

第一章

函数、极限与连续



第一节

函

数

一、单项选择题

1. 函数 $y = \sqrt{1-x} + \sqrt{x}$ 的定义域是().

A. $\{x|x \leq 1\}$

B. $\{x|x \geq 0\}$

C. $\{x|x \geq 1 \text{ 或 } x \leq 0\}$

D. $\{x|0 \leq x \leq 1\}$

2. 函数 $f(x) = \frac{1}{\ln(x-1)} + \sqrt{9-x}$ 的定义域为().

A. $(1,9)$

B. $(1,9]$

C. $(1,2) \cup (2,9)$

D. $(1,2) \cup (2,9]$

3. 函数 $f(x) = \sqrt{x-3} + \arctan \frac{1}{x}$ 的定义域是().

A. $(-\infty, +\infty)$

B. $[0,3]$

C. $(-\infty, 0) \cup (0, 3)$

D. $[3, +\infty)$

4. 函数 $y = \sqrt{x-1} + \lg(2-x)$ 的定义域是().

A. $(1,2)$

B. $[1,4]$

C. $[1,2)$

D. $(1,2]$

5. 函数 $f(x) = \sqrt{2^x - 1} + \frac{1}{x-1}$ 的定义域为().

A. $[0,1)$

B. $(1, +\infty)$

C. $[0,1) \cup (1, +\infty)$

D. $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

6. 函数 $f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0 \leq x < 1, \\ 1+x, & |x| \geq 1 \end{cases}$ 的定义域是().

A. $(-\infty, -1) \cup [0, 1)$

B. $(-\infty, -1] \cup [0, +\infty)$

C. $[-1, 1]$

D. $[0, +\infty)$

7. 已知函数 $f(x+1)$ 的定义域为 $[2, 5]$, 则函数 $y = \frac{f(3x)}{\sqrt{\log_2(4-x^2)}}$ 的定义域为().

- A. $[1, +\infty)$ B. $[1, \sqrt{3})$
C. $(1, +\infty)$ D. $[\frac{1}{3}, \sqrt{3})$

8. 下列函数中, 定义域和值域分别与函数 $y = 10\lg x$ 的值域和定义域相同的是().

- A. $y = x$ B. $y = \lg x$
C. $y = 2^x$ D. $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$

9. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1, \\ x + \frac{6}{x} - 6, & x > 1, \end{cases}$ 则 $f(f(-3)) = ()$.

- A. $\frac{11}{3}$ B. 9
C. $\frac{2}{3}$ D. 6

10. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$ 若 $a \neq b$, 则 $\frac{a+b+(a-b)f(a-b)}{2}$ 的值是().

- A. a B. b
C. a, b 中较大的数 D. a, b 中较小的数

11. 设 $f(x-a) = x(x-a)$ (a 为大于零的常数), 则 $f(x) = ()$.

- A. $x(x-a)$ B. $x(x+a)$
C. $(x-a)(x+a)$ D. $(x-a)^2$

12. 设函数 $f(3x+2) = 9x+5$, 则 $f(x)$ 的表达式是().

- A. $3x+1$ B. $3x-1$
C. $9x+1$ D. $9x-1$

13. 已知 $f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$, 那么 $f(x)$ 的解析式可取为().

- A. $\frac{x}{1+x^2}$ B. $\frac{-2x}{1+x^2}$
C. $\frac{2x}{1+x^2}$ D. $\frac{-x}{1+x^2}$

14. 下列函数中, 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增的是().

- A. $y = x^2$ B. $y = \sin x$
C. $y = x$ D. $y = |x|$

15. 在如下所示的四个函数中, 奇函数的个数为().

- ① $f(x) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{x^2-1}$;
② $f(x) = e^x - e^{-x}$;
③ $f(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{|x+3|-3}$;
④ $f(x) = \lg \frac{1-x}{1+x}$.

- A. 4 B. 3
C. 2 D. 1

16. 下列函数中既是偶函数又在 $(0, +\infty)$ 上单调递减的是().

