数学考前冲刺试卷(二)

总分:150 分　考试时间:120 分钟

一、单项选择题(本大题共 10 小题,每小题 4 分,共 40 分.在下列每小题中,选出一个正确答案)

1. 集合 $A=\{0,2,a\}$,$B=\{1,a^2\}$,若 $A\cup B=\{0,1,2,4,16\}$,则 a 的值为 (　　)

A. 0　　B. 1

C. 2　　D. 4

2. 若复数 $z=\frac{1+bi}{2+i}(b\in\mathbf{R}$,i 是虚数单位)是纯虚数,则复数 z 的共轭复数是 (　　)

A. $\frac{3}{5}i$　　B. $-\frac{3}{5}i$

C. i　　D. $-$i

3. 逻辑代数式中,“$A+B=1$”是“$B=1$”的 (　　)

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. 已知数组 $\boldsymbol{a}=(1,2,1)$,$\boldsymbol{b}=(-2,1,2)$,则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$ (　　)

A. (2,2,2)　　B. (−1,3,3)

C. 4　　D. 2

5. 过抛物线 $y^2=8(x+3)$的顶点,且与直线 $x-y+4=0$ 平行的直线方程是 (　　)

A. $x+y-3=0$　　B. $x+y+3=0$

C. $x-y+3=0$　　D. $x-y-3=0$

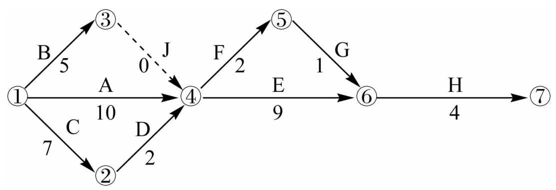
6. 正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中,A_1D 与 BD_1 所成的角为 (　　)

A. 30°　　B. 45°　　C. 60°　　D. 90°

7. 某项工程的流程图如图所示(单位/min),从开始节点①到终止节点⑦的路径有 (　　)

A. 5 条　　B. 6 条

C. 7 条　　D. 8 条



8. 某五所大学进行自主招生,同时向一所重点中学的五位学习成绩优秀,并在某些方面有特长的学生发出提前录取通知单.若这五名学生都乐意进这五所大学中的任意一所就读,则仅有两名学生被录取到同一所大学(其余三人从其他学校中各选一所不同的大学)的就读方式有 (　　)

A. 120 种　　B. 3 125 种

C. 240 种　　D. 1 200 种

9. 点 $P(x,y)$是直线 $x+3y-2=0$ 上的动点,则代数式 3^x+27^y 有 (　　)

A. 最大值 8　　B. 最小值 8

C. 最小值 6　　D. 最大值 6

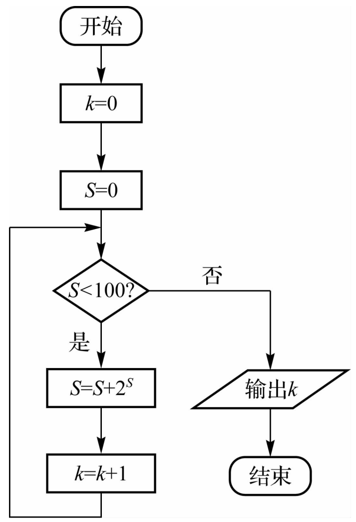
10. 已知 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,当 $x>0$ 时,$f(x)=xe^{x-1}$,当 $x\leqslant 0$ 时,$f(x)$的解析式是 (　　)

A. xe^{-x-1}　　B. $-xe^{-x-1}$

C. xe^{1-x}　　D. $-xe^{1-x}$

二、填空题(本大题共 5 小题,每小题 4 分,共 20 分)

11. 阅读如图所示的程序框图,运行该程序后输出的 k 的值是__________.



12. 在数列$\{a_n\}$中,$a_1=4$,$a_{n+1}-a_n=2(n\in\mathbf{N}_+)$,则 $a_6=$__________.

13. 函数 $y=\sin x\cos\left(x-\frac{\pi}{5}\right)+\cos x\sin\left(x-\frac{\pi}{5}\right)$的最小正周期是__________.

14. 偶函数 $y=f(x)$的图像与 x 轴有三个交点,则方程 $f(x)=0$ 的所有根之和为__________.

15. 双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别是 F_1,F_2,过 F_1 作倾斜角为 30°的直线交双曲线右支于 M 点,若 $MF_2\perp x$ 轴,则双曲线的离心率为__________.

三、解答题(本大题共 8 小题,共 90 分)

16.(8 分)已知函数 $f(x)=\log_2[(a-1)x-a+1]$的定义域为$(1,+\infty)$.

(1)求 a 的取值范围;

(2)解不等式:$a^{x^2-x}>a^{8-3x}$.

17.(10 分)已知函数 $f(x)=3^x$,且 $f(a+2)=18$,$g(x)=3^{ax}-4^x$ 的定义域为区间$[0,1]$.

(1)求 $g(x)$的解析式;

(2)判定函数 $g(x)$的增减性;

(3)求 $g(x)$的值域.

18.(12 分)将一颗质地均匀的正方体骰子(六个面的点数分别为 1,2,3,4,5,6)先后抛掷两次,记第一次出现的点数为 a,第二次出现的点数为 b.设复数 $z=a+b\mathrm{i}$.

(1)求事件“$z-3\mathrm{i}$ 为实数”的概率;

(2)求事件“$|z-2|\leqslant 3$”有多少种不同的情况,并加以说明.

19.(12 分)在$\triangle ABC$ 中,a,b,c 分别为角 A,B,C 的对边,且满足 $4\cos^2\dfrac{A}{2}-\cos 2(B+C)=\dfrac{7}{2}$.

(1)求角 A 大小;

(2)若 $b+c=3$,$a=\dfrac{3}{2}$,求$\triangle ABC$ 的面积.

20.(10 分)某单位用 2 160 万元购得一块空地,计划在该块地上建造一栋至少 10 层,每层 2 000 平方米的楼房.经测算,若将楼房建为 $x(x\geqslant 10)$层,则每平方米的平均建筑费用为 $560+48x$(单位:元).为了使楼房每平方米的平均综合费用最少,该楼房应建为多少层?

注:平均综合费用=平均建筑费用+平均购地费用,平均购地费用$=\frac{购地总费用}{建筑总面积}$.

21.(14 分)已知数列$\{a_n\}$中,S_n 是它的前 n 项和,并且 $S_{n+1}=4a_n+2(n=1,2,\cdots)$,$a_1=1$.

(1)设 $b_n=a_{n+1}-2a_n(n=1,2,\cdots)$,求证$\{b_n\}$是等比数列,并求其通项公式;

(2)设 $c_n=\frac{a_n}{2^n}(n=1,2\cdots)$,求证$\{c_n\}$是等差数列,并求其通项公式;

(3)求数列$\{a_n\}$的通项公式及前 n 项和公式.

22.（10 分）某养鸡场有 1 万只鸡，用动物饲料和谷物饲料混合喂养．每天每只鸡平均吃混合饲料 0.5 kg，其中动物饲料不能少于谷物饲料的$\frac{1}{5}$．动物饲料每千克 0.9 元，谷物饲料每千克 0.28 元，饲料公司每周仅保证供应谷物饲料 50 000 kg，问饲料怎样混合，才使成本最低？

23.（14 分）设椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左焦点为 F，离心率为$\frac{\sqrt{3}}{3}$，过点 F 且与 x 轴垂直的直线被椭圆截得的线段长为$\frac{4\sqrt{3}}{3}$．

（1）求椭圆的方程；

（2）设 A，B 分别为椭圆的左、右顶点，过点 F 且斜率为 k 的直线与椭圆交于 C，D 两点．若 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB}=8$，求 k 的值．

数学考前冲刺试卷(三)

总分:150 分　考试时间:120 分钟

一、单项选择题(本大题共 10 小题,每小题 4 分,共 40 分.在下列每小题中,选出一个正确答案)

1. 已知集合 $A=\{x|x^2-3x+2=0\}$,集合 $B=\{x|\log_x 4=2\}$,则 $A\cup B=$　(　　)

A. $\{-2,1,2\}$　　B. $\{-2,2\}$

C. $\{1,2\}$　　D. $\{2\}$

2. 若 $i(x+yi)=3+4i$,$x,y\in\mathbf{R}$,则复数 $x+yi$ 的模是　(　　)

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

3. 与$\overline{A}\cdot\overline{B}$相等的是　(　　)

A. AB　　B. $\overline{AB}$　　C. $\overline{A+B}$　　D. $A+B$

4. 已知数组 $\boldsymbol{a}=(0,1,1,0)$,$\boldsymbol{b}=(3,0,0,2)$,则 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 等于　(　　)

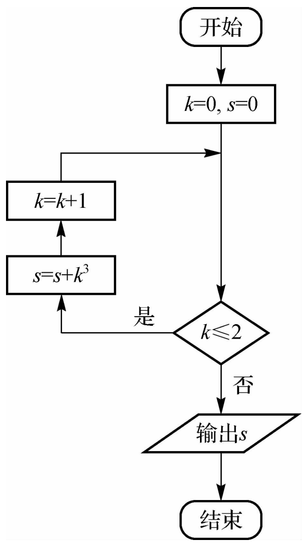
A. $(3,2,4,2)$　　B. $(3,1,1,2)$

C. $(6,1,1,4)$　　D. $(3,2,2,2)$

5. 设等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,若 a_2,a_4 是方程 $x^2-x-2=0$ 的两个实数根,则 S_5 的值是　(　　)

