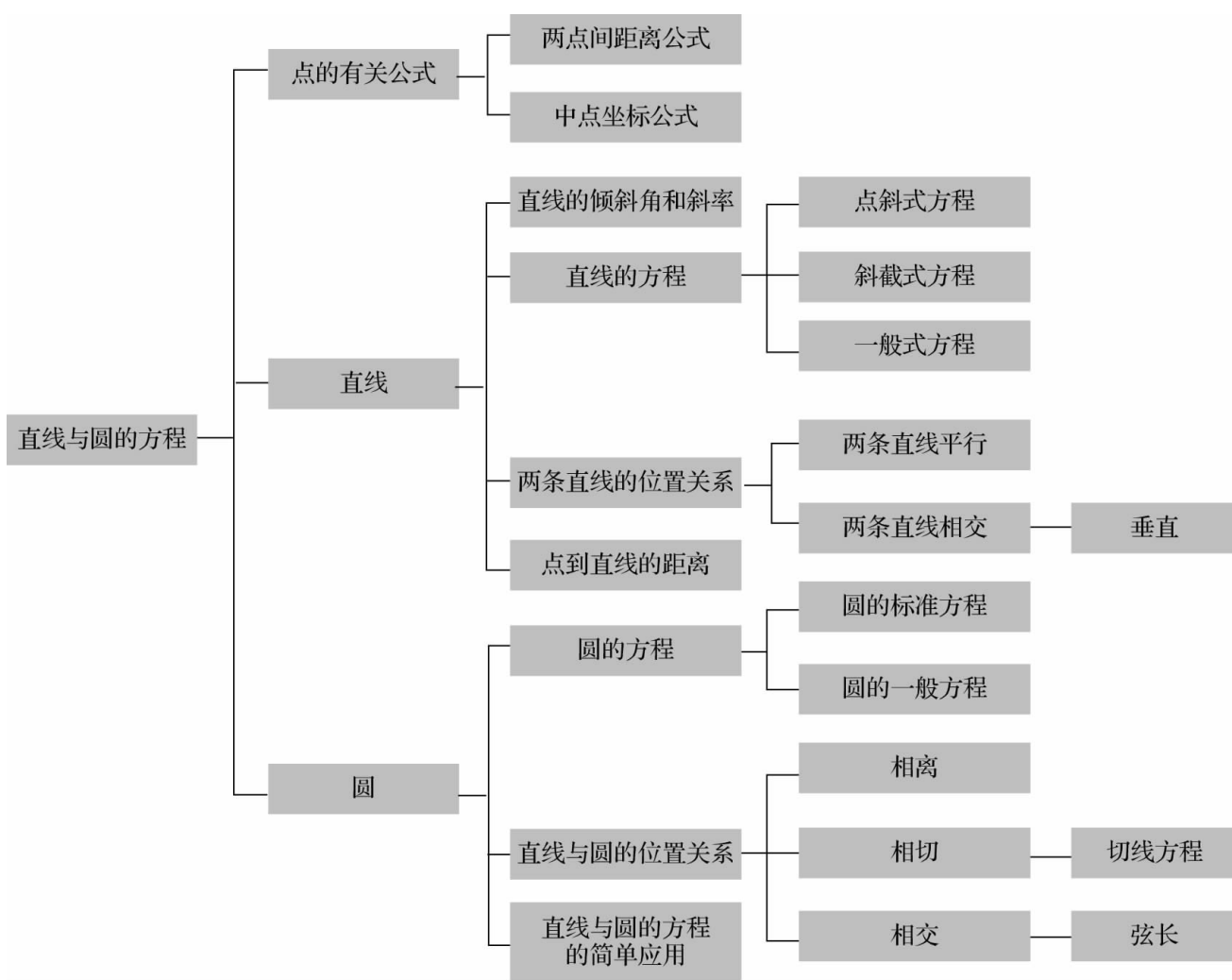


第六单元

直线与圆的方程

知识脉络





6.1 两点间距离公式及中点坐标公式



学习目标

掌握两点间距离公式和线段的中点坐标公式.



知识梳理

1. 两点间距离公式:

(1)一般地,如果 x 轴上的两点 M_1, M_2 的坐标分别是 x_1, x_2 , 那么 M_1 与 M_2 的距离可表示为 $|M_1M_2| = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2)在平面直角坐标系中,设 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ 是坐标平面上的任意两点,则 P_1 与 P_2 间的距离为 $|P_1P_2| = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 线段的中点坐标公式:设 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ 是平面直角坐标系内的任意两点, $P(x, y)$ 是线段 P_1P_2 的中点,则 $x = \underline{\hspace{2cm}}, y = \underline{\hspace{2cm}}$.

(答案在本节末尾)



典型例题

例 1 求两点 $P_1(-1, 3), P_2(2, 5)$ 之间的距离.

解 $|P_1P_2| = \sqrt{(-1-2)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{13}$.

点拨 熟记两点间的距离公式,若两点坐标分别为 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$, 则 P_1, P_2 两点间的距离 $|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

例 2 已知点 $M(1, -5), N(4, -6)$, 求点 M 关于点 N 对称的点 P 的坐标.

解 设所求点 P 的坐标为 (x_2, y_2) , 由 $N(4, -6)$ 是线段 MP 的中点, 可得 $\frac{1+x_2}{2} = 4$, $\frac{-5+y_2}{2} = -6$, 解得 $x_2 = 7, y_2 = -7$. 故点 M 关于点 N 对称的点 P 的坐标为 $(7, -7)$.

点拨 如果点 M 与点 P 关于点 N 对称, 那么点 N 是线段 MP 的中点, 利用中点坐标公式可求出点 P 的坐标.

例 3 已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点为 $A(0, 0), B(7, 2), C(-1, 4)$, D 是边 BC 上的中点. 求 BC 边上中线 AD 的长.





解 由题意,设 BC 边的中点 D 的坐标为 (x,y) ,则 $x=\frac{-1+7}{2}=3, y=\frac{4+2}{2}=3$,即 $D(3,3)$.

