第一篇

文化基础测试数学部分

第一章　集合与简易逻辑

第二章　不等式

第三章　函数

第四章　指数函数与对数函数

第五章　三角函数

第六章　数列

第七章　向量

第八章　直线与圆

第九章　立体几何

第十章　概率与统计

第一章　集合与简易逻辑

考情分析

集合是工具型的新知识，考查的重点是：数学符号“$\in$”“$\notin$”“$\subseteq$”“$\supseteq$”的运用；集合的交集、并集、补集运算；集合间的关系和元素的性质.

知识结构

- 集合与简易逻辑
  - 集合
    - 集合的概念
      - 集合的定义
      - 元素的特征
      - 集合的分类
    - 集合的表示法
      - 列举法
      - 描述法
    - 集合间的关系
      - 包含关系 — 子集
        - 真子集
        - 相等
      - 集合的运算
        - 交集
        - 并集
        - 补集
  - 简易逻辑
    - 逻辑联结词
      - 或：$p \vee q$
      - 且：$p \wedge q$
      - 非：$\neg p$
    - 条件
      - 充分条件
      - 必要条件
      - 充要条件

要点归纳

一、集合的概念与表示法

1. 集合

把具有某种属性的一些确定的对象看成一个整体，便形成了一个集合，常用大写英文字母 A,B,C 等表示.

2. 元素

集合中的每一个确定的对象叫作这个集合的元素，常用小写英文字母 a,b,c 等表示.

3. 元素与集合的关系及性质

如果 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于 A，记作 $a\in A$；如果 a 不是集合 A 的元素，就说 a 不属于 A，记作 $a\notin A$. 集合中的元素具有确定性、互异性、无序性的特征.

例如：集合$\{1,2\}$与集合$\{2,1\}$是相同的集合，这就是集合元素的无序性；例如："个子高的同学"不能构成集合，形容词"高"导致不满足集合元素的确定性；例如：$\{1,2,1\}$是错误的，集合元素不能重复出现，不满足集合元素的互异性.

4. 常用的集合

(1)空集. 不含任何元素的集合叫作空集，记作$\varnothing$.

(2)正整数集. 所有正整数组成的集合叫作正整数集，记作$\mathbf{N}_+$ 或 $\mathbf{N}^*$.

(3)自然数集. 所有自然数组成的集合叫作自然数集，记作$\mathbf{N}$.

(4)整数集. 所有整数组成的集合叫作整数集，记作$\mathbf{Z}$.

(5)有理数集. 所有有理数组成的集合叫作有理数集，记作$\mathbf{Q}$.

(6)实数集. 所有实数组成的集合叫作实数集，记作$\mathbf{R}$.

小贴士

空集是最"小"的集合. 0，$\{0\}$，$\varnothing$的关系具体为：$0\in\{0\}$；$0\notin\varnothing$；$\varnothing\subseteq\{0\}$.

5. 集合的两种表示法

(1)列举法. 把集合的元素一一列举出来，写在大括号内，这种表示集合的方法叫作列举法.

(2)描述法. 用集合所含元素的共同特性表示集合的方法叫作描述法.

描述法表示集合的一般形式是$\{x\mid p(x)\}$，其中"x"是集合中元素的代表形式，"$p(x)$"是集合中元素的共同特征，两者之间的竖线不可省略.

小贴士

用列举法表示集合时，要注意以下几点：

(1)元素之间用"，"隔开.

(2)元素不能重复(满足集合中元素的互异性).

(3)元素不能遗漏.

(4)当集合中的元素较少时用列举法比较简单;若集合中的元素较多或无限,但存在一定的规律,在不发生误解的情况下,也可以用列举法表示.

二、集合间的关系

1. 子集

一般地,对于两个集合 A,B,如果集合 A 中任何一个元素都是集合 B 的元素,那么集合 A 就叫作集合 B 的子集,记作 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$,读作"A 包含于 B"或"B 包含 A".

当集合 A 不包含于集合 B 或集合 B 不包含集合 A 时,记作 $A\nsubseteq B$ 或 $B\nsupseteq A$.