A. $\frac{5}{2}$　　B. 5　　C. $-\frac{5}{2}$　　D. -5

6. 执行如图所示的程序框图,输出的 s 值为　(　　)



A. 8　　B. 9　　C. 27　　D. 36

7. 若圆锥的轴截面是面积为 1 的等腰直角三角形,则该圆锥的体积为　(　　)

A. $\frac{\pi}{3}$　　B. $\frac{\pi}{2}$

C. π　　D. $\frac{4\pi}{3}$

8. 已知 $\tan(\pi-\theta)=\frac{3}{4}$,$\theta\in(0,\pi)$,则 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=$　(　　)

A. $\frac{4}{5}$　　B. $-\frac{4}{5}$

C. $\frac{3}{5}$　　D. $-\frac{3}{5}$

9. A,B 是抛物线 $x^2=y$ 上任意两点(非原点),当$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$最小时,$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$所在两条直线的斜率之积 $k_{OA}\cdot k_{OB}=$　(　　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{1}{2}$

C. $\sqrt{3}$　　D. $-\sqrt{3}$

10. 若$\left(x-\frac{1}{x}\right)^n$ 展开式的第 4 项为含 x^3 的项,则 n 等于　(　　)

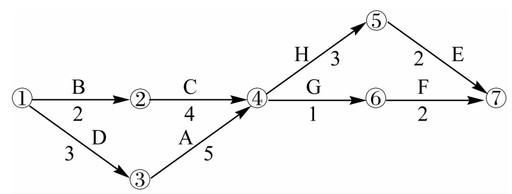
A. 8　　B. 9

C. 10　　D. 11

二、填空题(本大题共 5 小题,每小题 4 分,共 20 分)

11. 设函数 $f(x)=x^3\cos x+1$,若 $f(a)=11$,则 $f(-a)=$____________.

12. 某项工程的流程图如下图所示(单位:天),则完成该工程的最短总工期是____________天.



13. 以双曲线$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$的右顶点为圆心,且与直线$\begin{cases}x=\sqrt{3}+\frac{1}{2}t,\\ y=3+\frac{\sqrt{3}}{2}t\end{cases}$(其中 t 为参数)相切的圆的标准方程为____________.

14. 若 $\log_4(3a+4b)=\log_2\sqrt{ab}$,则 $a+b$ 的最小值是____________.

15. 对于实数 m,n,定义一种运算:$m*n=\begin{cases}m, m\geqslant n,\\ n, m<n.\end{cases}$ 已知函数 $f(x)=a*a^x$,其中 $0<a<1$,若 $f(t-1)>f(4t)$,则实数 t 的取值范围是____________.

三、解答题(本大题共 8 小题,共 90 分)

16. (8 分)已知函数 $f(x)=a^x(a>0$ 且 $a\neq 1)$在区间$[-2,4]$上的最大值是 16.

(1)求实数 a 的值;

(2)若函数 $g(x)=\log_2(x^2-3x+2a)$的定义域是 $\mathbf{R}$,求满足不等式 $\log_a(1-2t)\leqslant 1$ 的实数 t 的取值范围.

17. (10 分)已知函数 $f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的奇函数,且 $f(x)$的图像关于 $x=1$ 对称,当 $x\in[0,1]$时,$f(x)=2^x-1$,

(1)求证:$f(x)$是周期函数;

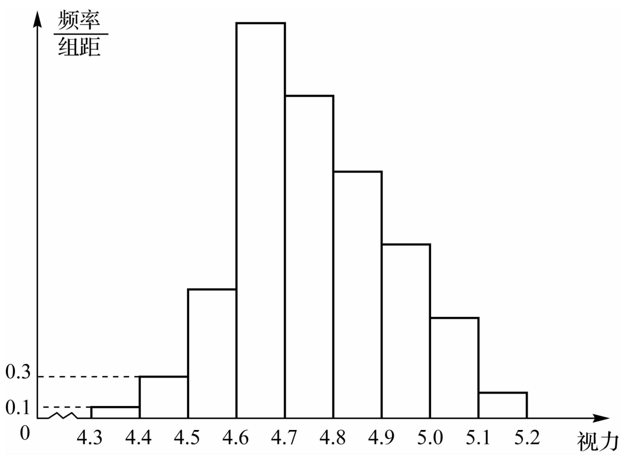
(2)当 $x\in[1,2]$时,求 $f(x)$的解析式;

(3)计算 $f(0)+f(1)+f(2)+\cdots+f(2\ 023)$的值.

18.(12 分)为了解某中等专业学校的视力情况,随机地抽查了该校 100 名高三学生的视力情况,得到频率分布直方图如图所示,由于不慎将部分数据丢失,但知道前 4 组的频数成等比数列,后 6 组的频数成等差数列.

(1)为了详细了解高三学生的视力情况,从样本中视力在$[4.9,5.1)$中任选 2 名高三学生进行分析,求至少有 1 人视力在$[5.0,5.1)$的概率;

(2)设 a,b 表示参加抽查的某两位高三学生的视力,且已知 $a,b\in[4.5,4.6)\cup[4.9,5.0)$,求事件“$|a-b|>0.1$”的概率.



19.(12 分)已知 A,B,C 是$\triangle ABC$ 的三个内角,向量 $\boldsymbol{m}=(-1,\sqrt{3})$,$\boldsymbol{n}=(\cos A,\sin A)$,且 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=1$.

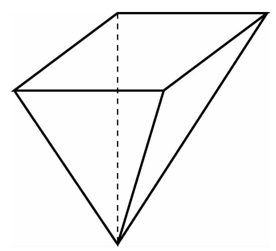
(1)求 A;

(2)若$\dfrac{1+\sin 2B}{\cos^2 B-\sin^2 B}=-3$,求 $\tan B$.

20.(10 分)用一块钢锭烧铸一个厚度均匀,且表面积为 2 平方米的正四棱锥形有盖容器(如图所示),设容器高为 h 米,盖子边长为 a 米.

(1)求 a 关于 h 的解析式;

(2)设容器的容积为 V 立方米,则当 h 为何值时,V 最大?并求出 V 的最大值.(求解本题时,不计容器厚度)



21.(14分)已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,且a_n是S_n与2的等差中项,数列$\{b_n\}$中,$b_1=1$,点$P(b_n,b_{n+1})$在直线$x-y+2=0$上.

(1)求a_1和a_2的值;

(2)求数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$的通项a_n和b_n;

(3)设$c_n=a_n\cdot b_n$,求数列$\{c_n\}$的前n项和T_n.

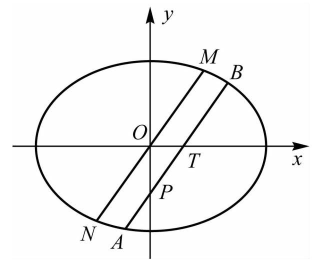
22.(10分)某公司租赁甲、乙两种设备生产A,B两类产品,甲种设备每天能生产A类产品5件和B类产品10件,乙种设备每天能生产A类产品6件和B类产品20件.已知设备甲每天的租赁费为200元,设备乙每天的租赁费为300元.现该公司至少要生产A类产品50件,B类产品140件,则所需租赁费最少为多少元?

23.(14分)如图,在平面直角坐标系xOy中,焦点在x轴上的椭圆C:$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{b^2}=1$经过点$(b,2e)$,其中$e$为椭圆$C$的离心率.过点$T(1,0)$作斜率为$k(k>0)$的直线$l$交椭圆$C$于$A$,$B$两点($A$在$x$轴下方).

(1)求椭圆C的标准方程;

(2)过点O且平行于l的直线交椭圆C于点M,N,求$\frac{|AT|\cdot|BT|}{|MN|^2}$的值;

(3)记直线l与y轴的交点为P.若$\overrightarrow{AP}=\frac{2}{5}\overrightarrow{TB}$,求直线$l$的斜率$k$.



数学考前冲刺试卷(四)

总分:150 分　考试时间:120 分钟

一、单项选择题(本大题共 10 小题,每小题 4 分,共 40 分.在下列每小题中,选出一个正确答案)

1. 已知全集 $U=\{1,2,3,4,5,6\}$,集合 $A=\{1,3,5\}$,$B=\{2,4,5\}$,则 $A\cap \complement_U B=$　　(　　)

A. $\{1,3,6\}$　　B. $\{1,3\}$

C. $\{1\}$　　D. $\{2,4,5\}$

2. 若复数 z 满足 $(1+\mathrm{i})z=2-\mathrm{i}$,则 $|z+\mathrm{i}|=$　　(　　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. 2　　D. $\sqrt{2}$

3. 十进制数 $(37)_{10}$ 转换成二进制数为　　(　　)

A. $(100101)_2$　　B. $(110011)_2$

C. $(110101)_2$　　D. $(100011)_2$

4. 已知数组 $\boldsymbol{a}=(2,4,3)$,$\boldsymbol{b}=(1,m,n)$,$\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{b}$,则 $\log_m(n-1)=$　　(　　)

A. 0　　B. 2

C. -1　　D. -2

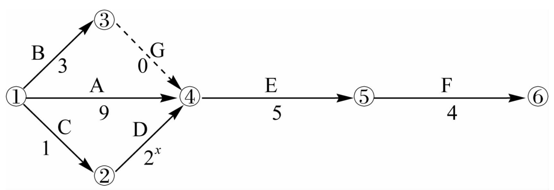
5. 设 $x\in\mathbf{R}$,若"$|x-a|<1(a\in\mathbf{R})$"是"$x^2+x-2>0$"的充分不必要条件,则 a 的取值范围是　　(　　)