再由两点间的距离公式得中线 AD 的长度 $|AD|=\sqrt{(3-0)^2+(3-0)^2}=3\sqrt{2}$.

点拨 在三角形中,连接一个顶点和它的对边中点的线段称为三角形的中线,一个三角形有三条中线.



巩固练习

基础巩固

一、选择题

- 已知 $A(2,3), B(4,-1)$, 则线段 AB 的中点 M 的坐标为 ()
A. $(2,-4)$ B. $(-2,4)$ C. $(3,1)$ D. $(6,2)$
- 两点 $P_1(1,4), P_2(-2,6)$ 之间的距离为 ()
A. 6 B. $\sqrt{13}$ C. 13 D. 8
- 已知两点 $P_1(0,6), P_2(a,-2)$ 之间的距离是 10, 则 a 的值是 ()
A. 6 B. -6 C. 8 D. ± 6
- 点 $A(5,8)$ 关于原点的对称点为 ()
A. $(5,8)$ B. $(-5,-8)$ C. $(-5,8)$ D. $(5,-8)$
- 已知 $A(-1,3), B(1,-1)$, 则点 A 关于点 B 的对称点为 ()
A. $(1,3)$ B. $(-1,3)$ C. $(3,-5)$ D. $(2,-4)$
- 已知 $M(-2,3), N$ 在 x 轴上, 若 $|MN|=5$, 则点 N 的坐标为 ()
A. $(2,0)$ B. $(2,0)$ 或 $(-6,0)$
C. $(0,2)$ D. $(0,2)$ 或 $(0,-6)$

二、填空题

- 数轴上点 A 的坐标是 5, 点 B 的坐标是 -1, 则 $|AB| = \underline{\hspace{2cm}}$.
- 已知 $A(a,3), B(3,3a+3)$ 两点间的距离是 5, 则 a 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
- 已知 $M(2,-2), N(-3,m)$, 若 $|MN|=13$, 则 m 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
- 已知 $M(3,n)$ 是以 $P(m,-1)$ 和 $Q(2,6)$ 为端点的线段的中点, 则 m 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$, n 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题

- 已知三角形 ABC 顶点的坐标分别为 $A(-2,-3), B(6,-3), C(6,0)$ 且 D 是 AB 的中点.
(1) 求点 D 的坐标;
(2) 求 AB 边上中线 CD 的长.



12. 已知 $A(2, y), B(4, 10), C(x, 6)$, 且点 A, B 关于点 C 对称, 求 x 与 y 的值.

能力提升

1. 已知 $A(1, 5), B(5, -2)$, 在 x 轴上的点 M 与 A, B 的距离相等, 则点 M 的坐标为_____.
2. 已知 $\triangle ABC$ 三个顶点的坐标分别为 $A(-a, 0), B(a, 0), C(0, \sqrt{3}a)$.
 - (1) 求证: $\triangle ABC$ 是等边三角形;
 - (2) 求这个三角形的中线长.

知识梳理答案

1. (1) $|x_2 - x_1|$ (2) $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
2. $\frac{x_1 + x_2}{2}$ $\frac{y_1 + y_2}{2}$





6.2 直线的点斜式方程和斜截式方程



1. 直线的倾斜角和斜率



学习目标

1. 理解直线的倾斜角与斜率的概念.
2. 掌握直线斜率的计算方法.



知识梳理

1. 直线的倾斜角: 当直线 l 与 x 轴相交时, 直线 l 向上的方向与 x 轴的正方向所成的最小正角 α , 称为直线 l 的_____. 规定, 直线 l 与 x 轴平行或重合时, 直线 l 的倾斜角为零, 因此, 直线 l 的倾斜角 α 的取值范围是_____.
2. 直线的斜率: 若直线 l 的倾斜角为 α , 当 $\alpha \neq 90^\circ$ 时, 称倾斜角 α 的正切值为直线 l 的_____, 常用小写字母 k 表示, 即_____.
3. 直线的斜率公式: 设点 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ 为直线 l 上的任意两点, 且 $x_1 \neq x_2$, 则直线 l 的斜率 $k =$ _____.

(答案在本节末尾)



典型例题

例 1 已知一条直线经过 $A(3, 4), B(5, 7)$ 两点, 求直线 AB 的斜率和倾斜角.

解 由斜率公式可知, 直线 AB 的斜率为 $k = \frac{7-4}{5-3} = \frac{3}{2}$, 即 $\tan \alpha = \frac{3}{2}$, 由于 $0 \leq \alpha < \pi$, 即 $0^\circ \leq \alpha < 180^\circ$, 故倾斜角 $\alpha \approx 56^\circ$.

点拨 求倾斜角时, 如果三角函数值不是特殊角的三角函数值, 那么利用计算器计算.

例 2 证明 $A(2, 3), B(1, -3), C(3, 9)$ 三点共线.

证明 因为 $k_{AB} = \frac{3+3}{2-1} = 6, k_{BC} = \frac{-3-9}{1-3} = 6, k_{AB} = k_{BC}$, 且 AB, BC 有公共点 B , 所以 A, B, C 三点共线.

点拨 三点共线即三点在一条直线上, 故过每两点的直线的斜率相等.



巩固练习

基础巩固

一、选择题

1. 直线的倾斜角的取值范围是 ()

- A. $0 \leq \alpha < \pi$ B. $0 \leq \alpha < \pi$ 且 $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$
 C. $0 \leq \alpha < 2\pi$ D. $0 \leq \alpha \leq \pi$

2. 下列命题中正确命题的个数是 ()

- ①任何一条直线都有唯一的倾斜角;
 ②一条直线的倾斜角可以是一 30° ;
 ③倾斜角是 0° 的直线只有一条.