性质:任何一个集合是它本身的子集,即 $A\subseteq A$;空集是任何集合的子集,即 $\varnothing\subseteq A$;对于集合 A,B,C,若 $A\subseteq B$,$B\subseteq C$,则 $A\subseteq C$.

小贴士

不能把子集说成是由原来集合中的部分元素组成的集合,因为集合 A 的子集包括它本身,而这个子集由集合 A 的全体元素组成;空集也是集合 A 的子集,但这个子集中不包括集合 A 中的任何元素.

2. 真子集

如果集合 A 是集合 B 的子集,并且集合 B 中至少有一个元素不属于集合 A,则集合 A 是集合 B 的真子集(A 包含于 B 但不等于 B),记作 $A\subsetneqq B$ 或 $B\supsetneqq A$,读作"A 真包含于 B"或"B 真包含 A".

性质:空集是任何非空集合的真子集;对于集合 A,B,C,若 $A\subsetneqq B$,$B\subsetneqq C$,则 $A\subsetneqq C$.

小贴士

元素与集合之间是属于关系,集合与集合之间是包含关系.

3. 集合相等

一般地,对于两个集合 A 与 B,如果集合 A 中的任何一个元素都是集合 B 的元素,同时集合 B 中的任何一个元素也都是集合 A 的元素,我们就说集合 A 等于集合 B,记作 $A=B$(A,B 的所有元素均相同).

集合 A,B 的元素相同,例如:$A=\{-1,1\}$,$B=\{x|x^2=1\}$.

小贴士

(1)若两个集合相等,则两个集合所包含的元素完全相同;反之亦然.

（2）要判断两个集合是否相等，对于元素较少的有限集合，主要看它们的元素是否完全相同；若是无限集合，则从“互为子集”入手进行判断. 若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则 $A=B$.

三、集合的交集

1. 交集的定义

一般地，对于两个给定的集合 A,B，由既属于集合 A 又属于集合 B 的所有元素组成的集合，称为集合 A 与集合 B 的交集，记作 $A\cap B$，即 $A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$.

2. 交集的性质

（1）$A\cap B=B\cap A$.

（2）$A\cap A=A$.

（3）$A\cap\varnothing=\varnothing$.

（4）$A\cap B\subseteq A$，$A\cap B\subseteq B$.

（5）若 $A\subseteq B$，则 $A\cap B=A$.

四、集合的并集

1. 并集的定义

一般地，对于两个给定的集合 A,B，由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素组成的集合，称为集合 A 与集合 B 的并集，记作 $A\cup B$，即 $A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$.

2. 并集的性质

（1）$A\cup B=B\cup A$.

（2）$A\cup A=A$.

（3）$A\cup\varnothing=A$.

（4）$A\subseteq A\cup B$，$B\subseteq A\cup B$.

（5）若 $A\subseteq B$，则 $A\cup B=B$.

3. 图示两个集合的交集、并集

（1）用 Venn 图表示两个集合的交集、并集（图 1-1）.

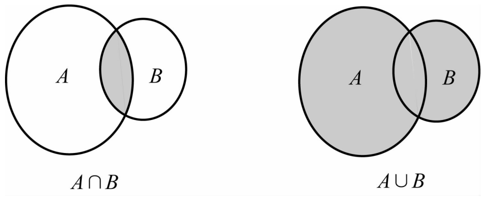


图 1-1

(2)借助数轴表示数集的交集、并集(图 1-2).

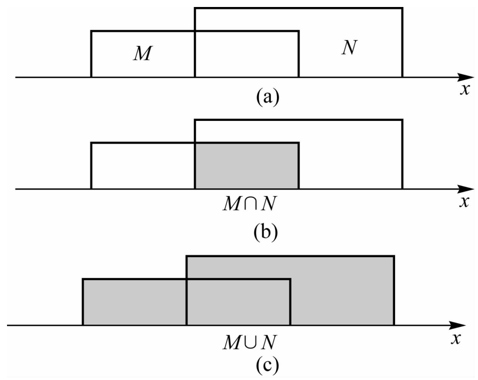


图 1-2

五、集合的补集

1. 全集的定义

若一个集合含有我们所研究问题中涉及的所有元素,则称这个集合为全集,通常用U 表示.