A. $(-\infty,-3]\cup[2,+\infty)$　　B. $(-\infty,-3)\cup(2,+\infty)$

C. $(-3,2)$　　D. $[-3,2]$

6. 如图是某项工程的网络图,若最短总工期是 18 天,则图中 x 的最大值为　　(　　)

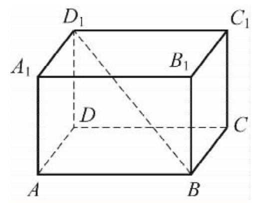
A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4



7. 袋子中装有 4 个红球、3 个黄球和 2 个黑球,从中任取 2 个球,则取到 2 个不同颜色球的取法种数为　　(　　)

A. 9 种　　B. 24 种　　C. 26 种　　D. 29 种

8. 在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,$AB=\sqrt{5}$,$AD=1$,$AA_1=2$,则直线 BD_1 与平面 AA_1D_1D 所成的角等于　　(　　)



A. 30°　　B. 45°

C. 60°　　D. 90°

9. 已知 A_1,A_2 为双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的两个顶点,以 A_1A_2 为直径的圆与双曲线的一条渐近线交于 M,N 两点,若 $\triangle A_1MN$ 的面积为 $\frac{a^2}{2}$,则该双曲线的离心率是　　(　　)

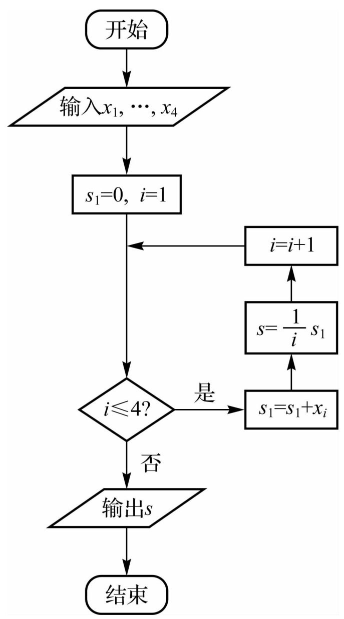
A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$　　B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　C. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$　　D. $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

10. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}|\lg x|,0<x\leqslant 10,\\ -\frac{1}{2}x+6,x>10,\end{cases}$ 若 a,b,c 互不相等,且 $f(a)=f(b)=f(c)$,则 abc 的取值范围是　　(　　)

A. $(1,10)$　　B. $(5,6)$　　C. $(10,12)$　　D. $(20,24)$

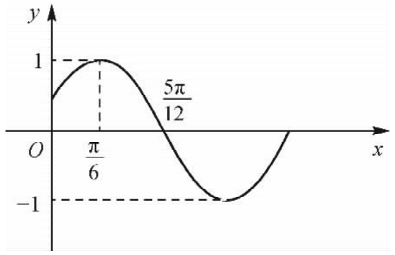
二、填空题(本大题共 5 小题,每小题 4 分,共 20 分)

11. 某城市缺水问题比较突出,为了制定节水管理办法,对全市居民某年的月均用水量进行了抽样调查,根据如图所示的程序框图,若其中 4 位居民的月均用水量(单位:吨)分别为 1,1.5,1.5,2,则输出的结果 s 为____________.



12. 设 S_n 是等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和,若$\frac{a_5}{a_3}=\frac{5}{9}$,则$\frac{S_9}{S_5}=$__________.

13. 已知 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$的图像如图所示,则 $f(x)$的解析式为__________.



14. 若 $P(m,n)$为椭圆$\begin{cases}x=\sqrt{3}\cos\theta,\\ y=\sin\theta\end{cases}$($\theta$ 为参数)上的点,则 $m+n$ 的取值范围是__________.

15. 设 $f(x)$是偶函数,且当 $x>0$ 时是单调函数,则满足 $f(2x)=f\left(\frac{x+1}{x+4}\right)$的所有 x 之和为__________.

三、解答题(本大题共 8 小题,共 90 分)

16. (8 分)已知 $a>0$,且满足不等式 $5^{3a+1}<5^{a+3}$.

(1)求实数 a 的取值范围;

(2)解不等式 $\log_a 4^{x-1}<\log_a 2^{-5x}$.

17. (10 分)已知函数 $f(x)$是定义在$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$上的偶函数,当 $x>0$ 时,$f(x)=\log_2 x$.

(1)求 $f\left(\frac{1}{8}\right)+f(2\sqrt{2})$的值;

(2)求函数 $f(x)$的解析式;

(3)解不等式 $f(x-1)\leqslant 2$.

18. (12 分)已知直线 l_1:$x-2y-1=0$,直线 l_2:$ax-by+1=0$,其中 $a,b\in\{1,2,3,4,5,6\}$.

(1)求直线 $l_1\cap l_2=\varnothing$的概率;

(2)求直线 l_1 与 l_2 的交点位于第一象限的概率.

19.(12分)在$\triangle ABC$中,a,b,c分别是角A,B,C的对边,$\boldsymbol{x}=(2a+c,b)$,$\boldsymbol{y}=(\cos B,\cos C)$,且$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=0$.

(1)求角B的大小;

(2)若$b=\sqrt{3}$,求$|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}|$的最小值.

20.(10分)某单位有员工1 000名,平均每人每年创造利润10万元.为了增加企业竞争力,决定优化产业结构,调整出x名员工从事第三产业,调整后他们平均每人每年创造利润为$10\left(a-\frac{3x}{500}\right)$万元($a>0$),剩下的员工平均每人每年创造的利润可以提高$0.2x\%$.

(1)若要保证剩余员工创造的年总利润不低于原来1 000名员工创造的年总利润,则最多调整出多少名员工从事第三产业?

(2)在(1)的条件下,若调整出的员工创造的年总利润始终不高于剩余员工创造的年总利润,则a的取值范围是多少?

21.(14分)已知数列$\{a_n\}$的相邻两项a_n,a_{n+1}是关于x的方程$x^2-2^nx+b_n=0(n\in\mathbf{N}_+)$的两根,且$a_1=1$.

(1)求证:数列$\left\{a_n-\frac{1}{3}\times 2^n\right\}$是等比数列;

(2)求数列$\{b_n\}$的前n项和S_n.

22.(10分)铁矿石A和B的含铁率a,冶炼每万吨铁矿石的CO_2的排放量b及每万吨铁矿石的价格c如表:

	a	b/万吨	c/百万元
A	50%	1	3
B	70%	0.5	6

某冶炼厂至少要生产1.9万吨铁,若要求CO_2的排放量不超过2万吨,则购买铁矿石的最少费用为多少百万元?

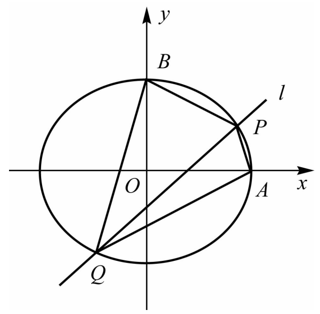
23.(14分)已知椭圆C:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的长轴长为4,离心率为$\frac{1}{2}$.

(1)求椭圆C的方程;

(2)已知点$A(a,0)$,$B(0,b)$,直线l交椭圆C于P,Q两点(点A,B位于直线l的两侧).

①若直线l过坐标原点O,设直线AP,AQ,BP,BQ的斜率分别为k_1,k_2,k_3,k_4,求证:$k_1k_2+k_3k_4$为定值;

②若直线l的斜率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$,求四边形$APBQ$的面积的最大值.



且 $x_0^2+y_0^2=4$.

由 $\begin{cases} y=kx+m, \\ \dfrac{x^2}{3}+y^2=1, \end{cases}$ 消去 y 得：$(3k^2+1)x^2+6kmx+3m^2-3=0$,

$\Delta=36k^2m^2-4(3k^2+1)(3m^2-3)=0$，整理得：$m^2=3k^2+1$,

将 $m=y_0-kx_0$，代入上式得关于 k 的方程：

$(x_0^2-3)k^2-2x_0y_0k+y_0^2-1=0(x_0^2-3\neq0)$,

则 $k_{PA}\cdot k_{PB}=\dfrac{y_0^2-1}{x_0^2-3}=-1(x_0^2+y_0^2=4)$.

当切线的斜率不存在或等于零时，结论显然成立，

所以 $PA\perp PB$.

②**解**：当直线 PQ 的斜率存在时，

由①可知直线 PQ 的方程为 $y=kx+m$,

将 $\begin{cases} y=kx+m, \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$ 整理得：$(k^2+1)x^2+2kmx+m^2-4=0$,

则 $\Delta=4k^2m^2-4(k^2+1)(m^2-4)$，将 $m^2=3k^2+1$，代入整理得 $\Delta=4k^2+12>0$.

设 $Q(x_3,y_3)$，则 $x_0+x_3=\dfrac{-2km}{k^2+1}$,

$x_0x_3=\dfrac{m^2-4}{k^2+1}$,

所以 $k_1k_2=\dfrac{y_0y_3}{x_0x_3}=\dfrac{(kx_0+m)(kx_3+m)}{x_0x_3}=\dfrac{k^2x_0x_3+km(x_0+x_3)+m^2}{x_0x_3}=\dfrac{m^2-4k^2}{m^2-4}$,

将 $m^2=3k^2+1$ 代入，即可求得 $k_1k_2=-\dfrac{1}{3}$,

当直线 PQ 的斜率不存在时，易证 $k_1k_2=-\dfrac{1}{3}$,

所以综上可知：$k_1k_2=-\dfrac{1}{3}$.