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

3. 直线过点 $(1, 2), (4, 2 + \sqrt{3})$, 则此直线的倾斜角 $\alpha =$ ()

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{2}$

4. 直线的倾斜角 $\alpha = \frac{\pi}{4}$, 则此直线的斜率 $k =$ ()

- A. 1 B. -1 C. 0 D. 无法确定

5. 直线经过点 $A(-1, -5), B(1, 5)$, 则此直线的斜率 $k =$ ()

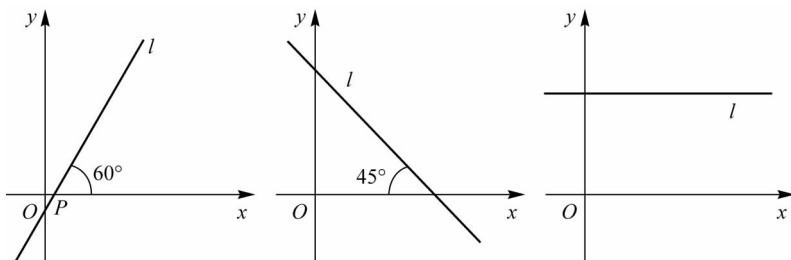
- A. -1 B. $\sqrt{3}$ C. 5 D. -5

6. 与 x 轴平行的直线的倾斜角是 ()

- A. 0 B. $\frac{\pi}{2}$ C. π D. 不存在

二、填空题

7. 计算下图中直线 l 的倾斜角及斜率.



图①

图②

图③

(1)图①中, 倾斜角 $\alpha =$ _____, 斜率 $k =$ _____;

(2)图②中, 倾斜角 $\alpha =$ _____, 斜率 $k =$ _____;



(3)图③中,倾斜角 $\alpha =$ _____, 斜率 $k =$ _____.

8. 倾斜角为 30° 的直线的斜率为 _____.

9. 经过点 $(3, -5)$ 与 $(5, -3)$ 的直线的倾斜角 $\alpha =$ _____, 斜率 $k =$ _____.

10. 已知点 $A(a, c), B(b, c) (a \neq b)$, 则直线 AB 的倾斜角是 _____.

三、解答题

11. 根据给出的条件, 计算直线的倾斜角或斜率.

(1) 直线的倾斜角 $\alpha = \frac{3\pi}{4}$, 求斜率 k ;

(2) 直线的倾斜角 $\alpha = \frac{2\pi}{3}$, 求斜率 k ;

(3) 直线的斜率 $k = -1$, 求倾斜角 α ;

(4) 直线经过点 $A(-3, 5), B(2, -3)$, 求斜率 k .

12. 已知三点 $A(1, 2), B(-1, 0), C(5, 4)$, 试判断这三点是否在同一条直线上. 为什么?

能力提升

1. 过两点 $A(4, y), B(2, -3)$ 的直线的倾斜角是 135° , 则 $y =$ _____ ()

A. 1 B. -1 C. 5 D. -5

2. 若三点 $A(a, 2), B(5, 1), C(-4, 2a)$ 在同一直线上, 求 a 的值.

知识梳理答案

1. 倾斜角 $0^\circ \leq \alpha < 180^\circ$ 2. 斜率 $k = \tan \alpha$ 3. $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$



2. 直线的点斜式方程

3. 直线的斜截式方程



学习目标

掌握直线的点斜式方程和斜截式方程.



知识梳理

1. 直线的点斜式方程: 设直线 l 经过点 $P(x_0, y_0)$, 且斜率为 k , 则直线 l 的方程为_____.

当斜率 $k=0$ 时, 直线 l 的方程为_____. 此时直线 l 平行于 x 轴(或与 x 轴重合).

当斜率不存在时, 直线 l 的方程为_____. 此时直线 l 平行于 y 轴(或与 y 轴重合).

2. 直线的截距: 一般地, 把直线 l 与 y 轴的交点 $(0, b)$ 的纵坐标_____称为直线 l 在 y 轴上的_____, 与 x 轴的交点 $(a, 0)$ 的横坐标_____称为直线 l 在 x 轴上的_____.

拓展: 由此可设直线的截距式方程为 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, 其中 $ab \neq 0$.

3. 直线的斜截式方程: 设直线 l 在 y 轴上的截距是 b , 且斜率为 k , 则直线 l 的方程为_____.

(答案在本节末尾)



典型例题

例 1 已知直线 l_1 和 l_2 的倾斜角分别为 $\frac{2\pi}{3}$ 和 $\frac{\pi}{2}$, 并且两条直线都经过点 $(1, -2)$, 求直线 l_1 和 l_2 的方程.

解 直线 l_1 的斜率为 $k_1 = \tan \frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$, 且经过点 $(1, -2)$, 故直线 l_1 的点斜式方程为 $y - (-2) = -\sqrt{3}(x - 1)$, 即 $\sqrt{3}x + y + 2 - \sqrt{3} = 0$.

直线 l_2 的斜率 k_2 不存在且经过点 $(1, -2)$, 故其方程为 $x = 1$.

点拨 已知一点坐标和倾斜角, 用点斜式求直线方程, 但直线 l_2 的倾斜角为 $\frac{\pi}{2}$, 这时斜率不存在, 因此 l_2 是经过点 $(1, -2)$ 且垂直于 x 轴的直线.



例 2 已知直线 l 过点 $A(4,0)$, 且在 y 轴上的截距是 -3 , 求直线 l 的斜截式方程.

解 因为直线 l 过点 $A(4,0)$, 且在 y 轴上的截距是 -3 , 所以直线 l 过点 $(4,0)$ 和 $(0,-3)$, 将它们代入斜率公式, 得 $k = \frac{-3-0}{0-4} = \frac{3}{4}$.

又因直线在 y 轴上的截距是 -3 , 代入斜截式方程得 $y = \frac{3}{4}x - 3$.

点拨 求直线的斜截式方程, 只要求出直线的斜率和在 y 轴上的截距即可解决问题.