小贴士

全集是一个相对的概念,在不同的情况下全集的概念不同.

2. 补集的定义

对于一个集合 A,由全集 U 中不属于集合 A 的所有元素组成的集合称为集合 A 相对于全集 U 的补集,简称为集合 A 的补集,记作$\complement_U A$,读作“A 在 U 中的补集”,即$\complement_U A=\{x|x\in U$ 且 $x\notin A\}$.

3. 补集的性质

(1)$\complement_U(\complement_U A)=A$.

(2)$\complement_U\varnothing=U$, $\complement_U U=\varnothing$.

(3)$A\cup(\complement_U A)=U$.

(4)$A\cap(\complement_U A)=\varnothing$.

小贴士

集合的运算主要有两种类型:集合元素可列举的,先列举再运算;集合元素不可列举的(实数范围内不等式),用数轴图辅助集合的运算.

六、简易逻辑

1. 命题的定义

在数学中,我们把用语言、符号或式子表达的,可以判断真假的陈述句叫作命题. 正确的命题叫作真命

题，记作T；错误的命题叫作假命题，记作F. T 和 F 称为命题的真值（有的书上用 1 和 0 作为命题的真值）. p 与 q 为等值的命题记作 $p=q$.

2. 量词

常用的量词有全称量词和存在量词，用符号表示分别为 $\forall$ 和 $\exists$.

含有全称量词的命题称为全称命题；含有存在量词的命题称为存在性命题.

3. 逻辑联结词

常用的逻辑联结词有“且”“或”“非”，符号分别为“$\wedge$”“$\vee$”“$\neg$”.

4. 充要条件的定义

（1）对于两个命题 p，q，若有 $p\Rightarrow q$，则称 p 是 q 的充分条件，q 是 p 的必要条件.

小贴士

p 是 q 的充分条件，是指只要具备了条件 p，那么 q 就一定成立，即命题中的条件是充分的；q 是 p 的必要条件，是指若不具备条件 q，则 p 就不能成立，即 q 是 p 成立的必不可少的条件.

（2）若 $p\Rightarrow q$ 且 $q\Rightarrow p$，即 $p\Leftrightarrow q$，则 p 是 q 的充分且必要条件，简称充要条件.

小贴士

（1）当 $p\Leftrightarrow q$ 时，也称 p 与 q 是等价的.

（2）与充要条件等价的词语有“当且仅当”“等价于”“有且只有”“反过来也成立”等.

5. 充要条件的判断方法

（1）若 $p\Rightarrow q$ 但 $q\nRightarrow p$，则 p 是 q 的充分不必要条件.

（2）若 $p\nRightarrow q$ 但 $q\Rightarrow p$，则 p 是 q 的必要不充分条件.

（3）若 $p\Rightarrow q$ 且 $q\Rightarrow p$，则 p 是 q 的充要条件.

（4）若 $p\nRightarrow q$ 且 $q\nRightarrow p$，则 p 是 q 的既不充分也不必要条件.

真题链接

1.（2021 年真题）已知集合 $A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{2,3,6\}$，则 $A\cap B=$（　　）.

A. $\{2,3,6\}$　　B. $\{2,3\}$

C. $\{1,4,5\}$　　D. $\{1,4,6\}$

答案：B

解析：由交集的定义得 $A\cap B=\{2,3\}$.

2.（2020 年真题）设集合 $A=\{2,3,4\}$，集合 $B=\{3,4,5,6\}$，则 $A\cup B=$（　　）.

A. $\{3,4\}$　　B. $\{2,5,6\}$

C. $\{2,3,4,5\}$　　D. $\{2,3,4,5,6\}$

答案：D

解析：由并集的定义可知 $A\cup B=\{2,3,4,5,6\}$.

3.（2019 年真题）设集合 $A=\{1,e,f\}$，集合 $B=\{2,d,f\}$，则 $A\cap B=($　　$)$.

A. $\{f\}$

B. $\{1,2\}$

C. $\{e,d,f\}$

D. $\{1,2,e,d,f\}$

答案：A

解析：由交集的定义可得 $A\cap B=\{f\}$.