数学考前冲刺试卷(二)

参考答案及解析

一、单项选择题

1. D **解析**：根据元素特性，$a\neq0,a\neq2,a\neq1$，故 $a=4$.

2. C **解析**：$z=\dfrac{1+bi}{2+i}=\dfrac{(1+bi)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\dfrac{2+b+(2b-1)i}{5}$，复数是纯虚数，故 $2+b=0$，$b=-2$，故 $z=-i$，复数 z 的共轭复数是 i.

3. B **解析**：“$B=1$”能推出“$A+B=1$”，而由“$A+B=1$”不一定推出“$B=1$”，有可能 $B=\overline{A}$，故为必要不充分条件.

4. D **解析**：根据数组的内积公式 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$，故 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1\times(-2)+2\times1+1\times2=2$.

5. C **解析**：设与直线 $x-y+4=0$ 平行的直线方程为 $x-y+k=0$，抛物线的顶点坐标为$(-3,0)$，代入直线方程，解得 $k=3$，故所求直线方程为 $x-y+3=0$.

6. D **解析**：画出正方体观察直线可得.

7. B **解析**：由题图可知，由①到④有三条路径，由④到⑥有两条路径，由⑥到⑦有一条路径，故根据分步乘法计数原理，可知共有 $3\times2\times1=6$(条).

8. D **解析**：仅有两名学生被录取到同一所大学(其余三人从其他学校中各选一所不同的大学)就读的方式有 $5\times C_5^2A_4^3=1\,200$(种). 故答案选 D.

9. C **解析**：因为点 $P(x,y)$在直线 $x+3y-2=0$ 上，

所以 $x+3y=2$.

所以 $3^x+27^y=3^x+3^{3y}\geqslant2\sqrt{3^x\cdot3^{3y}}=2\sqrt{3^{x+3y}}=2\sqrt{3^2}=6$. 当且仅当 $x=3y$，即 $x=1,y=\dfrac{1}{3}$ 时，等号成立. 所以代数式 3^x+27^y 有最小值 6.

10. A **解析**：当 $x=0$ 时，$f(x)=0$.

当 $x<0$ 时，$-x>0$，$f(-x)=-xe^{-x-1}$.

因为 $f(x)$是奇函数，

所以 $f(x)=xe^{-x-1}$.

所以 $x\leqslant0$ 时，$f(x)=xe^{-x-1}$.

二、填空题

11. 4 **解析**:该程序框图的运行过程是:

$k=0,S=0,S=0<100$ 成立,

$S=0+2^0=1,k=0+1=1$;

$S=1<100$ 成立,$S=1+2^1=3,k=1+1=2$;

$S=3<100$ 成立,$S=3+2^3=11,k=2+1=3$;

$S=11<100$ 成立,$S=11+2^{11}=2\ 059,k=3+1=4$;

$S=2\ 059<100$ 不成立,输出 $k=4$.

12. 14 **解析**:由题可知$\{a_n\}$为等差数列,公差为 2,故 $a_6=4+2\times5=14$.

13. π **解析**:化简得 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)$,$T=\pi$.

14. 0 **解析**:由于偶函数图像关于 y 轴对称,且与 x 轴有三个交点,因此一定过原点且另两个互为相反数,故其和为 0.

15. $\sqrt{3}$ **解析**:将 $x=c$ 代入双曲线的方程得 $y=\pm\frac{b^2}{a}$,即 $M\left(c,\frac{b^2}{a}\right)$. 在$\triangle MF_1F_2$ 中,

$\tan 30^\circ=\frac{\frac{b^2}{a}}{2c}$,即$\frac{c^2-a^2}{2ac}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,解得 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{3}$.

三、解答题

16. **解**:(1)由题意得:$(a-1)x-a+1>0$,则$(a-1)x>a-1$.

因为定义域为$(1,+\infty)$,所以 $a-1>0,a>1$.

(2)由(1)得:$a>1$,所以不等式化为:$x^2-x>8-3x$,即:$x^2+2x-8>0$,

解得 $x>2$ 或 $x<-4$,故解集为$\{x|x>2$ 或 $x<-4\}$.

17. **解**:(1)因为 $f(x)=3^x$,且 $f(a+2)=18$,

所以 $3^{a+2}=18$,得 $3^a=2$,

所以 $g(x)=2^x-4^x,x\in[0,1]$.

(2)$g(x)=2^x-4^x=2^x-(2^x)^2$,

设 $t=2^x$,

因为 $x\in[0,1]$,所以 $t\in[1,2]$,

$h(t)=t-t^2=-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$,$h(t)$在$[1,2]$上单调递减.

因为 $t=2^x$ 为$[0,1]$上的增函数,

所以 $g(x)$在$[0,1]$上为减函数.

(3)因为 $g(x)$在$[0,1]$上为减函数,

所以 $g(1)\leqslant g(x)\leqslant g(0)$,即 $g(x)\in[-2,0]$.

故 $g(x)$的值域为$[-2,0]$.

18. **解**:(1)$z-3\mathrm{i}$ 为实数,即 $a+b\mathrm{i}-3\mathrm{i}=a+(b-3)\mathrm{i}$ 为实数,故 $b=3$.

又依题意,b 可取 1,2,3,4,5,6,故出现 $b=3$ 的概率为$\frac{1}{6}$,即事件“$z-3\mathrm{i}$ 为实数”的概率为$\frac{1}{6}$.

(2)由已知,$|z-2|=|a-2+b\mathrm{i}|$,故$(a-2)^2+b^2\leqslant9$,可知,b 的值只能取 1,2,3,

当 $b=1$ 时,$(a-2)^2\leqslant8$,即 a 可取 1,2,3,4,

当 $b=2$ 时,$(a-2)^2\leqslant5$,即 a 可取 1,2,3,4,

当 $b=3$ 时,$(a-2)^2\leqslant0$,即 a 可取 2.

由上可知,共有 9 种情况可使事件“$|z-2|\leqslant3$”成立.

19. **解**:(1)由题意可知 $2(1+\cos A)-2\cos^2A+1=\frac{7}{2}$,整理得 $\cos A=\frac{1}{2}$,故 $A=\frac{\pi}{3}$.

(2)由余弦定理得$\left(\frac{3}{2}\right)^2=b^2+c^2-2bc\times\frac{1}{2}=(b+c)^2-2bc-2bc\times\frac{1}{2}$,解得 $bc=\frac{9}{4}$,故 $S_{\triangle ABC}=\frac{9\sqrt{3}}{16}$.

20. **解**:设楼房每平方米的平均综合费用为 $f(x)$元,

则 $f(x)=560+48x+\frac{2\ 160\times10\ 000}{2\ 000x}$

$=560+48x+\frac{10\ 800}{x}(x\geqslant10,x\in\mathbf{N}_+)$,

所以 $f(x)=560+48x+\frac{10\ 800}{x}$

$\geqslant 560+2\sqrt{48x\cdot\frac{10\ 800}{x}}=2\ 000$,

当且仅当 $48x=\frac{10\ 800}{x}$,即 $x=15$ 时,等号成立.

因此,当 $x=15$ 时,$f(x)$取最小值 2 000.

故为了使楼房每平方米的平均综合费用最少,该楼房应建为 15 层.

21. **解**:(1)因为 $S_{n+1}=4a_n+2$ ①,

所以 $S_{n+2}=4a_{n+1}+2$ ②,

②－①得 $S_{n+2}-S_{n+1}=4a_{n+1}-4a_n(n=1,2,\cdots)$,

即 $a_{n+2}=4a_{n+1}-4a_n$,

变形,得 $a_{n+2}-2a_{n+1}=2(a_{n+1}-2a_n)$. 因为 $b_n=a_{n+1}-2a_n(n=1,2,\cdots)$,所以 $b_{n+1}=2b_n$.

由此可知,数列$\{b_n\}$是公比为 2 的等比数列.

由 $S_2=a_1+a_2=4a_1+2$,又 $a_1=1$,得 $a_2=5$,故 $b_1=a_2-2a_1=3$,所以 $b_n=3\cdot 2^{n-1}$.

(2)因为 $c_n=\frac{a_n}{2^n}(n=1,2,\cdots)$,所以 $c_{n+1}-c_n=\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{a_n}{2^n}=\frac{a_{n+1}-2a_n}{2^{n+1}}=\frac{b_n}{2^{n+1}}$,

将 $b_n=3\cdot 2^{n-1}$ 代入,得 $c_{n+1}-c_n=\frac{3}{4}(n=1,2,\cdots)$,

由此可知,数列$\{c_n\}$是公差为 $\frac{3}{4}$ 的等差数列,它的首项 $c_1=\frac{a_1}{2}=\frac{1}{2}$,

故 $c_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}(n-1)=\frac{3}{4}n-\frac{1}{4}$.

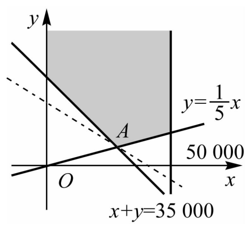
(3)因为 $c_n=\frac{3}{4}n-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}(3n-1)$,所以 $a_n=2^n\cdot c_n=(3n-1)\cdot 2^{n-2}(n=1,2,\cdots)$;

当 $n\geqslant 2$ 时,$S_n=4a_{n-1}+2=(3n-4)\cdot 2^{n-1}+2$,由于 $S_1=a_1=1$ 也适合于此公式,

所以所求$\{a_n\}$的前 n 项和公式是:$S_n=(3n-4)\cdot 2^{n-1}+2$.

