\subset$ 平面 ACE，则 $PB/\!/$ 平面 ACE.



(2)**解**：因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $\angle PBA$ 是直线 PB 与平面 $ABCD$ 所成的角，所以 $\angle PBA=45°$.

又因为 $PA=1$，$AD=\sqrt{3}$，所以 $PA=1=AB$，所以 $V_{P\text{-}ABCD}=\frac{1}{3}\times PA\times AB\times AD=\frac{1}{3}\times1\times1\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. 所以四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 的体积为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

22. **解**：(1)因为椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 经过点 $A(2,0)$，所以 $a=2$.

因为离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{c}{a}=\frac{c}{2}$，所以 $c=\sqrt{3}$，

所以 $b^2=a^2-c^2=4-3=1$，

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2)由 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+y^2=1,\\ y=x-1,\end{cases}$ 得 $5x^2-8x=0$，解得 $x_1=\frac{8}{5}$，$x_2=0$，所以 $\begin{cases}x_1=\frac{8}{5},\\ y_1=\frac{3}{5},\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=0,\\ y_2=-1,\end{cases}$ 解得 $P\left(\frac{8}{5},\frac{3}{5}\right)$，$Q(0,-1)$ 或 $Q\left(\frac{8}{5},\frac{3}{5}\right)$，$P(0,-1)$，

所以 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=\left(\frac{8}{5}-2,\frac{3}{5}\right)\cdot(0-2,-1)=\frac{4}{5}-\frac{3}{5}=\frac{1}{5}$.