典型例析

例 1　下列对象能构成集合的是(　　).

A. 著名的画家

B. 可爱的小孩

C. 本班个子最高的学生

D. 优秀的人才

答案：C

解析：粗看每个选项都有形容词，形容词会导致元素不确定，但是选项 C 是“本班个子最高的学生”反而是可以确定的，故选 C.

例 2　已知集合 $A=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 3,x\in\mathbf{Z},y\in\mathbf{Z}\}$，则 A 中元素的个数为(　　).

A. 9

B. 8

C. 5

D. 4

答案：A

解析：由 $x^2+y^2\leqslant 3$，可知 $-\sqrt{3}\leqslant x\leqslant\sqrt{3}$，$-\sqrt{3}\leqslant y\leqslant\sqrt{3}$. 又因为 $x\in\mathbf{Z}$，$y\in\mathbf{Z}$，所以 $x\in\{-1,0,1\}$，$y\in\{-1,0,1\}$. 所以 A 中元素的个数为 9，故选 A.

点拨：对于求解集合中元素个数的题目，首先明确集合，然后根据集合中元素的互异性求出集合中元素的个数，或利用数形结合的方法求出集合中元素的个数.

例 3　用列举法表示下列集合.

(1) $A=\{x\mid -2<x<5,x\in\mathbf{Z}\}$；

(2) $B=\{(x,y)\mid 2x+y=5,x\in\mathbf{N},y\in\mathbf{N}\}$.

解析：(1) $A=\{-1,0,1,2,3,4\}$.

(2) $B=\{(0,5),(1,3),(2,1)\}$.

点拨：掌握集合的两种表示方法：列举法、描述法.

例 4　下列各题所表示的关系正确的是(　　).

A. $0\in\varnothing$

B. $(1,2)\in\{(x,y)\mid 2x-y=0\}$

C. $\{x\mid -1<x\leqslant 2\}\subseteq\{x\mid 0<x<3\}$

D. $\{1\}=\{x\mid |x|=1\}$

答案：B

解析：选项 A：$\varnothing$不含任何元素，$0\notin\varnothing$；选项 B 右边集合是点集，将 $x=1$，$y=2$ 代入方程 $2x-y=0$ 成立，故 $(1,2)\in\{(x,y)\mid 2x-y=0\}$，故选 B.

例 5　已知集合 $A=\{x|x^2-x-2=0\}$，$B=\{x|x^2-4x+p=0\}$，若 $B\subseteq A$，求实数 p 的取值范围.

解析：由题意，得 $A=\{-1,2\}$.

因为 $B\subseteq A$，

所以 $B=\varnothing$ 或 $B=\{-1\}$ 或 $B=\{2\}$ 或 $B=\{-1,2\}$.

当 $B=\{-1,2\}$ 时，由根与系数的关系，可得 $-1+2=1$.

又因为 $B=\{x|x^2-4x+p=0\}$，可知方程两根之和为 4，

所以 $B=\{-1,2\}$ 不成立.

当 $B=\varnothing$ 时，$\Delta=(-4)^2-4p=16-4p<0$，

解得 $p>4$；

当 $B=\{-1\}$ 时，$\begin{cases}\Delta=16-4p=0,\\(-1)^2-4\times(-1)+p=0,\end{cases}$ 无解；

当 $B=\{2\}$ 时，$\begin{cases}\Delta=16-4p=0,\\2^2-4\times 2+p=0,\end{cases}$

解得 $p=4$.

综上所述，实数 p 的取值范围是 $\{p|p\geqslant 4\}$.

点拨：本题考查了两个集合包含或相等关系的问题.

例 6　已知集合 $A=\{a,c,f\}$，集合 $B=\{c,d,f\}$，则 $A\cap B=$（　　）.

A. $\{a,c,d,f\}$　　B. $\{c,f\}$

C. $\{a,d\}$　　D. $\{f\}$

答案：B

解析：交集运算找公共元素，故选 B.

例 7　集合 $A=\{x|-1<x\leqslant 3\}$，集合 $B=\{x|1<x<5\}$，则 $A\cup B=$（　　）.