22. **解**:设每周需用谷物饲料 x kg,动物饲料 y kg,每周总的饲料费用为 z 元,则$\begin{cases}x+y\geqslant 35\ 000,\\ y\geqslant\frac{1}{5}x,\\ 0\leqslant x\leqslant 50\ 000,\\ y\geqslant 0,\end{cases}$

而 $z=0.28x+0.9y$,如图,作出不等式组所表示的平面区域,即可行域. 作一组平行直线 $0.28x+0.9y=t$. 其中经过可行域内的点 A 时,z 最小,又直线 $x+y=35\ 000$ 和直线 $y=\frac{1}{5}x$ 的交点 $A\left(\frac{87\ 500}{3},\frac{17\ 500}{3}\right)$.



即 $x=\frac{87\ 500}{3}$,$y=\frac{17\ 500}{3}$时,饲料费用最低.

答:谷物饲料和动物饲料应按 5∶1 的比例混合,此时成本最低.

23. **解**:(1)设 $F(-c,0)$,由$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,得 $a=\sqrt{3}c$. 过点 F 且与 x 轴垂直的直线为 $x=-c$,代入椭圆方程有 $\frac{(-c)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,解得 $y=\pm\frac{\sqrt{6}b}{3}$,于是$\frac{2\sqrt{6}b}{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$,

解得 $b=\sqrt{2}$,

又 $a^2-c^2=b^2$,从而 $a=\sqrt{3}$. 所以椭圆方程为$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$.

(2)设点 $C(x_1,y_1)$,$D(x_2,y_2)$,设直线 CD 的方程

为 $y=k(x+1)$，

由方程组$\begin{cases} y=k(x+1), \\ \dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1 \end{cases}$消去 y 整理得

$(2+3k^2)x^2+6k^2x+3k^2-6=0$，

可得 $x_1+x_2=-\dfrac{6k^2}{2+3k^2}, x_1x_2=\dfrac{3k^2-6}{2+3k^2}$.

因为 $A(-\sqrt{3},0), B(\sqrt{3},0)$，

所以$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB}=(x_1+\sqrt{3},y_1)\cdot(\sqrt{3}-x_2,-y_2)+(x_2+\sqrt{3},y_2)\cdot(\sqrt{3}-x_1,-y_1)=6+\dfrac{2k^2+12}{2+3k^2}=8$，解得 $k=\pm\sqrt{2}$.

数学考前冲刺试卷(三)
参考答案及解析

一、单项选择题

1. C　**解析**：由 $x^2-3x+2=0$ 解得 $x_1=1, x_2=2$，即集合 $A=\{1,2\}$. 由 $\log_x 4=2$ 解得 $x=2$，即集合 $B=\{2\}$，所以 $A\cup B=\{1,2\}$. 故答案选 C.

2. D　**解析**：由 $xi+yi^2=3+4i$，知 $x=4, y=-3$，则$x+yi$ 的模为 $\sqrt{x^2+y^2}=5$.

3. C　**解析**：根据逻辑运算的反演律可知选 C.

4. D　**解析**：根据数组的加法运算法则，$2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(0+3,2+0,2+0,0+2)=(3,2,2,2)$.

5. A　**解析**：已知 a_2, a_4 是方程 $x^2-x-2=0$ 的两个实数根，则 $a_2+a_4=1$，$S_5=\dfrac{(a_1+a_5)\times 5}{2}=\dfrac{(a_2+a_4)\times 5}{2}=\dfrac{5}{2}$. 故答案选 A.

6. B　**解析**：通过程序框图知，该题为当型循环结构，执行循环的结果如下：$s=0, k=0$；$s=0, k=1$；$s=1, k=2$；$s=9, k=3>2$，此时不满足循环条件，跳出循环，所以输出的 $s=9$.

7. A　**解析**：因为圆锥的轴截面是面积为 1 的等腰直角三角形，则底面圆的半径为 1，圆锥的高为 1，所以该圆锥的体积是 $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2\cdot h=\dfrac{\pi}{3}$.

8. B　**解析**：$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$. 由 $\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta=\dfrac{3}{4}$，得 $\tan\theta=-\dfrac{3}{4}$，且 $\theta\in(0,\pi)$，可以得到$\cos\theta=-\dfrac{4}{5}$，故 $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta=-\dfrac{4}{5}$.

9. B　**解析**：由题意设 $A(x_1,x_1^2), B(x_2,x_2^2)$，

所以$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+(x_1x_2)^2=\left(x_1x_2+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}$，

易知当 $x_1x_2=-\dfrac{1}{2}$ 时，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$最小，

此时 $k_{OA}\cdot k_{OB}=x_1x_2=-\dfrac{1}{2}$.

10. B　**解析**：由 $T_{r+1}=C_n^r\cdot x^{n-r}\cdot\left(-\dfrac{1}{x}\right)^r=C_n^r\cdot(-1)^r\cdot x^{n-2r}$，$r\in\{0,1,2,\cdots,n\}$，因为当 $r+1=4$ 时，$n-2r=3$，所以 $n=9$. 故答案选 B.

二、填空题

11. -9　**解析**：$f(a)=a^3\cos a+1=11$，故 $a^3\cos a=10$，$f(-a)=-a^3\cos(-a)+1=-a^3\cos a+1=-10+1=-9$.

12. 13　**解析**：关键路径为 D—A—H—E，最短总工期为 3+5+3+2=13(天).

13. $(x-2)^2+y^2=3$　**解析**：双曲线$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$ 的右顶点为(2,0)，直线$\begin{cases} x=\sqrt{3}+\dfrac{1}{2}t, \\ y=3+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases}$的直角坐标方程为

$\sqrt{3}x-y=0$，圆心到直线的距离为 $d=r=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}}=\sqrt{3}$，故圆的标准方程为 $(x-2)^2+y^2=3$.

14. $7+4\sqrt{3}$　**解析**：由题意得 $\begin{cases}3a+4b>0,\\ \sqrt{ab}>0,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}a>0,\\ b>0.\end{cases}$

又 $\log_4(3a+4b)=\log_2\sqrt{ab}$，

所以 $\log_4(3a+4b)=\log_4(ab)$.

所以 $3a+4b=ab$，所以 $\frac{4}{a}+\frac{3}{b}=1$.

所以 $a+b=(a+b)\left(\frac{4}{a}+\frac{3}{b}\right)=7+\frac{4b}{a}+\frac{3a}{b}\geqslant 7+2\sqrt{\frac{4b}{a}\cdot\frac{3a}{b}}=7+4\sqrt{3}$，当且仅当 $\frac{4b}{a}=\frac{3a}{b}$，即 $a=4+2\sqrt{3}$，$b=3+2\sqrt{3}$ 时取等号.

15. $\left(-\frac{1}{3},2\right]$　**解析**：因为 $0<a<1$，

所以当 $x\leqslant 1$ 时，$a^x\geqslant a$，当 $x>1$ 时，$a>a^x$，

所以 $f(x)=\begin{cases}a, x>1,\\ a^x, x\leqslant 1.\end{cases}$

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,1]$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上为常数函数，

因为 $f(t-1)>f(4t)$，

所以 $t-1<4t\leqslant 1$ 或 $t-1\leqslant 1<4t$，

解得 $-\frac{1}{3}<t\leqslant\frac{1}{4}$ 或 $\frac{1}{4}<t\leqslant 2$.

所以 $-\frac{1}{3}<t\leqslant 2$.

三、解答题

16. **解**：(1) 当 $0<a<1$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $[-2,4]$ 上是减函数，

所以当 $x=-2$ 时，函数 $f(x)$ 取得最大值 16，即 $a^{-2}=16$，所以 $a=\frac{1}{4}$；

当 $a>1$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $[-2,4]$ 上是增函数，所以当 $x=4$ 时，函数 $f(x)$ 取得最大值 16，即 $a^4=16$，所以 $a=2$. 所以 $a=\frac{1}{4}$ 或 $a=2$.

(2) 因为 $g(x)=\log_2(x^2-3x+2a)$ 的定义域是 $\mathbf{R}$，即 $x^2-3x+2a>0$ 恒成立，所以方程 $x^2-3x+2a=0$ 的判别式 $\Delta<0$，即 $(-3)^2-4\times 2a<0$，解得 $a>\frac{9}{8}$，

又因为 $a=\frac{1}{4}$ 或 $a=2$，所以 $a=2$. 代入不等式得 $\log_2(1-2t)\leqslant 1$，即 $0<1-2t\leqslant 2$，解得 $-\frac{1}{2}\leqslant t<\frac{1}{2}$，所以实数 t 的取值范围是 $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

17. (1) **证明**：因为函数 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(-x)=-f(x)$，函数 $f(x)$ 的图像关于 $x=1$ 对称，则 $f(2+x)=f(-x)=-f(x)$，所以 $f(4+x)=f[(2+x)+2]=-f(2+x)=f(x)$，所以 $f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数.

(2) **解**：当 $x\in[1,2]$ 时，$2-x\in[0,1]$，

又 $f(x)$ 的图像关于 $x=1$ 对称，则 $f(x)=f(2-x)=2^{2-x}-1$，$x\in[1,2]$.

(3) **解**：因为 $f(0)=0$，$f(1)=1$，$f(2)=0$，

$f(3)=f(-1)=-f(1)=-1$.

又 $f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数，

所以 $f(0)+f(1)+f(2)+\cdots+f(2\,023)=0$.

18. **解**：(1) 由题可知：

$[4.3,4.4)$ 的频数为 $100\times 0.1\times 0.1=1$，

$[4.4,4.5)$ 的频数为 $100\times 0.3\times 0.1=3$.