A. $f(x) = e^x - 1$

B. $f(x) = x + \frac{1}{x}$

C. $f(x) = \frac{1}{x^4}$

D. $f(x) = \lg|x|$

17. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 则().

A. $f(-3) < f(-\log_3 13) < f(2^{0.6})$

B. $f(-3) < f(2^{0.6}) < f(-\log_3 13)$

C. $f(2^{0.6}) < f(-\log_3 13) < f(-3)$

D. $f(2^{0.6}) < f(-3) < f(-\log_3 13)$

18. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 且当 $x < 0$ 时, $f(x) = 3^x$, 则 $f(1)$ 的值为().

A. -3

B. 3

C. $-\frac{1}{3}$

D. $\frac{1}{3}$

19. 已知函数 $f(x) = (x+3)(x-a)$ 是偶函数, 函数 $g(x) = x^3 + 4\sin x + b + 2$ 是奇函数, 则 $a+b$ 的值为().

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

20. 已知 $f(x)$ 是定义在 $[-2, 0]$ 上的增函数, 则满足 $f(x^2 - x - 2) > f(1 - x)$ 的 x 的取值范围是().

A. $(-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, +\infty)$

B. $[1, 2]$

C. $[-\sqrt{3}, 0]$

D. $(\sqrt{3}, 2]$

21. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数. 若 $f(x)$ 的最小正周期为 4 , 且 $f(1) > 0$, $f(3) = \frac{m-3}{m+1}$, 则 m 的取值范围是().

A. $-3 < m < 1$

B. $m > 1$ 或 $m < -3$

C. $-1 < m < 3$

D. $m > 3$ 或 $m < -1$

22. 设 $f(x)$ 是周期为 2 的奇函数, 且当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $f(x) = 2x(1-x)$, 则 $f(-\frac{5}{2}) =$ ().

A. $-\frac{1}{2}$

B. $-\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{4}$

D. $\frac{1}{2}$

23. 函数 $f(x) = 2\cos^2(x - \frac{\pi}{4}) - 1$ 是().

A. 最小正周期为 π 的偶函数

B. 最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$ 的偶函数

C. 最小正周期为 π 的奇函数

D. 最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$ 的奇函数

24. 下列函数中, 最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$, 并且图像关于 y 轴对称的是().

A. $y = \sin(2x + \frac{\pi}{2})$

B. $y = \sin(4x + \frac{\pi}{2})$

C. $y = \cos(4x + \frac{\pi}{2})$

D. $y = \sin 2x + \cos 2x$

25. 函数 $f(x) = 4^x$ 和 $g(x) = \log_4 x$ 的图像().

- A. 关于 x 轴对称 B. 关于 y 轴对称
C. 关于原点对称 D. 关于直线 $y = x$ 对称

26. 记函数 $f(x)$ 的反函数为 $f^{-1}(x)$. 若 $f(x) = \log_3 x$, 则 $f^{-1}(-1) = ()$.

- A. -3 B. $-\frac{1}{3}$
C. $\frac{1}{3}$ D. 3

27. 设函数 $y = 2 + \ln(x+3)$, 则此函数的反函数是().

- A. $y = e^{2x+3} - 3$ B. $y = e^{x-2} - 3$
C. $x = \ln(y-2) - 3$ D. $y = \ln(x-2) - 3$

28. 已知 $f(x) = \frac{a+bx}{c+x}$ (a, b, c 是常数) 的反函数为 $f^{-1}(x) = \frac{3x+5}{x-2}$, 则().

- A. $a = 2, b = 5, c = 3$ B. $a = 5, b = 2, c = -3$
C. $a = 5, b = 3, c = -2$ D. $a = 5, b = -2, c = 3$

29. 下列命题中为真命题的是().