A. $\{x|-1<x<5\}$　　B. $\{x|3<x<5\}$

C. $\{x|-1<x<1\}$　　D. $\{x|1<x\leqslant 3\}$

答案：A

解析：在数轴上作出集合 A，B，题目求的是并集，故取 A，B 的所有元素. 故选 A.

例 8　设全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x|0\leqslant x<2\}$，集合 $B=\{x|x^2-2x-3<0\}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$，$(\complement_U A)\cap B$.

解析：$B=\{x|x^2-2x-3<0\}=\{x|-1<x<3\}$，$\complement_U A=\{x|x<0$ 或 $x\geqslant 2\}$，

所以 $A\cap B=\{x|0\leqslant x<2\}$，

$A\cup B=\{x|-1<x<3\}$，

$(\complement_U A)\cap B=\{x|-1<x<0$ 或 $2\leqslant x<3\}$.

点拨：本题考查对集合运算的理解及性质的运用，并且要注意端点的取值.

例 9　已知集合 $M=\{x|a\leqslant x\leqslant a+3\}$，$N=\{x|x<-1$ 或 $x>5\}$，若 $M\cap N=\varnothing$，求实数 a 的取值范围.

解析：如图 1-3 所示，要使 $M\cap N=\varnothing$，必须满足 $\begin{cases}a+3\leqslant 5,\\a\geqslant -1,\end{cases}$

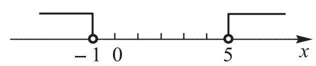


图 1-3

解得$-1\leqslant a\leqslant 2$,所以实数 a 的取值范围为$\{a\mid -1\leqslant a\leqslant 2\}$.

点拨:解题时利用数轴表示集合,便于寻求满足条件的实数 a. 特别需要注意的是“端点值”的问题,要明确是否能取“=”.

例 10　已知 a,b 都是实数,则“$a^2>b^2$”是“$a>b$”的(　　).

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

答案:D

解析:命题中的条件是“$a^2>b^2$”,结论是“$a>b$” ,显然有 $a^2>b^2 \neq a>b$,且 $a>b \neq a^2>b^2$. 所以“$a^2>b^2$”是“$a>b$”的既不充分也不必要条件,故选 D.

例 11　在一次跳伞训练中,甲、乙两位学员各跳一次. 设命题 p 是“甲降落在指定范围”,q 是“乙降落在指定范围”,则命题“至少有一位学员没有降落在指定范围”可表示为(　　).

A. $(\neg p)\vee(\neg q)$　　B. $p\vee(\neg q)$

C. $(\neg p)\wedge(\neg q)$　　D. $p\vee q$

答案:A

解析:$\neg p$:甲没有降落在指定范围,$\neg q$:乙没有降落在指定范围,“至少有一位学员没有降落在指定范围”即“$\neg p$ 或 $\neg q$”发生,可表示为$(\neg p)\vee(\neg q)$,故选 A.

例 12　设 A,B 是非空集合,定义 $A\times B=\{x\mid x\in A\cup B$ 且 $x\notin A\cap B\}$,已知 $A=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 2\}$,$B=\{x\mid x\geqslant 0\}$,则 $A\times B=$(　　).

A. $(2,+\infty)$　　B. $[0,1]\cup[2,+\infty)$

C. $[0,1)\cup(2,+\infty)$　　D. $[0,1]\cup(2,+\infty)$

答案:A

解析:由题意知,$A\cup B=[0,+\infty)$,$A\cap B=[0,2]$. 所以 $A\times B=(2,+\infty)$,故选 A.

例 13　已知集合 $A=\left\{y\,\middle|\, y=x^2-\frac{3}{2}x+1,x\in\left[\frac{3}{4},2\right]\right\}$,$B=\{x\mid x+m^2\geqslant 1\}$,$p$: $x\in A$,q:$x\in B$,并且 p 是 q 的充分条件,求实数 m 的取值范围.

解析:由题意,得集合 $A=\left[\frac{7}{16},2\right]$,$B=[1-m^2,+\infty)$.