由前 4 组的频数成等比数列，则可知公比为 3，

所以[4.5,4.6)的频数为 9,[4.6,4.7)的频数为 27.

又后 6 组的频数成等差数列,则可设数列公差为 d,

所以 $6\times27+\frac{6\times5}{2}d=100-13$,解得 $d=-5$.

所以[4.9,5.0)的频数为 12,[5.0,5.1)的频数为 7.

设"至少有 1 人视力在[5.0,5.1)"为事件 A.

所以 $P(A)=\frac{C_7^2+C_7^1C_{12}^1}{C_{19}^2}=\frac{35}{57}$.

(2)设"$|a-b|>0.1$"为事件 B.

视力在[4,5,4.6)的有 9 人,在[4,9,5.0)的有 12 人,则 $P(B)=\frac{C_9^1C_{12}^1}{C_{21}^2}=\frac{18}{35}$.

19. **解**:(1)因为 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=1$,所以 $-\cos A+\sqrt{3}\sin A=1$,

$\sin\left(A-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$.

因为 $0<A<\pi$,所以 $-\frac{\pi}{6}<A-\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}$.

故 $A-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$,$A=\frac{\pi}{3}$.

(2)由 $\frac{1+\sin 2B}{\cos^2B-\sin^2B}=-3$,得

$\frac{1+2\sin B\cos B}{(\cos B+\sin B)(\cos B-\sin B)}=-3$.

所以 $\frac{\cos B+\sin B}{\cos B-\sin B}=-3$,

$\frac{1+\tan B}{1-\tan B}=-3$,故 $\tan B=2$.

20. **解**:(1)设 h' 是正四棱锥的斜高,由题设,得

$\begin{cases}a^2+4\cdot\frac{1}{2}h'a=2,\\ h^2+\frac{1}{4}a^2=h'^2,\end{cases}$ 消去 h',

解得 $a=\frac{1}{\sqrt{h^2+1}}(h>0)$.

(2)由 $V=\frac{1}{3}a^2h=\frac{h}{3(h^2+1)}(h>0)$,

得 $V=\frac{1}{3\left(h+\frac{1}{h}\right)}$. 而 $h+\frac{1}{h}\geqslant2\sqrt{h\cdot\frac{1}{h}}=2$,

所以 $V\leqslant\frac{1}{6}$,当且仅当 $h=\frac{1}{h}$,即 $h=1$ 时,等号成立.

故当 $h=1$ 米时,V 有最大值,V 的最大值为 $\frac{1}{6}$ 立方米.

21. **解**:(1)因为 a_n 是 S_n 与 2 的等差中项,

所以 $S_n=2a_n-2$,所以 $a_1=S_1=2a_1-2$,解得 $a_1=2$,

$a_1+a_2=S_2=2a_2-2$,解得 $a_2=4$.

(2)因为 $S_n=2a_n-2$,$S_{n-1}=2a_{n-1}-2$,

又 $S_n-S_{n-1}=a_n(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}_+)$,

所以 $a_n=2a_n-2a_{n-1}$,

因为 $a_n\neq0$,

所以 $\frac{a_n}{a_{n-1}}=2(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}_+)$,即数列$\{a_n\}$是等比数列. 因为 $a_1=2$,所以 $a_n=2^n$.

因为点 $P(b_n,b_{n+1})$ 在直线 $x-y+2=0$ 上,所以 $b_n-b_{n+1}+2=0$,

所以 $b_{n+1}-b_n=2$,即数列$\{b_n\}$是等差数列,又 $b_1=1$,所以 $b_n=2n-1$.

(3)因为 $c_n=(2n-1)2^n$,所以 $T_n=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=1\times2+3\times2^2+5\times2^3+\cdots+(2n-1)2^n$,

所以 $2T_n=1\times2^2+3\times2^3+\cdots+(2n-3)2^n+(2n-1)2^{n+1}$,

因此 $-T_n=1\times2+(2\times2^2+2\times2^3+\cdots+2\times2^n)-(2n-1)2^{n+1}$,

即 $-T_n=1\times2+(2^3+2^4+\cdots+2^{n+1})-(2n-$

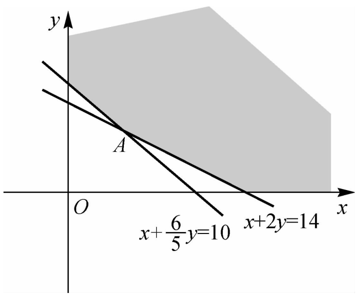
$1)2^{n+1}$，

所以 $T_n=(2n-3)2^{n+1}+6$.

22. **解**:设甲种设备需要生产 x 天,乙种设备需要生产 y 天,此时该公司所需租赁费为 z 元,

则 $z=200x+300y$.

又因为$\begin{cases}5x+6y\geqslant 50,\\10x+20y\geqslant 140,\\x\in\mathbf{N},\\y\in\mathbf{N},\end{cases}$ 即$\begin{cases}x+\dfrac{6}{5}y\geqslant 10,\\x+2y\geqslant 14,\\x\in\mathbf{N},\\y\in\mathbf{N},\end{cases}$ 画出该不等式组表示的平面区域,如图阴影部分所示.



解$\begin{cases}x+\dfrac{6}{5}y=10,\\x+2y=14,\end{cases}$ 得$\begin{cases}x=4,\\y=5,\end{cases}$ 即点 $A(4,5)$.

由 $z=200x+300y$,得直线 $y=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{z}{300}$ 过点 $A(4,5)$时,

$z=200x+300y$ 取得最小值,为 2 300 元.

23. **解**:(1)因为椭圆 $C:\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 经过点$(b,2e)$,所以$\dfrac{b^2}{8}+\dfrac{4e^2}{b^2}=1$.

因为 $e^2=\dfrac{c^2}{8}$,所以$\dfrac{b^2}{8}+\dfrac{c^2}{2b^2}=1$,

又 $a^2=b^2+c^2$,$\dfrac{b^2}{8}+\dfrac{8-b^2}{2b^2}=1$,解得 $b^2=4$ 或 $b^2=8$(舍去).

所以椭圆 C 的方程为$\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

(2)设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$.

因为 $T(1,0)$,则直线 l 的方程为 $y=k(x-1)$.

联立直线 l 与椭圆方程,得$\begin{cases}y=k(x-1),\\\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1,\end{cases}$ 消去 y,

得$(2k^2+1)x^2-4k^2x+2k^2-8=0$,

所以 $x_1+x_2=\dfrac{4k^2}{2k^2+1}$,$x_1x_2=\dfrac{2k^2-8}{2k^2+1}$.

因为 $MN/\!/l$,所以直线 MN 的方程为 $y=kx$,

联立直线 MN 与椭圆方程,得$\begin{cases}y=kx,\\\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1,\end{cases}$ 消去 y 得$(2k^2+1)x^2=8$,解得 $x^2=\dfrac{8}{2k^2+1}$.

因为 $MN/\!/l$,

所以$\dfrac{|AT|\cdot|BT|}{|MN|^2}=\dfrac{(1-x_1)\cdot(x_2-1)}{(x_M-x_N)^2}$,

因为$(1-x_1)\cdot(x_2-1)=-[x_1x_2-(x_1+x_2)+1]=\dfrac{7}{2k^2+1}$,$(x_M-x_N)^2=4x^2=\dfrac{32}{2k^2+1}$.

所以$\dfrac{|AT|\cdot|BT|}{|MN|^2}=\dfrac{7}{2k^2+1}\times\dfrac{2k^2+1}{32}=\dfrac{7}{32}$.

(3)在 $y=k(x-1)$ 中,令 $x=0$,则 $y=-k$,所以$P(0,-k)$,

从而$\overrightarrow{AP}=(-x_1,-k-y_1)$,$\overrightarrow{TB}=(x_2-1,y_2)$,

因为$\overrightarrow{AP}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{TB}$,所以$-x_1=\dfrac{2}{5}(x_2-1)$,即 $x_1+\dfrac{2}{5}x_2=\dfrac{2}{5}$,①

由(2)知 $x_1+x_2=\dfrac{4k^2}{2k^2+1}$,②

联立①②得 $x_1=\dfrac{-4k^2+2}{3(2k^2+1)}$,$x_2=\dfrac{16k^2-2}{3(2k^2+1)}$.

又 $x_1x_2=\dfrac{2k^2-8}{2k^2+1}$,所以 $50k^4-83k^2-34=0$,

解得 $k^2=2$ 或 $k^2=-\dfrac{17}{50}$(舍去).又因为 $k>0$,所以 $k=\sqrt{2}$.

数学考前冲刺试卷(四)
参考答案及解析

一、单项选择题

1. B　**解析:**$\complement_U B=\{1,3,6\}$,$A\cap\complement_U B=\{1,3\}$.

2. B　**解析:**因为复数 z 满足$(1+\mathrm{i})z=2-\mathrm{i}$,所以 $z=\dfrac{2-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{(2-\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}\mathrm{i}$,所以 $z+\mathrm{i}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$,所以 $|z+\mathrm{i}|=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. 故选 B.

3. A　**解析:**利用短除法可得.

4. C　**解析:**由 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{b}$,得到 $m=2$,$n=\dfrac{3}{2}$,则 $\log_m(n-1)=\log_2\dfrac{1}{2}=-1$.

5. A　**解析:**由 $|x-a|<1(a\in\mathbf{R})$,解得:$a-1<x<a+1$.

由 $x^2+x-2>0$,解得 $x>1$ 或 $x<-2$.