巩固练习

基础巩固

一、选择题

1. 下面四个直线方程中, 可以看作直线的斜截式方程的是 ()

- A. $x=3$ B. $y=-5$ C. $2y=x$ D. $x=4y-1$

2. 已知直线 l 的方程为 $y-1=-\sqrt{3}(x+\sqrt{3})$, 则 l 的倾斜角 α 和在 y 轴上的截距 b 分别为 ()

- A. $\alpha = \frac{\pi}{3}, b=2$ B. $\alpha = \frac{\pi}{3}, b=-2$ C. $\alpha = \frac{2\pi}{3}, b=2$ D. $\alpha = \frac{2\pi}{3}, b=-2$

3. 若 $k < 0, b > 0$, 则直线 $y=kx+b$ 必不通过 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

4. 经过点 $(0,3)$ 且斜率为 1 的直线的方程为 ()

- A. $y=x+3$ B. $y=x-3$ C. $y=-x+3$ D. $y=-x-3$

5. 直线 $x-2y+8=0$ 在 x 轴、 y 轴上的截距分别为 ()

- A. 8 和 4 B. -8 和 4 C. 8 和 -4 D. -8 和 -4

二、填空题

6. 过点 $(2,-3)$ 且倾斜角为 $\frac{2\pi}{3}$ 的直线的点斜式方程为_____.

7. 过点 $(3,-5)$ 且倾斜角为 0° 的直线的方程为_____.

8. 直线的斜截式方程为 $y=4x-3$, 则直线的斜率是_____, 在 y 轴上的截距是_____.

三、解答题

9. 求满足下列条件的直线的方程, 用点斜式或斜截式表示.

(1) 经过点 $(-3,-3)$, 且倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$;

(2) 倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$, 且在 y 轴上的截距为 5;



(3)经过点 $A(-1, -4), B(1, 2)$.

能力提升

1. 斜率与直线 $y = \frac{3}{2}x$ 的斜率相等,且过点 $(-4, 3)$ 的直线的斜截式方程是_____.

2. 求过点 $(-1, 2)$,且平行于 x 轴的直线的方程.

3. 求过点 $(2, 3)$ 且在两坐标轴上截距相等的直线的斜截式方程.

知识梳理答案

1. $y - y_0 = k(x - x_0)$ $y = y_0$ $x = x_0$

2. b 截距 a 截距

3. $y = kx + b$

6.3 直线的一般式方程



学习目标

1. 了解直线方程的一般式形式.
2. 掌握直线的点斜式方程化为一般式方程的方法.
3. 掌握直线的斜截式方程与一般式方程之间的互化.



知识梳理

1. 直线的一般式方程:二元一次方程_____ (A, B 不全为零)称为直线的一般式方程.





2. 直线的一般式方程的讨论:

(1) 当 $A \neq 0, B \neq 0$ 时, 直线的一般式方程 $Ax + By + C = 0$ 可化为 $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$, 它表示斜率为 $k = \underline{\hspace{2cm}}$, 且在 y 轴上的截距为 $b = \underline{\hspace{2cm}}$ 的直线;

(2) 当 $A = 0, B \neq 0$ 时, 直线的一般式方程 $Ax + By + C = 0$ 可化为 $y = -\frac{C}{B}$, 它表示经过点 $\underline{\hspace{2cm}}$, 且平行于 $\underline{\hspace{2cm}}$ 轴的直线;

(3) 当 $A \neq 0, B = 0$ 时, 直线的一般式方程 $Ax + By + C = 0$ 可化为 $x = -\frac{C}{A}$, 它表示经过点 $\underline{\hspace{2cm}}$, 且平行于 $\underline{\hspace{2cm}}$ 轴的直线.

(答案在本节末尾)



典型例题

例 1 求直线 $2x - y - 6 = 0$ 的斜率及直线在 y 轴上的截距.

解 直线 $2x - y - 6 = 0$ 可化为 $y = 2x - 6$, 所以此直线的斜率为 2, 在 y 轴上的截距为 -6.

点拨 把直线的一般式方程化为斜截式方程, 可以很容易求出直线的斜率和在 y 轴上的截距.

例 2 求满足下列条件的直线的一般式方程.

(1) 直线经过点 $A(-1, 4)$, 倾斜角为 $\frac{3\pi}{4}$;

(2) 直线倾斜角的余弦值为 $\frac{4}{5}$, 横截距为 -4.

解 (1) 由题意可得, $k = \tan \frac{3\pi}{4} = -1$, 所以直线方程为 $y - 4 = -(x + 1)$, 即 $x + y - 3 = 0$.

(2) 设所求直线方程为 $y = kx + b$, 倾斜角为 α , 因为 $\cos \alpha = \frac{4}{5}, \alpha \in [0, \pi)$, 所以 $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{3}{5}$, 解得 $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3}{4}$, 即 $k = \frac{3}{4}$. 因为横截距为 -4, 所以直线过点 $(-4, 0)$. 将点 $(-4, 0)$ 代入 $y = \frac{3}{4}x + b$, 得 $b = 3$. 所以直线方程为 $y = \frac{3}{4}x + 3$, 化为一般式为 $3x - 4y + 12 = 0$.

点拨 根据直线方程的几种形式选取合适的方法求解直线方程, 最终化为一般式方程. 在用点斜式方程时, 求斜率的方法一般有两种, 即已知两点求斜率和已知倾斜角求斜率.



巩固练习

基础巩固

一、选择题

1. 经过点(2, -5)且与 y 轴垂直的直线的方程为 ()

- A. $x=2$ B. $y=2$ C. $x=-5$ D. $y=-5$

2. 经过点(6, -4)且与 y 轴平行的直线的方程为 ()

- A. $x=6$ B. $y=6$ C. $x=-4$ D. $y=-4$

3. 直线 $\sqrt{3}x+y+5=0$ 的倾斜角为 ()

- A. $\frac{2\pi}{3}$ B. $\frac{5\pi}{6}$ C. $\frac{\pi}{6}$ D. $\frac{\pi}{3}$

4. 在 x 轴与 y 轴上的截距分别为 -2, 3 的直线的一般式方程是 ()

- A. $3x+2y+6=0$ B. $3x-2y+6=0$
C. $2x+3y+6=0$ D. $2x-3y+6=0$

5. 倾斜角为 $\frac{3\pi}{4}$, 且在 y 轴上的截距为 5 的直线的一般式方程为 ()

- A. $x+y-5=0$ B. $x-y+5=0$
C. $x+y+5=0$ D. $x-y-5=0$

6. 若直线 $ax+by+c=0$ 在第一、二、三象限, 则 ()

- A. $ab>0, bc<0$ B. $ab>0, bc>0$
C. $ab<0, bc<0$ D. $ab<0, bc>0$

二、填空题

7. 若方程 $mx+(m^2+m)y^2+2=0$ 表示一条直线, 则 $m=$ _____.