由于 p 是 q 的充分条件,

所以 $A\subseteq B$,

所以$1-m^2\leqslant\frac{7}{16}$,

解得 $m\geqslant\frac{3}{4}$ 或 $m\leqslant-\frac{3}{4}$,

即实数 m 的取值范围是$\left(-\infty,-\frac{3}{4}\right]\cup\left[\frac{3}{4},+\infty\right)$.

点拨:本题主要考查集合的关系及充分条件的判断,运用集合之间的关系建立不等式是解题的关键.

模拟训练

A 组

1. 设集合 $A=\{0,1,2,3\}$, $B=\{0,2,4,6\}$, 则 $A\cap B=$(　　).

A. $\{0\}$　　B. $\{2\}$

C. $\{0,2\}$　　D. $\{0,1,2,3,4,6\}$

2. 设集合 $A=\{x|x<2\}$, $B=\{x|x>3\}$, 则 $A\cap B=$(　　).

A. $\{x|2<x<3\}$　　B. $\{x|x<2\}$

C. $\{x|x>3\}$　　D. $\varnothing$

3. 设集合 $A=\{x|-1<x\leqslant 4\}$, 集合 $B=\{x|-2\leqslant x<3\}$, 则 $A\cap B=$(　　).

A. $(-1,3)$　　B. $[-2,4]$

C. $(-1,4]$　　D. $[-2,3)$

4. 设集合 $A=\{x|x^2-5x+6=0\}$, $B=\{x||x-1|=2\}$, 则 $A\cup B=$(　　).

A. $\{2,3\}$　　B. $\{-1,3\}$

C. $\{2\}$　　D. $\{-1,2,3\}$

5. 设集合 $A=\{(x,y)|2x-y=0\}$, 集合 $B=\{(x,y)|x+2y=5\}$, 则 $A\cap B=$(　　).

A. $(1,2)$　　B. $\{(2,1)\}$

C. $\{(1,2)\}$　　D. $(2,1)$

6. 下列关系式中正确的是(　　).

A. $\{0\}=\varnothing$　　B. $(1,2)\in\{(x,y)|x+2y=3\}$

C. $-3\in\{x|x^2=9\}$　　D. $\{2\}\subseteq\{0,3\}$

7. 下列各组对象中, 能组成集合的是(　　).

A. 非常接近 0 的数　　B. 优秀的学生

C. 2022 年某班的三好学生　　D. 优雅的女士

8. 满足条件 $\{1,2\}\cup A=\{1,2,3\}$ 的所有集合 A 的个数是(　　).

A. 1　　B. 3

C. 4　　D. 8

9. "$x>-1$"是"$x>2$"的(　　).

A. 充分条件　　B. 必要条件

C. 充要条件　　D. 不确定

10. 已知集合 $A=\{1,a-1\}$, 集合 $B=\{a^2-7,1\}$, 且 $A=B$, 则 $a=$(　　).

A. 1　　B. -2

C. 3　　D. -2 或 3

B 组

1. 设集合 $A=\{1,2\}$，$B=\{2,4,5\}$，则以下各项正确的是(　　).

A. $A\cap B=\{1,4\}$　　B. $A\cup B=\{2,5,4\}$

C. $\{1\}\in A$　　D. $1\in A$

2. 已知集合 $A=\{x\in \mathbf{Z}\,|\,|x|<3\}$，$B=\{-2,0,1\}$，则 $A\cap B=$(　　).

A. $\{0,1\}$　　B. $\{-1,0,1\}$

C. $\{-2,0,1\}$　　D. $\{-1,0,1,2\}$

3. 集合 $A=\{a,e\}$，$B=\{a,e,d,c\}$，$C=\{e,f\}$，则 $(A\cap B)\cup C=$(　　).

A. $\{a,e\}$　　B. $\{a,e,d,f\}$

C. $\{a,e,d,c\}$　　D. $\{a,e,f\}$

4. 已知 $M=\{(x,y)\,|\,x+y=5\}$，$N=\{(x,y)\,|\,x-y=7\}$，则 $M\cap N=$(　　).

A. $x=1,y=6$　　B. $(-1,6)$

C. $\{6,-1\}$　　D. $\{(6,-1)\}$

5. 设全集 $U=\{1,2,3,4,5\}$，$A=\{1,2\}$，$B=\{5\}$，则 $(\complement_U A)\cup B=$(　　).