① 函数 $y = \frac{1}{2} \ln \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$ 与 $y = \ln \tan \frac{x}{2}$ 是同一函数;

② 若函数 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称, 则函数 $y = f(2x)$ 与 $y = \frac{1}{2}g(x)$ 的图像也关于直线 $y = x$ 对称;

③ 若奇函数 $f(x)$ 对定义域内任意 x 都有 $f(x) = f(2-x)$, 则 $f(x)$ 为周期函数.

- A. ①② B. ①③
C. ②③ D. ②

30. 下列关于幂函数的命题中真命题的是().

- A. 不存在非奇非偶的幂函数
B. 若一个幂函数是奇函数, 则它的图像一定过原点
C. 若幂函数的图像不过点 $(-1, 1)$, 则它一定不是偶函数
D. 若两个幂函数的图像有三个不同的公共点, 则这两个函数一定是相同的

二、填空题

1. 函数 $f(x) = \sqrt{1 - \log_3 x}$ 的定义域为_____.

2. $\lg \sqrt{2} + \lg \sqrt{5} + 2^0 + (5^{\frac{1}{3}})^2 \times \sqrt[3]{5} =$ _____.

3. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 1 + \log_2(1-x), & x < 1, \\ 2^{x-2}, & x \geq 1, \end{cases}$ 则 $f(-1) + f(\log_2 4) =$ _____.

4. 若函数 $y = \frac{m-1}{x}$ ($x < 0$) 是减函数, 则 m 的取值范围是_____.

5. 已知函数 $f(x) = x^a$ 的图像经过点 $(3, \frac{1}{3})$, 则函数 $g(x) = (2x-1)f(x)$ 在区间 $[\frac{1}{2}, 2]$ 上的最小值为_____.

6. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且在 $[0, +\infty)$ 上是单调增加的, $f(\frac{1}{3}) = 0$, 则不等式 $f(\log_{\frac{1}{8}} x) > 0$ 的解集为_____.

7. 已知 $y = f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的周期为 4 的奇函数, 且当 $0 < x < 2$ 时, $f(x) = \ln x + x$, 则 $f(2\ 019)$ = _____.

8. 设函数 $f(x)$ 是周期为 5 的奇函数, 当 $0 < x \leq 2$ 时, $f(x) = 2^x - 3$, 则 $f(2\ 013) =$ _____.

9. 若函数 $f(x) = x(x+a)$ 为偶函数, 则 $a =$ _____.

10. 若 $f(x) = \lg(10^x + 1) + ax$ 是偶函数, $g(x) = \frac{4^x - b}{2^x}$ 是奇函数, 则 $a + b =$ _____.

11. $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数, 且 $f(x+2) = -\frac{1}{f(x)}$, 当 $2 \leq x \leq 3$ 时, $f(x) = x$, 则 $f(-\frac{11}{2}) =$ _____.

12. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 和偶函数 $g(x)$ 满足 $f(x) + g(x) = a^x - a^{-x} + 4$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$), 且 $g(2) = a$, 则 $f(2)$ 的值为 _____.

13. 函数 $y = a^x$ ($0 < a < 1$) 在 $[1, 2]$ 上的最大值为 m , 最小值为 n , 且 $m + n = \frac{3}{4}$, 则 a 的值是 _____.

14. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 且当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = \log_2(x+1) + m + 1$, 则 $f(-3) =$ _____.

15. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 且当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = x^2$. 若对任意的 $x \in [a, a+2]$, $f(x+a) \geq f(\sqrt{2}x)$ 恒成立, 则 a 的最小值为 _____.

三、解答题

1. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-1, 3]$, 求 $f(x+1)$, $f(x^2)$ 的定义域.

2. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-1, 1]$, 求 $f(ax) + f(\frac{x}{a})$ 的定义域, 其中 $a > 0$.

3. 已知 $f(\sqrt{x}+1) = x + 2\sqrt{x}$, 求 $f(x+1)$ 的解析式.

4. 已知 $f(x) = x^2 + 2$, $g(x) = \begin{cases} -x+2, & x < 1, \\ x, & x \geq 1, \end{cases}$ 求 $g(f(x))$ 和 $f(g(x))$ 的解析式.