8. 过点(-1, -1), 且倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$ 的直线的一般式方程为_____.

9. 已知直线 l 过点(2, 3), 若 l 平行于 x 轴, 则 l 的一般式方程为_____; 若 l 平行于 y 轴, 则 l 的一般式方程为_____.

10. 已知直线 l 经过点 $A(-2, -7), B(1, 2)$, 则直线 l 的斜率 $k=$ _____; 过两点的一般式方程为_____.

三、解答题

11. 求直线 $2(x-1)=y+3$ 的斜率及直线在 y 轴上的截距.





12. 根据下列各条件写出直线的方程,并且化成一般式方程.

- (1) 经过点 $A(6, -4)$, 斜率为 $-\frac{4}{3}$;
 (2) 经过点 $B(4, 2)$, 平行于 x 轴;
 (3) 在 x 轴和 y 轴上的截距分别是 $\frac{3}{2}$, -3 ;
 (4) 经过两点 $P_1(3, -2), P_2(5, 4)$.

能力提升

1. 如果直线 $ax+by+1=0$ 平行于 x 轴, 则有 ()

- A. $a \neq 0, b \neq 0$ B. $a=0, b=0$
 C. $a \neq 0, b=0$ D. $a=0, b \neq 0$

2. 已知三角形的三个顶点 $A(-5, 0), B(3, -3), C(0, 2)$, 求:

- (1) AC 边所在直线的斜率和方程;
 (2) BC 边上中线所在直线的方程.

3. 已知直线 l 经过点 $P(-5, -4)$, 且与两坐标轴围成的三角形的面积为 5, 求直线 l 的方程, 并将直线的方程化为一般式.

知识梳理答案

1. $Ax+By+C=0$

2. (1) $-\frac{A}{B}$ $-\frac{C}{B}$ (2) $(0, -\frac{C}{B})$ x (3) $(-\frac{C}{A}, 0)$ y



6.4 两条直线的位置关系



1. 两条相交直线的交点



学习目标

掌握求两条相交直线的交点坐标的方法.



知识梳理

1. 对于直线 $l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$, 它们的交点通过方程组

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases} \text{ 求解.}$$

方程组有 _____ $\Leftrightarrow l_1, l_2$ 相交, 交点坐标就是方程组的解.

2. 两条相交直线的斜率关系:

(1) 若直线 $l_1: y = k_1x + b_1$ 与直线 $l_2: y = k_2x + b_2$ 相交, 则直线 l_1 与直线 l_2 的斜率 _____, 即 _____. 反之, 若直线 l_1 与直线 l_2 的斜率都存在且不相等, 则直线 l_1 与直线 l_2 _____;

(2) 若直线 l_1 的斜率不存在, 而直线 l_2 的斜率存在, 则直线 l_1 与直线 l_2 _____.

(答案在本节末尾)



典型例题

例 求直线 $x + 2y - 5 = 0$ 与直线 $y = x + 1$ 的交点的坐标.

解 因为直线 $x + 2y - 5 = 0$ 的斜率为 $-\frac{1}{2}$, 直线 $y = x + 1$ 的斜率为 1, 斜率不相等, 所以两条直线相交. 解方程组 $\begin{cases} x + 2y - 5 = 0, \\ y = x + 1, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x = 1, \\ y = 2, \end{cases}$ 所以交点的坐标为 (1, 2).

点拨 若直线 l_1 与直线 l_2 相交, 则两条直线交点的坐标就是两条直线的方程的公共解.




 **巩固练习**
基础巩固**一、选择题**

1. 直线 $x-3y=0$ 与 $y=3$ 的交点的坐标是 ()
- A. (1, -3) B. (9, 3) C. (3, 9) D. (9, 1)
2. 直线 $x-2y+6=0$ 与 $2x+y-3=0$ 的交点的坐标是 ()
- A. (-3, 0) B. (3, 0) C. (0, 3) D. (0, -3)

二、填空题

3. 直线 $x-4=0$ 与 $y=-2$ 的交点的坐标是_____.
4. 直线 $4x-y+C=0$ 与 $3x+y-5=0$ 的交点的坐标是(1, 2), 则 $C=$ _____.

三、解答题

5. 判断下列各组直线是否相交. 若相交, 求出交点的坐标.

- (1) $l_1: x-2y=10$ 与 $l_2: 2x+y=0$;
- (2) $l_1: 2x+3y+2=4$ 与 $l_2: y=x-1$.

6. 求经过点 $A(2, 3)$ 及两条直线 $l_1: 2x+5y+3=0$ 与 $l_2: y=x-2$ 的交点 B 的直线方程.

能力提升

1. 两直线 $2x+3y-k=0$ 和 $x-ky+12=0$ 的交点在 y 轴上, 那么 k 的值是()
- A. -24 B. 6 C. ± 6 D. ± 24
2. 若直线 $y=kx+3$ 与直线 $y=\frac{1}{k}x-5$ 的交点在直线 $y=x$ 上, 则 $k=$ _____.

知识梳理答案

1. 唯一解 2. (1) 不相等 $k_1 \neq k_2$ 相交 (2) 相交



2. 两条直线平行的条件



学习目标

1. 理解两条直线平行的条件.
2. 掌握两条直线平行的判定方法.



知识梳理

1. 两条平行直线的斜率关系:

(1) 若直线 l_1 与直线 l_2 平行且都平行于 x 轴, 则直线 l_1 与直线 l_2 的斜率都为_____;

(2) 若直线 l_1 与直线 l_2 平行且都垂直于 x 轴, 则直线 l_1 与直线 l_2 的斜率都_____;

(3) 若直线 $l_1: y=k_1x+b_1$ 与直线 $l_2: y=k_2x+b_2$ 平行, 则直线 l_1 与直线 l_2 的斜率相等, 即_____.