A. $\{5\}$　　B. $\{3,4,5\}$

C. $\{3,4\}$　　D. $\{1,2,5\}$

6. 设集合 $A=\{x\,|\,-1\leqslant x\leqslant 2\}$，集合 $B=\{x\,|\,x\leqslant a\}$，若 $A\cap B=\varnothing$，则实数 a 的取值集合为(　　).

A. $\{a\,|\,a<2\}$　　B. $\{a\,|\,a\geqslant -1\}$

C. $\{a\,|\,a<-1\}$　　D. $\{a\,|\,-1\leqslant a\leqslant 2\}$

7. 若集合 $A=\{-1,1\}$，$B=\{x\,|\,mx=1\}$，且 $A\cup B=A$，则 m 的值为(　　).

A. 1　　B. -1

C. 1 或 -1　　D. 1，-1 或 0

8. 已知三个集合 U,A,B 之间的关系如图 1-4 所示，则 $(\complement_U B)\cap A=$(　　).

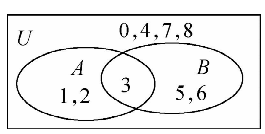


图 1-4

A. $\{3\}$　　B. $\{0,1,2,4,7,8\}$

C. $\{1,2\}$　　D. $\{1,2,3\}$

9. 在 $\triangle ABC$ 中，“$\sin A=\frac{1}{2}$”是“$A=30°$”的(　　).

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

10. 设 $a,b,c\in \mathbf{R}$，则“$ac=b^2$”是“a,b,c 成等比数列”的(　　).

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

第二章　不　等　式

考情分析

不等式属于必考考点之一,一般考解不等式的概率较大,其次是不等式的性质,作差比较数与式的大小考的概率较小.

知识结构

- 不等式
  - 不等式及其基本性质
    - 数、式的比较
    - 不等式的基本性质
  - 区间
    - 有限区间
    - 无限区间
  - 一元一次不等式(组)
    - 概念
    - 基本解法
  - 一元二次不等式
    - 概念
    - 基本解法
  - 含绝对值的不等式
    - 几何意义
    - 基本解法

要点归纳

一、不等式及其基本性质

1. 作差比较法(比较数或代数式的大小)

作差(原版照抄要比较的数或式,中间用“减号”连接)

↓

整理(进行计算,目标是能比较大小)+比较(标准是“0”)

↓

下结论(把与 0 比较的不等号代替作差的减号)

2. 不等式的定义

表示不等关系的式子叫作不等式,满足不等式的未知数的取值的集合叫作不等式的解集.

3. 不等式的基本性质

(1)对称性：$a>b \Leftrightarrow b<a$.

(2)传递性：$a>b, b>c \Rightarrow a>c$.

(3)加法性质：$a>b \Leftrightarrow a+c>b+c$.

推论：$a>b, c>d \Rightarrow a+c>b+d$.（同向不等式可加性）

推论：$a>b, c<d \Rightarrow a-c>b-d$.（异向不等式可减性）

(4)乘法性质：$a>b, c>0 \Rightarrow ac>bc$；$a>b, c<0 \Rightarrow ac<bc$.

推论：$a>b>0, c>d>0 \Rightarrow ac>bd$.

推论：$a>b, ab>0 \Rightarrow \dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$.

小贴士

观察可知：只有一个变号，记住两边同乘负数才变号.

二、区间

1. 有限区间

设 $a, b \in \mathbf{R}$，且 $a<b$，则：

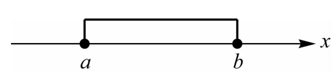
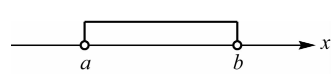
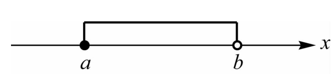
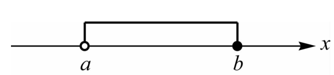
(1)满足不等式 $a \leqslant x \leqslant b$ 的实数 x 的集合叫作闭区间，表示为 $[a, b]$.

(2)满足不等式 $a<x<b$ 的实数 x 的集合叫作开区间，表示为 (a, b).