又"$|x-a|<1(a\in\mathbf{R})$"是"$x^2+x-2>0$"的充分不必要条件,

所以 $1\leqslant a-1$,或 $a+1\leqslant-2$.

所以 $a\geqslant2$,或 $a\leqslant-3$. 故选 A.

6. C　**解析:**由最短工期是 18 天,可得 $1+2^x+5+4\leqslant18$,即 $2^x\leqslant8$,$x\leqslant3$.

7. C　**解析:**取到一红一黄有 $C_4^1\cdot C_3^1=12$(种)方法,取到一红一黑有 $C_4^1\cdot C_2^1=8$(种)方法,取到一黄一黑有 $C_3^1\cdot C_2^1=6$(种)方法,故取到 2 个不同颜色球的取法种数为 $12+8+6=26$(种). 故选 C.

8. B　**解析:**连接 AD_1,直线 BD_1 与平面 AA_1D_1D 所成的角为$\angle AD_1B$. 由 $AD=1$,$AA_1=2$,得 $AD_1=AB=\sqrt{5}$,$\angle BAD_1=90°$,故$\angle AD_1B=45°$.

9. B　**解析:**双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$,设以 A_1A_2 为直径的圆与双曲线的渐近线 $y=\dfrac{b}{a}x$ 交于 M,N 两点,

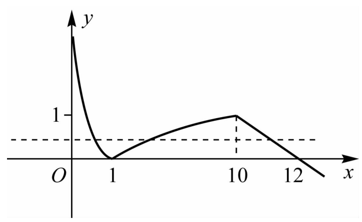
则 $A_1(-a,0)$到直线 $y=\dfrac{b}{a}x$,即 $bx-ay=0$ 的距离 $d=\dfrac{|b\times(-a)-a\times0|}{\sqrt{b^2+(-a)^2}}=\dfrac{ab}{c}$,

$\triangle A_1MN$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}\times2a\times\dfrac{ab}{c}=\dfrac{a^2b}{c}=\dfrac{a^2}{2}$,整理得:$b=\dfrac{1}{2}c$,

则 $a^2=c^2-b^2=\dfrac{3}{4}c^2$,即 $a=\dfrac{\sqrt{3}}{2}c$,

双曲线的离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$,故选 B.

10. C　**解析:**a,b,c 互不相等,不妨设 $a<b<c$,已知 $f(a)=f(b)=f(c)$,由图可知 $0<a<1$,$1<b<10$,$10<c<12$.



因为 $f(a)=f(b)$,

所以$|\lg a|=|\lg b|$,

所以 $\lg a=-\lg b$,即 $\lg a=\lg\dfrac{1}{b}$,$a=\dfrac{1}{b}$,

所以 $ab=1$,$10<abc=c<12$. 故应选 C.

二、填空题

11. $\dfrac{3}{2}$　**解析:**第一步,$i=1$,$s_1=s_1+x_1=0+1=1$,$s=1$,$i=2$;

第二步,$i=2$,$s_1=s_1+x_2=1+1.5=2.5$,$s=\dfrac{2.5}{2}$,$i=3$;

第三步，$i=3, s_1=s_1+x_3=2.5+1.5=4, s=\frac{4}{3}, i=4$；

第四步，$i=4, s_1=s_1+x_4=4+2=6, s=\frac{1}{4}\times 6=\frac{3}{2}, i=5$，不满足 $i\leqslant 4$，输出 $s=\frac{3}{2}$.

12. 1　**解析**：$\frac{S_9}{S_5}=\frac{\frac{9(a_1+a_9)}{2}}{\frac{5(a_1+a_5)}{2}}=\frac{9}{5}\times\frac{a_5}{a_3}=\frac{9}{5}\times\frac{5}{9}=1$.

13. $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$　**解析**：由图易得 $A=1, T=4\times\left(\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{6}\right)=\pi$，故 $\omega=2$.

由 $2\times\frac{\pi}{6}+\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，得 $\varphi=\frac{\pi}{6}$.

$f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.

14. $[-2,2]$　**解析**：因为 $P(m,n)$ 为椭圆 $\begin{cases}x=\sqrt{3}\cos\theta,\\ y=\sin\theta\end{cases}$ (θ 为参数)上的点，

所以 $m+n=\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta\right)=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$，

由三角函数的知识可得 $m+n$ 的取值范围为 $[-2,2]$.

15. -8　**解析**：因为 $f(x)$ 是偶函数，$f(2x)=f\left(\frac{x+1}{x+4}\right)$，

所以 $f(|2x|)=f\left(\left|\frac{x+1}{x+4}\right|\right)$.

又因为 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为单调函数，

所以 $|2x|=\left|\frac{x+1}{x+4}\right|$，

即 $2x=\frac{x+1}{x+4}$ 或 $2x=-\frac{x+1}{x+4}$，

整理得 $2x^2+7x-1=0$ 或 $2x^2+9x+1=0$，

设方程 $2x^2+7x-1=0$ 的两根为 x_1, x_2，方程 $2x^2+9x+1=0$ 的两根为 x_3, x_4.

则 $(x_1+x_2)+(x_3+x_4)=-\frac{7}{2}+\left(-\frac{9}{2}\right)=-8$.

三、解答题

16. **解**：(1)因为 $5>1, 5^{3a+1}<5^{a+3}$，

故 $3a+1<a+3$，解得 $0<a<1$.

(2)由 $0<a<1$ 得 $4^{x-1}>2^{-5x}$，

即 $2^{2x-2}>2^{-5x}$，$2x-2>-5x$，解得 $x>\frac{2}{7}$. 故解集为 $\left\{x\,\middle|\,x>\frac{2}{7}\right\}$.

17. **解**：(1) $f\left(\frac{1}{8}\right)+f(2\sqrt{2})=\log_2\frac{1}{8}+\log_2 2\sqrt{2}=-3+\frac{3}{2}=-\frac{3}{2}$.

(2)当 $x<0$ 时，$f(x)=f(-x)=\log_2(-x)$，

所以 $\begin{cases}\log_2 x, x>0,\\ \log_2(-x), x<0.\end{cases}$

(3) $\log_2\frac{1}{4}=-2$，由 $f(x-1)\leqslant 2$ 得，$-\frac{1}{4}\leqslant x-1<0$ 或 $0<x-1\leqslant\frac{1}{4}$，

解得 $\frac{3}{4}\leqslant x<1$ 或 $1<x\leqslant\frac{5}{4}$. 故解集为 $\left\{x\,\middle|\,\frac{3}{4}\leqslant x<1 \text{ 或 } 1<x\leqslant\frac{5}{4}\right\}$.

18. **解**：(1)直线 l_1 的斜率 $k_1=\frac{1}{2}$，直线 l_2 的斜率 $k_2=\frac{a}{b}$.

设事件 A 为"直线 $l_1\cap l_2=\varnothing$".

$a,b\in\{1,2,3,4,5,6\}$ 的基本事件为 $(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5)$,

$(4,6),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)$,共36个.

若 $l_1\cap l_2=\varnothing$,则 $l_1 /\!/ l_2$,即 $k_1=k_2$,即 $b=2a$.

满足条件的实数对有$(1,2),(2,4),(3,6)$,共三种情形.

所以 $P(A)=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$.

(2)设事件 B 为"直线 l_1 与 l_2 的交点位于第一象限",由于直线 l_1 与 l_2 有交点,则 $b\neq 2a$.

联立方程组$\begin{cases}x-2y-1=0,\\ ax-by+1=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\frac{b+2}{b-2a},\\ y=\frac{a+1}{b-2a},\end{cases}$

因为直线 l_1 与 l_2 的交点位于第一象限,则 $x>0$,$y>0$,

即解得 $b>2a$.

满足条件的实数对有$(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,5),(2,6)$,共六个.

所以 $P(B)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$.

19. **解:**(1)因为 $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=0$,所以$(2a+c)\cos B+b\cos C=0$,

即 $2a\cos B+c\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+b\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=0$.

即 $2a\cos B+a=0$,解得 $\cos B=-\frac{1}{2}$,即 $B=\frac{2\pi}{3}$.

(2)由余弦定理得:$3=a^2+c^2-2ac\times\left(-\frac{1}{2}\right)\Rightarrow a^2+c^2=3-ac\geqslant 2ac$(基本不等式)$\Rightarrow ac\leqslant 1$,

$|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}|^2=a^2+c^2+2ac\times\left(-\frac{1}{2}\right)=3-2ac\geqslant 1$.

所以当且仅当 $a=c=1$ 时,$|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}|$ 的最小值是1.

20. **解:**(1)由题意得:$10(1\,000-x)(1+0.2x\%)\geqslant 10\times 1\,000$,

即 $x^2-500x\leqslant 0$,又 $x>0$,所以 $0<x\leqslant 500$.

即最多调整500名员工从事第三产业.

(2)从事第三产业的员工创造的年总利润为 $10\left(a-\frac{3x}{500}\right)x$ 万元,从事原来产业的员工的年总利润为 $10(1\,000-x)(1+0.2x\%)$ 万元,则 $10\left(a-\frac{3x}{500}\right)x\leqslant 10(1\,000-x)(1+0.2x\%)$,所以 $ax-\frac{3x^2}{500}\leqslant 1\,000+2x-x-\frac{x^2}{500}$,

所以 $ax\leqslant\frac{x^2}{250}+1\,000+x$,即 $a\leqslant\frac{x}{250}+\frac{1\,000}{x}+1$ 恒成立,

因为$\frac{x}{250}+\frac{1\,000}{x}\geqslant 2\sqrt{\frac{x}{250}\cdot\frac{1\,000}{x}}=4$,

当且仅当$\frac{x}{250}=\frac{1\,000}{x}$,即 $x=500$ 时等号成立.