2. 两条直线平行关系的判定:

(1) 若直线 $l_1: y=k_1x+b_1$ 与直线 $l_2: y=k_2x+b_2$ 的斜率存在且相等, 但在 y 轴上的截距不相等, 即_____, 且_____, 则直线 l_1 与直线 l_2 _____;

(2) 若直线 $l_1: y=k_1x+b_1$ 与直线 $l_2: y=k_2x+b_2$ 的斜率存在且相等, 在 y 轴上的截距相等, 即_____, 且_____, 则这两条直线_____;

(3) 若直线 l_1 与直线 l_2 的斜率都不存在, 则直线 l_1 与直线 l_2 _____或_____.

3. 由上述可知, 两条直线有斜率且不重合时, 如果它们平行, 那么它们的斜率相等; 反之, 如果它们的斜率相等, 那么它们平行. 记作_____.

(答案在本节末尾)



典型例题

例 1 判断下列各组直线是否平行.

(1) $l_1: y=x+6, l_2: y=x-1$;

(2) $l_1: y=2x+3, l_2: y=2+3x$;

(3) $l_1: 6x+2y-2=4, l_2: y=-3x+2$;

(4) $l_1: x+2y+1=2, l_2: 2x+y=0$;

(5) $l_1: x=1, l_2: x=-2$;

(6) $l_1: y=1, l_2: y=-2$.

解 (1) 因为直线 $y=x+6$ 与 $y=x-1$ 的斜率都为 1, 且在 y 轴上的截距不相等, 即 $k_1=k_2$,





$b_1 \neq b_2$, 所以两条直线平行.

(2) 因为直线 $y=2x+3$ 与 $y=2+3x$ 的斜率不相等, 所以两条直线不平行.

(3) 因为直线 $6x+2y-2=4$ 与 $y=-3x+2$ 的斜率相等, 且在 y 轴上的截距不相等, 即 $k_1 = k_2$, $b_1 \neq b_2$, 所以两条直线平行.

(4) 因为直线 $x+2y+1=2$ 与 $2x+y=0$ 的斜率不相等, 所以两条直线不平行.

(5) 因为直线 $x=1$ 与 $x=-2$ 都垂直于 x 轴, 两条直线的斜率都不存在, 所以两条直线平行.

(6) 因为直线 $y=1$ 与 $y=-2$ 的斜率都为 0, 且 $b_1 \neq b_2$, 所以两条直线平行.

点拨 判断两直线平行时要注意应用 $k_1 = k_2$, $b_1 \neq b_2$. 若 $k_1 = k_2$, $b_1 = b_2$, 则两条直线重合.

例 2 求过点 $P(1, -5)$, 且与直线 $3x+y-10=0$ 平行的直线方程.

解 由题意可设所求直线方程为 $3x+y+C=0 (C \neq -10)$, 把点 P 的坐标代入得 $3-5+C=0$, 解得 $C=2$, 因此所求直线方程是 $3x+y+2=0$.

点拨 用公式和待定系数法求直线方程的要点: 通过对已知条件的分析, 寻求满足直线方程的两个独立的条件, 代入公式写出直线方程或列出直线方程求待定系数, 在使用直线方程时, 要注意方程成立的条件, 必要时分类讨论.



巩固练习

基础巩固

一、选择题

- 若直线 l 与直线 $4x-y-2=0$ 平行, 则直线 l 的斜率为 ()
 A. 4 B. -4 C. $\frac{1}{4}$ D. $-\frac{1}{4}$
- 直线 $x-y+3=0$ 与直线 $2x-2y-8=0$ 的位置关系是 ()
 A. 平行 B. 不平行
 C. 平行或重合 D. 既不平行也不重合
- 直线 $2x-y+m=0$ 与直线 $4x-2y-8=0$ 的位置关系是 ()
 A. 平行 B. 不平行
 C. 平行或重合 D. 既不平行也不重合
- 若直线 $mx+y-2=0$ 与 $x+y-1=0$ 互相平行, 则实数 m 的值为 ()
 A. 0 B. -1 C. 1 D. $\frac{1}{2}$
- 过点 $(2, 4)$ 且与直线 $2x+4y+3=0$ 平行的直线的方程是 ()
 A. $2x+y-8=0$ B. $x+2y-10=0$



C. $x+2y+10=0$

D. $2x+y+8=0$

6. 若直线 $4x-3y+m=0$ 与直线 $8x-6y-8=0$ 重合, 则实数 m 的值为 ()

A. 4

B. -4

C. 8

D. -8

二、填空题

7. 若直线 $x-2ay-1=0$ 与直线 $x-ay+5=0$ 平行, 则 $a=$ _____.

8. 与直线 $x-3y+1=0$ 平行, 且在 x 轴上的截距是 -3 的直线的方程为_____.

9. 过点 $(2,3)$, 且与直线 $y=3x$ 平行的直线方程为_____.

三、解答题

10. 已知直线 l 经点 $(3,7)$, 且与直线 $y=3x+5$ 平行, 求直线 l 的方程.

11. 已知直线 l 经过点 $(0,2)$, 且与直线 $x+2y+1=2$ 平行, 求直线 l 的方程.

12. 已知直线 l 经过点 $(-1,3)$, 且与直线 $y=-2$ 平行, 求直线 l 的方程.

能力提升

1. 若直线 $x+ay-2a-2=0$ 与 $ax+y-a-1=0$ 互相平行, 则实数 a 的值为 ()

A. $-\frac{1}{2}$

B. -1

C. 1

D. $\frac{1}{2}$

2. 已知直线 l 经过 $(-1,-2)$, 且与倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$ 的直线平行, 求直线 l 的方程.

知识梳理答案

1. (1)0 (2)不存在 (3) $k_1=k_2$

2. (1) $k_1=k_2$ $b_1 \neq b_2$ 平行 (2) $k_1=k_2$ $b_1=b_2$ 重合 (3)平行 重合

3. $l_1 // l_2 \Leftrightarrow k_1=k_2$





3. 两条直线垂直的条件



学习目标

1. 理解两条直线垂直的条件.
2. 掌握两条直线垂直的判定方法.