5. 已知 $f(x)$ 是一次函数, 且 $f(f(x)) = 4x + 3$, 求 $f(x)$ 的解析式.

6. 已知 $f(x)$ 是偶函数, $g(x)$ 是奇函数, 且 $f(x) + g(x) = \frac{1}{x-1}$, 求 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的解析式.



7. 求函数 $y = \frac{ax+5}{x+2}$ 的反函数.

8. 已知函数 $y = f(x)$ 是增函数, 且存在反函数 $y = f^{-1}(x)$. 证明: 反函数 $y = f^{-1}(x)$ 是增函数.

9. 判断函数 $f(x) = -x^3 + 1$ 的单调性.

10. 已知函数 $f(x)$ 是定义域为 $[-2, 2]$ 的奇函数, 且对定义域内任意满足 $a+b \neq 0$ 的实数 a, b , 有 $\frac{f(a)+f(b)}{a+b} > 0$ 成立.

(1) 判断 $f(x)$ 在定义域上的单调性, 并给出证明;

(2)解不等式 $f(2x-1) \leq f(x^2-1)$.

第二节 极 限

一、单项选择题

1. 设 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$, 则下列正确的是().
 A. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \infty$
 B. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \infty$
 C. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = 0$
 D. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x) + g(x)} = 0$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2\sin x)^{\frac{2}{\sin x}} = ()$.
 A. e
 B. e^2
 C. e^4
 D. 1
3. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $(1+x^2)^k - 1$ 与 $1 - \cos x$ 为等价无穷小, 则 k 的值为().
 A. 1
 B. $-\frac{1}{2}$
 C. $\frac{1}{2}$
 D. -1
4. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 3$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = ()$.
 A. 0
 B. 1
 C. 2
 D. 3
5. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列函数中为无穷小量的是().
 A. $x+2$
 B. x^2
 C. $(x+1)^2$
 D. 2^x
6. 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 2x} = ()$.
 A. 1
 B. 2
 C. $\frac{1}{2}$
 D. 不存在

7. 当 $x \rightarrow 0$ 时下列变量中与 x 是等价无穷小量的有().

- A. $\sin^2 x$ B. $\ln(1+x)$
C. x^2 D. $2x^2 - x$

8. 函数 $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & 0 < x \leq 1, \\ 2-x, & 1 < x \leq 3 \end{cases}$ 在()时极限为 1.

- A. $x \rightarrow \frac{1}{2}$ B. $x \rightarrow 1$
C. $x \rightarrow \frac{3}{2}$ D. $x \rightarrow 2$

9. 当 $x \rightarrow$ () 时, $y = \frac{x^2-1}{x(x-1)}$ 为无穷大量.

- A. 0 B. 1
C. $+\infty$ D. $-\infty$

10. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8^x}{8^x - 5^x} =$ ().

- A. 1 B. $\frac{5}{8}$
C. $\frac{8}{5}$ D. 0

11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^x =$ ().

- A. 1 B. e^{-1}
C. e^{-2} D. ∞

12. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-2}{x+1} \right)^{2x} =$ ().

- A. e^{-6} B. ∞
C. 1 D. e^3

13. $\lim_{x \rightarrow 0} 2^{\frac{1}{x}} =$ ().

- A. 0 B. $+\infty$
C. ∞ D. 不存在

14. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2-1)}{x-1} =$ ().

- A. $\frac{1}{2}$ B. 1
C. 2 D. 0

15. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+ax+b}{x-1} = 3$, 则 a, b 分别为().

- A. 1, 1 B. -1, -2
C. -2, 1 D. 1, -2

16. 下列结论正确的是().

- A. $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 1$ B. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = 1$
C. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = 1$ D. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = 0$

17. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 与 $e^{2x} - 1$ 等价的无穷小量是().

- A. x B. $2x$
C. $3x$ D. x^2

18. 设 $f(x) = \frac{|x|}{x}$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = ()$.

- A. 1 B. -1
C. 0 D. 不存在

19. 下列结论正确的是().