所以 $a\leqslant 5$,又 $a>0$,所以 $0<a\leqslant 5$,即 a 的取值范围为$(0,5]$.

21. (1)**证明:** 因为 a_n,a_{n+1} 是关于 x 的方程 $x^2-2^nx+b_n=0(n\in\mathbf{N}_+)$的两根,

所以$\begin{cases}a_n+a_{n+1}=2^n,\\ b_n=a_na_{n+1}.\end{cases}$

因为 $\frac{a_{n+1}-\frac{1}{3}\times 2^{n+1}}{a_n-\frac{1}{3}\times 2^n}=\frac{2^n-a_n-\frac{1}{3}\times 2^{n+1}}{a_n-\frac{1}{3}\times 2^n}=\frac{-\left(a_n-\frac{1}{3}\times 2^n\right)}{a_n-\frac{1}{3}\times 2^n}=-1$,

故数列$\left\{a_n-\frac{1}{3}\times 2^n\right\}$是首项为 $a_1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$,公比为$-1$的等比数列.

(2)**解**:由(1)得 $a_n-\frac{1}{3}\times 2^n=\frac{1}{3}\times(-1)^{n-1}$,即

$a_n=\frac{1}{3}[2^n-(-1)^n]$.

所以 $b_n=a_na_{n+1}=\frac{1}{9}[2^n-(-1)^n]\times[2^{n+1}-(-1)^{n+1}]$

$=\frac{1}{9}[2^{2n+1}-(-2)^n-1]$.

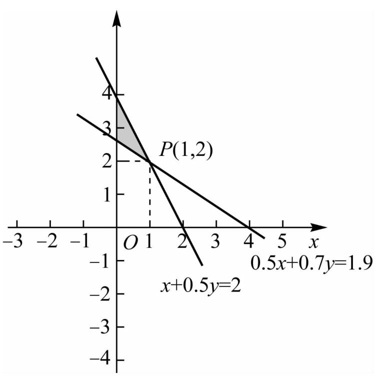
所以 $S_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n$

$=\frac{1}{9}\{(2^3+2^5+2^7+\cdots+2^{2n+1})-[(-2)+(-2)^2+\cdots+(-2)^n]-n\}$

$=\frac{1}{9}\left[\frac{2^{2n+3}}{3}-\frac{2}{3}(-2)^n-n-2\right]$.

22. **解**:设购买铁矿石 A,B 分别为 x 万吨和 y 万吨,购买铁矿石的费用为 z 百万元,

则$\begin{cases}0.5x+0.7y\geqslant 1.9,\\ x+0.5y\leqslant 2,\\ x\geqslant 0,\\ y\geqslant 0,\end{cases}$



目标函数 $z=3x+6y$,作出可行域如图.

由$\begin{cases}0.5x+0.7y=1.9,\\ x+0.5y=2,\end{cases}$

得$\begin{cases}x=1,\\ y=2,\end{cases}$

记 $P(1,2)$,当目标函数 $z=3x+6y$ 过点 $P(1,2)$ 时,z 取到最小值 15.

故购买铁矿石的最少费用为 15 百万元.

23. (1)**解**:由题意,$\begin{cases}2a=4,\\ \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{1}{2},\end{cases}$ 解得 $a^2=4,b^2=3$. 所以椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2)①**证明**:点 A,B 的坐标分别为$(2,0),(0,\sqrt{3})$.

设点 P 的坐标为(m,n),由对称性知点 Q 的坐标为$(-m,-n)$.

所以 $k_1=\frac{n}{m-2},k_2=\frac{n}{m+2}$.

所以 $k_1k_2=\frac{n}{m-2}\cdot\frac{n}{m+2}=\frac{n^2}{m^2-4}$.

又因为点 P 在椭圆 C:$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 上,

所以$\frac{m^2}{4}+\frac{n^2}{3}=1$,即 $m^2-4=-\frac{4}{3}n^2$.

所以 $k_1k_2=\frac{n^2}{-\frac{4}{3}n^2}=-\frac{3}{4}$.

同理:$k_3k_4=-\frac{3}{4}$. 所以 $k_1k_2+k_3k_4=\left(-\frac{3}{4}\right)+\left(-\frac{3}{4}\right)=-\frac{3}{2}$,为定值.

②**解**:由题意,$A(2,0),B(0,\sqrt{3})$. 设 l:$y=\frac{\sqrt{3}}{2}x+t$.

由点 $A(2,0),B(0,\sqrt{3})$ 位于直线 l 的两侧,得

$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2-0+t\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\times 0-\sqrt{3}+t\right)<0$.

解得$-\sqrt{3}<t<\sqrt{3}$.

由$\begin{cases}y=\frac{\sqrt{3}}{2}x+t,\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$ 消去 y 并整理得 $6x^2+4\sqrt{3}tx+4t^2-12=0$.

由判别式 $\Delta=(4\sqrt{3}t)^2-4\times6\times(4t^2-12)>0$，

得 $t^2<6$.

当 $-\sqrt{3}<t<\sqrt{3}$ 时，显然，判别式 $\Delta>0$.

设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，由根与系数的关系，得 $x_1+x_2=-\dfrac{2\sqrt{3}t}{3}$，$x_1x_2=\dfrac{2t^2-6}{3}$.

$$|PQ|=\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{\sqrt{7}}{2}\cdot\sqrt{\left(-\frac{2\sqrt{3}t}{3}\right)^2-4\cdot\frac{2t^2-6}{3}}=\frac{\sqrt{7}}{3}\cdot\sqrt{18-3t^2}.$$

点 $A(2,0)$ 到直线 $l:y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+t$ 的距离 $d_1=\dfrac{\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\times2-0+t\right|}{\sqrt{1+\frac{3}{4}}}=\dfrac{2|\sqrt{3}+t|}{\sqrt{7}}$.

因为 $-\sqrt{3}<t<\sqrt{3}$，所以 $d_1=\dfrac{2(\sqrt{3}+t)}{\sqrt{7}}$.

点 $B(0,\sqrt{3})$ 到直线 $l:y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+t$ 的距离 $d_2=\dfrac{\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\times0-\sqrt{3}+t\right|}{\sqrt{1+\frac{3}{4}}}=\dfrac{2|\sqrt{3}-t|}{\sqrt{7}}$.

因为 $-\sqrt{3}<t<\sqrt{3}$，所以 $d_2=\dfrac{2(\sqrt{3}-t)}{\sqrt{7}}$.

因此，四边形 $APBQ$ 的面积

$$S_{\text{四边形}APBQ}=S_{\triangle APQ}+S_{\triangle BPQ}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot|PQ|\cdot(d_1+d_2)$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{7}}{3}\times\sqrt{18-3t^2}\times\left[\frac{2(\sqrt{3}+t)}{\sqrt{7}}+\frac{2(\sqrt{3}-t)}{\sqrt{7}}\right]$$

$$=2\sqrt{6-t^2}.$$

因为 $-\sqrt{3}<t<\sqrt{3}$，显然，当 $t=0$ 时，$\{S_{\text{四边形}APBQ}\}_{\max}=2\sqrt{6}$.

数学考前冲刺试卷(五)
参考答案及解析

一、单项选择题

1. D　**解析：**根据补集的定义可得.

2. B　**解析：**因为 $(1-\mathrm{i})(a+\mathrm{i})=a+\mathrm{i}-a\mathrm{i}-\mathrm{i}^2=a+1+(1-a)\mathrm{i}$，

又因为复数 $(1-\mathrm{i})(a+\mathrm{i})$ 在复平面内对应的点在第二象限，

所以 $\begin{cases}a+1<0,\\1-a>0,\end{cases}$ 解得 $a<-1$.

3. D　**解析：**命题 $\neg p$ 是真命题，则 p 是假命题. 又命题 $p\vee q$ 是真命题，所以必有 q 是真命题.

4. B　**解析：**$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2x-2+8=0$，解得 $x=-3$.

5. B　**解析：**程序在执行过程中 a，b 的值依次为 $a=14$，$b=18$；$b=4$；$a=10$；$a=6$；$a=2$；$b=2$，此时 $a=b=2$，程序结束，输出 a 的值为 2，故选 B.

6. C　**解析：**由抛物线的定义，有 $|AF|+|BF|=\left(x_A+\dfrac{p}{2}\right)+\left(x_B+\dfrac{p}{2}\right)=x_A+x_B+p=3$，故 $x_A+x_B=3-p=\dfrac{5}{2}$，故线段 AB 的中点到 y 轴的距离为 $\dfrac{5}{4}$，故选 C.

7. A　**解析：**因为 $(x+2y)^5$ 展开式的通项公式为 $T_{r+1}=\mathrm{C}_5^r\cdot x^{5-r}\cdot(2y)^r$，分别令 $r=2$、$r=1$，可得 $(3x-y)(x+2y)^5$ 展开式中 x^4y^2 的项，故 $(3x-y)\cdot(x+2y)^5$ 展开式中 x^4y^2 的系数为 $3\cdot\mathrm{C}_5^2\cdot2^2-\mathrm{C}_5^1\cdot2=110$. 故答案选 A.

8. D　**解析：**因为 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，所以 $3\cos\alpha-\sin\alpha=0$，所以 $3\cos\alpha=\sin\alpha$，可以求得 $\cos^2\alpha=\dfrac{1}{10}$.