知识梳理

两条直线垂直的判定:

(1) 如果直线 $l_1: y=k_1x+b_1$ 与直线 $l_2: y=k_2x+b_2$ 的斜率都存在且不等于零, 如果它们互相垂直, 那么它们的斜率互为负倒数; 反之, 如果它们的斜率互为负倒数, 那么它们互相垂直, 记作 $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow$ _____ 或 _____;

(2) 斜率不存在的直线与斜率为零的直线_____.

(答案在本节末尾)



典型例题

例 1 判断直线 $x-2y+1=0$ 与直线 $y=2x+1$ 是否垂直.

解 因为直线 $x-2y+1=0$ 的斜率为 $\frac{1}{2}$, 直线 $y=2x+1$ 的斜率为 2, 而 $\frac{1}{2} \times 2 = 1 \neq -1$, 所以两条直线不垂直.

点拨 如果直线 l_1 与直线 l_2 的斜率都存在且不等于零, 那么 $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1$.

例 2 已知直线 l 经过点 $(0, 2)$, 且垂直于直线 $x+2y+1=0$, 求直线 l 的方程.

解 因为直线 $x+2y+1=0$ 的斜率为 $-\frac{1}{2}$, 而直线 l 与 $x+2y+1=0$ 垂直, 所以直线 l 的斜率为 2, 从而直线 l 的方程为 $y=2x+2$.

点拨 如果直线 l_1 与直线 l_2 的斜率都存在且不等于零, 那么 $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1$, 依照公式我们可以求出直线 l 的斜率, 然后再根据斜截式求出直线的方程.



巩固练习

基础巩固

一、选择题

1. 若直线 l 与直线 $x-y-2=0$ 垂直, 则直线 l 的斜率为 ()
- A. 1 B. -1 C. 0 D. 不存在



2. 直线 $2x+3y+5=0$ 与直线 $x-2y+3=0$ 的位置关系是 ()
 A. 垂直 B. 平行
 C. 相交但不垂直 D. 重合
3. 直线 $x=2$ 与直线 $y=-3$ 的位置关系是 ()
 A. 垂直 B. 平行
 C. 相交但不垂直 D. 重合
4. 已知直线 $l_1:y=3x+1$ 与直线 $l_2:ax+y+1=0$, 若 $l_1 \perp l_2$, 则 a 的值为 ()
 A. $-\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{3}$ C. -3 D. 3
5. 过点 $P(-1,3)$ 且垂直于直线 $x-2y+3=0$ 的直线方程为 ()
 A. $2x+y-5=0$ B. $2x+y-1=0$
 C. $x+2y-5=0$ D. $x-2y+7=0$

二、填空题

6. 与直线 $x-y-7=0$ 垂直的直线的倾斜角是_____.
7. 和直线 $3x+4y-7=0$ 垂直, 并且在 x 轴上的截距是 -2 的直线方程是_____.
8. 已知直线 $ax+2y-5=0$ 与直线 $2x-5y+7=0$ 垂直, 则 $a=$ _____.
9. 若直线 l 经过点 $(2,1)$, 且垂直于 $x-2y+1=0$, 则直线 l 的方程为_____.

三、解答题

10. 已知直线 l 经过点 $(2,0)$, 且与直线 $y=x-4$ 垂直相交于点 P .
- (1) 求直线 l 的方程;
- (2) 求点 P 的坐标.

能力提升

1. 若直线 $mx+4y-2=0$ 与直线 $2x-5y+n=0$ 垂直, 垂足为 $(1,p)$, 则实数 n 的值为 ()
 A. -12 B. -2 C. 0 D. 10
2. 求过直线 $3x+2y+1=0$ 与 $2x-3y+5=0$ 的交点, 且垂直于直线 $l:6x-2y+5=0$ 的直线的方程.





3. 已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点为 $A(-2,1)$, $B(2,5)$, $C(4,-3)$, 求 BC 边上的高所在直线的方程.

知识梳理答案

$$(1) k_1 = -\frac{1}{k_2} \quad k_1 \cdot k_2 = -1 \quad (2) \text{垂直}$$



6.5 点到直线的距离



学习目标

1. 了解点到直线的距离公式.
2. 能用公式求两条平行线间的距离.



知识梳理

1. 点到直线的距离公式: 点 $P_0(x_0, y_0)$ 到直线 $Ax + By + C = 0$ 的距离为_____.

注意: 使用公式前, 需要把直线方程化成一般式.

2. 两条平行直线的距离公式: 直线 $Ax + By + C_1 = 0$ 到直线 $Ax + By + C_2 = 0$ 的距离为_____.

注意: (1) 利用公式时, 要注意 x, y 的系数必须分别对应相等.

(2) 求两条平行线之间的距离也可以先在一条直线上取一个坐标数值比较简单的点, 然后利用点到直线的距离公式, 求出这个点到另一条直线的距离, 即为两条平行直线间的距离.

(答案在本节末尾)



典型例题

例 1 求点 $P(1, 0)$ 到直线 $l: x - y + 3 = 0$ 的距离.

解 根据点到直线的距离公式, 得 $d = \frac{|1 - 0 + 3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = 2\sqrt{2}$.

点拨 在应用公式时要注意直线方程的形式, 不是一般式的要化成一般式.

例 2 求两条平行直线 $2x + y + 1 = 0$ 与 $y = -2x + 4$ 之间的距离.

解 解法一: $y = -2x + 4$ 化成一般式为 $2x + y - 4 = 0$, 在直线 $2x + y + 1 = 0$ 上取一点 $(0, -1)$, 因为点 $(0, -1)$ 到直线 $2x + y - 4 = 0$ 的距离 $d = \frac{|2 \times 0 + (-1) - 4|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \sqrt{5}$, 故两条平行直线 $2x + y + 1 = 0$ 与 $y = -2x + 4$ 之间的距离为 $\sqrt{5}$.