- A. 无穷小量是很小的正数 B. 无穷大量是很大的数
C. 无穷大量的倒数是无穷小量 D. 一个很小的正数的倒数是无穷大量

20. 设 $\alpha(x) = \ln(1+x^2)$, $\beta(x) = 2x \sin x$, 当 $x \rightarrow 0$ 时, ().

- A. $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ 没有极限 B. $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是等价无穷小量
C. $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是同阶无穷小量 D. $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 高阶的无穷小量

21. 在下列各式中, 正确的是().

- A. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ B. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 1$
C. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin x}{x} = 1$ D. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 1$

22. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+2}{3x-2} \right)^{2x} = ()$.

- A. $e^{\frac{8}{3}}$ B. e^{-2}
C. e^{-3} D. e^{-4}

23. 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^{4x} = ()$

- A. e^4 B. e^{-4}
C. e D. 1

24. 下列公式中计算正确的是().

- A. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 1$ B. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = 1$
C. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^x = -e$ D. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{-x} = e$

25. 函数 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处左、右极限都存在是 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在的().

- A. 充分非必要条件 B. 必要非充分条件
C. 充要条件 D. 即非充分也非必要条件

26. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列变量中() 是无穷小量.

- A. $x \sin \frac{1}{x}$ B. $\frac{1}{x} \sin x$
C. $\ln x^2$ D. e^x

27. 下列函数中, 当 $x \rightarrow 0$ 时与 $e^{x^3} - 1$ 等价的无穷小量是().

- A. $x^2 \sin x$ B. $3x^2$
C. $\sin x^2$ D. $\frac{x^3}{3}$

28. 极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 3x + 2} = (\quad)$.

A. -3

B. -2

C. 1

D. 2

29. 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{2}{x}} = (\quad)$.

A. e^{-1} B. e C. e^{-2} D. e^2

30. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列函数中与 $\sin(x^2)$ 等价的无穷小量是 $(\quad)$.

A. x B. x^2 C. $\sin x$ D. $1 - \cos x$

31. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} + \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = (\quad)$.

A. e B. e^{-1} C. $e+1$ D. $e^{-1}+1$

32. 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \sin x \right) = (\quad)$.

A. -3

B. -2

C. 1

D. -1

33. 设 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < 0, \\ 3^x, & x \geq 0, \end{cases}$ 则下列等式正确的是 $(\quad)$.

A. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$

B. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$

C. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 3$

D. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3$

34. 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x} \right)^{2x} = (\quad)$.

A. e^2

B. 1

C. 2

D. e^{-2}

35. 下列等式正确的是 $(\quad)$.

A. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(2012x)}{x} = 2012$

B. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \sin x = 0$

C. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x} = 1$

D. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = 1$

36. 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin 3x}{x} = (\quad)$.

A. -2

B. 0

C. 2

D. 3

37. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x} \right)^{x-1} = (\quad)$.

A. e^{-2} B. e^2 C. $2e$ D. $-2e$

38. 下列等式正确的是 $(\quad)$.

A. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

B. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = 0$

C. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^x = e$

D. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^x = e$

39. 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x} \right)^{2x} = (\quad)$.

A. e^4

B. e^{-2}

C. 1

D. e^2

40. 下列等式正确的是().

A. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2-1} = \frac{1}{2}$

B. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 1$

C. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{e}$

D. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 2x}{x^2} = 1$

41. 设 $f(x) = 1-x$, $g(x) = 1-\sqrt[3]{x}$, 则当 $x \rightarrow 1$ 时().

A. $f(x)$ 是比 $g(x)$ 高阶的无穷小

B. $f(x)$ 是比 $g(x)$ 低阶的无穷小

C. $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同阶但不等价的无穷小

D. $f(x)$ 与 $g(x)$ 是等价无穷小

42. 下列说法正确的是().

A. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = 1$

B. $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 1$

C. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 1$

D. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x} = 1$

43. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos \frac{x}{2}}{x^2} = (\quad)$.