解法二: $d = \frac{|1 - (-4)|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \sqrt{5}$.

点拨 求两条平行线之间的距离可以先在一条直线上取一个坐标数值比较简单的点, 然后利用点到直线的距离公式, 求出这个点到另一条直线的距离, 即为两条平行直线间的距离.





还可以直接应用两平行线间的距离公式求解.

巩固练习

基础巩固

一、选择题

- 原点到直线 $x+y+1=0$ 的距离为 ()
 A. 1 B. 2 C. $\sqrt{2}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- 点 $P(1,2)$ 到直线 $4x+3y+5=0$ 的距离为 ()
 A. 2 B. 3 C. 4 D. 5
- 若点 $P(0,2)$ 到直线 $ax+4y+2=0$ 的距离为 2, 则 a 的值为 ()
 A. 3 B. 2 C. 3 或 -3 D. 2 或 -2
- 两平行直线 $5x+12y+3=0$ 与 $10x+24y+5=0$ 之间的距离是 ()
 A. $\frac{1}{13}$ B. $\frac{1}{26}$ C. $\frac{2}{13}$ D. $\frac{5}{26}$
- 若点 $(4,a)$ 到直线 $4x-3y-1=0$ 的距离等于 3, 则 a 的值为 ()
 A. 0 B. 10 C. 0 或 10 D. 不存在
- 若点 $P(x,y)$ 在直线 $x+y-4=0$ 上, O 为原点, 则 $|OP|$ 的最小值是 ()
 A. $\sqrt{10}$ B. $2\sqrt{2}$ C. $\sqrt{6}$ D. 2

二、填空题

- 点 $M(1,2)$ 到直线 $6x+8y+3=0$ 的距离为_____.
- 两条平行直线 $4x+3y+6=0$ 与 $8x+6y+2=0$ 的距离为_____.
- 点 $P(-1,2)$ 到直线 $x-3=0$ 的距离为_____.
- 点 $P(a,0)$ 到直线 $3x+4y-6=0$ 的距离大于 3, 则实数 a 的取值范围为_____.

三、解答题

- 求 $P(2,-3)$ 到直线 $l:y=3x+1$ 的距离.



12. 求与直线 $4x-3y+8=0$ 平行且距离为 3 的直线方程.

能力提升

1. 已知直线 l 经过点 $P(5,10)$, 且原点到它的距离为 5, 则直线 l 的方程为_____.
2. 直线 l 平行于直线 $4x-3y+5=0$, 且 $P(2,-3)$ 到 l 的距离为 4, 求直线 l 的方程.

知识梳理答案

$$1. d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$2. d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$





6.6 圆的方程



1. 曲线与方程



学习目标

了解曲线方程的概念.



知识梳理

1. 一条曲线可以看作是一个点运动的轨迹,我们把这个点叫做动点,这条曲线叫做动点的_____.

2. 一般地,如果某曲线 C 上的点与一个二元方程 $f(x, y)=0$ 的解具有如下的对应关系:

(1) 曲线上的点的坐标都是这个方程的解;

(2) 以这个方程的解为坐标的点都是曲线上的点.

那么这个方程叫做_____,这条曲线叫做_____.

由曲线的方程的定义可知,如果曲线 C 的方程是 $f(x, y)=0$,那么点 $P_0(x_0, y_0)$ 在曲线 C 上的条件是_____.

(答案在本节末尾)



典型例题

例 1 判断点 $P(4, 1)$, $Q(0, -5)$ 是否在曲线 $x^2 + y^2 - 25 = 0$ 上.

解 将点 P 的坐标代入方程 $x^2 + y^2 - 25 = 0$ 的左端,得

$$4^2 + 1^2 - 25 = -8.$$

因为点 P 的坐标不满足方程 $x^2 + y^2 - 25 = 0$,

所以点 $P(4, 1)$ 不在曲线 $x^2 + y^2 - 25 = 0$ 上.

将点 Q 的坐标代入方程 $x^2 + y^2 - 25 = 0$ 的左端,得

$$0^2 + (-5)^2 - 25 = 0.$$

因为点 Q 的坐标满足方程 $x^2 + y^2 - 25 = 0$,

所以点 $Q(0, -5)$ 在曲线 $x^2 + y^2 - 25 = 0$ 上.



例 2 已知直线 $l: 2x - by + 5 = 0$ 过点 $A(3, -1)$, 求 b 的值.

解 直线 $l: 2x - by + 5 = 0$ 过点 $A(3, -1)$,

点 A 的坐标是方程 $2x - by + 5 = 0$ 的解.

将 $A(3, -1)$ 代入方程 $2x - by + 5 = 0$,

即 $2 \times 3 - b \times (-1) + 5 = 0$,

解之, 得 $b = -11$.



巩固练习

基础巩固

一、选择题

1. 若点 $P(-2, m)$ 在直线 $y = 2x - 3$ 上, 则 $m =$ ()

A. -7 B. 5 C. 7 D. 0

2. 已知曲线 $ax^2 + by^2 = 2$ 经过点 $A(0, 2)$ 和 $B(1, 1)$, 则 a, b 的值分别为 ()

A. $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ B. $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$ C. $\frac{3}{2}, \frac{3}{2}$ D. $-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$

二、填空题

3. 若点 $(-1, 3)$ 在直线 $mx - 2y - 3 = 0$ 上, 则 $m =$ _____.

4. 点 $P(2, -3)$ 在曲线 $x^2 - ay^2 = 1$ 上, 则 $a =$ _____.

三、解答题

5. 判断下列各点是否在直线 $y = 2x - 1$ 上.

(1) $(2, 3)$;

(2) $(1, 3)$;

(3) $(0, -1)$.

能力提升

已知点 $A(a, 2)$ 既是曲线 $y = mx^2$ 上的点, 也是直线 $x - y = 0$ 上的一点, 则 $m =$ _____.

知识梳理答案

1. 轨迹 2. 曲线的方程 方程的曲线 $f(x_0, y_0) = 0$