A. $-\frac{1}{8}$

B. $-\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{8}$

D. $\frac{1}{4}$

44. 函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处有意义是极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在的().

A. 充分条件

B. 必要条件

C. 充分必要条件

D. 无关条件

45. 下列结论正确的是().

A. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^{2x} = e$

B. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{-x} = e$

C. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^{1-x} = e$

D. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{-2x} = e$

46. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\frac{1}{4}(\cos 3x - \cos x)$ 是 x^2 的().

A. 高阶无穷小量

B. 同阶但不是等价无穷小量

C. 低阶无穷小量

D. 等价无穷小量

47. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列选项中为 x 的高阶无穷小量的是().

A. $\sin 2x$

B. $\sqrt{1-x} - 1$

C. $\cos x - 1$

D. $\ln(1-5x)$

48. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 与 $2\sin x^2 + 3x^6$ 等价的无穷小量是().

A. x^6

B. $2x^2$

C. x^2

D. $3x^6$

49. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$, 则必有().

A. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \infty$

B. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = 0$

C. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x) + g(x)} = 0$

D. $\lim_{x \rightarrow a} kf(x) = \infty, (k \neq 0)$

50. 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{2x} = 1$, 则 $a =$ ().

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

二、填空题

1. $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} =$ _____.

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) =$ _____.

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1-x}}{x} =$ _____.

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 2x} =$ _____.

5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n =$ _____.

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x+1} \right)^x =$ _____.

7. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x-2)}{x^2 - 5x + 6} =$ _____.

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} =$ _____.

9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^3} =$ _____.

10. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2x)^{\frac{1}{x}} =$ _____.

11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{2x^2} =$ _____.

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin x} - 1}{x} =$ _____.

13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} =$ _____.

14. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2} =$ _____.

15. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{1+x^3} - \frac{1}{1+x} \right) =$ _____.

16. $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 - x \sin 2x} + 4 =$ _____.

17. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x+6} \right)^{\frac{x-1}{2}} =$ _____.

18. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x} =$ _____.

19. 已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n} \right)^{nk} = e^{-3}$, 则 $k =$ _____.

20. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 4x)^{\frac{2}{\sin x}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

21. 已知极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - \sqrt{ax^2 - x + 1})$ 存在, 则 a 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

22. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+x}{n-1} \right)^n = \underline{\hspace{2cm}}.$

23. 若 $x \rightarrow 0$ 时, 无穷小量 $2x$ 与 $3x^2 + mx$ 等价, 则常数 $m = \underline{\hspace{2cm}}.$

24. 已知当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) \sim 2x$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{f(x)} = \underline{\hspace{2cm}}.$

25. 设 $a > b > 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n + b^n}{a^{n+1} + b^{n+1}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

三、解答题

1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-3}{2x-5} \right)^{3x+1}.$

2. 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x-2} \right)^x.$

3. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)^2}{1 - \cos x}.$





4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+x)}{1 - \cos x}.$

5. 计算极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{\sin x}.$

6. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}.$

7. 计算 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \sqrt{1-2x}.$

8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^{\sin x}.$

9. 求 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1}.$

10. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 \sin \frac{1}{x} + e^{2x-1} + 4x\right).$

11. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{(e^x - 1)\sin x}.$





12. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{3}{\sin x}}.$

13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2x^2)}{x^2}.$

14. 计算 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3 + 2x}{2 + 2x} \right)^x.$

15. 计算 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(1 + x).$

16. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2 + n - 1} + \frac{1}{n^2 + n - 2} + \cdots + \frac{1}{n^2 + n - n} \right)$.

17. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x^2 \sin \frac{1}{x}}{(1 + \cos x) \ln(1 + x)}$.

18. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\cos x}$.

19. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - \cos \pi x}{x^2 - 4x + 4}$.





20. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x^2 - 1} \right)^x.$

21. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right).$

22. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \right).$

23. 设 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + x + 1}{x} - ax - b \right) = 0$, 求 a, b 的值.