(3)满足不等式 $a \leqslant x<b$ 或 $a<x \leqslant b$ 的实数 x 的集合叫作半开半闭区间，分别表示为 $[a, b)$ 和 $(a, b]$.

在数轴上，这些区间都可以用一条以 a 和 b 为端点的线段来表示，用实心点表示包括区间端点在内的端点，用空心圆圈表示不包括区间端点在内的端点，见表 2-1.

表 2-1

集　合	名　称	符　号	数轴表示
$\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$	闭区间	$[a, b]$	
$\{x \mid a<x<b\}$	开区间	(a, b)	
$\{x \mid a \leqslant x<b\}$	左闭右开区间	$[a, b)$	
$\{x \mid a<x \leqslant b\}$	左开右闭区间	$(a, b]$	

2. 无限区间

集合 $\{x \mid x>2\}$ 表示的区间的左端点为 2，不存在右端点，表示右端点任意大，记作 $(2, +\infty)$，其中符号

“$+\infty$”读作“正无穷大”；类似地，集合$\{x|x<2\}$表示的区间用$(-\infty,2)$表示，其中符号“$-\infty$”读作“负无穷大”. 设$a,b\in\mathbf{R}$，则：

(1)集合$\{x|x<b\}\Leftrightarrow$区间$(-\infty,b)$.

(2)集合$\{x|x\leqslant b\}\Leftrightarrow$区间$(-\infty,b]$.

(3)集合$\{x|x>a\}\Leftrightarrow$区间$(a,+\infty)$.

(4)集合$\{x|x\geqslant a\}\Leftrightarrow$区间$[a,+\infty)$.

(5)集合$\mathbf{R}\Leftrightarrow$区间$(-\infty,+\infty)$.

三、一元一次不等式(组)

1. 一元一次不等式

只含有一个未知数，并且未知数的次数是1，系数不等于0的整式不等式，叫作一元一次不等式. $ax<b$或$ax>b$或$ax\leqslant b$或$ax\geqslant b(a\neq 0)$叫作一元一次不等式的标准形式.

2. 解一元一次不等式

具体步骤为：去分母—去括号—移项—合并同类项—系数化为1.

3. 解一元一次不等式组

一般地，几个一元一次不等式的解集的交集叫作由它们所组成的一元一次不等式组的解集.

解一元一次不等式组的一般步骤如下：

(1)求出这个不等式组中各个不等式的解集.

(2)利用数轴求出这些不等式的解集的交集，即可求出这个不等式组的解集.

小贴士

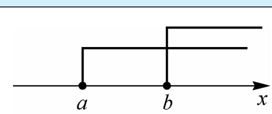
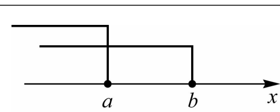
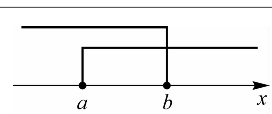
(1)利用数轴表示不等式的解集时，要注意表示数的点的位置上是空心圆圈，还是实心圆点.

(2)若不等式组中各个不等式的解集没有公共部分，则这个不等式组无解.

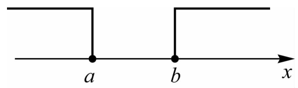
4. 由两个一元一次不等式组成的不等式组的解集的情况

由两个一元一次不等式组成的不等式组的解集的情况见表2-2.

表 2-2

不等式组$(a<b)$	图　示	解　集	口　诀
$\begin{cases}x\geqslant a\\x\geqslant b\end{cases}$		$x\geqslant b$	同大取大
$\begin{cases}x\leqslant a\\x\leqslant b\end{cases}$		$x\leqslant a$	同小取小
$\begin{cases}x\geqslant a\\x\leqslant b\end{cases}$		$a\leqslant x\leqslant b$	大小、小大中间找

续表

不等式组（$a<b$）	图　示	解　集	口　诀
$\begin{cases} x\leqslant a \\ x\geqslant b \end{cases}$		空集	小小、大大找不到

四、一元二次不等式

1. 一元二次不等式的定义

只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是 2 的整式不等式，叫作一元二次不等式. 例如，$x^2-5x<0$.

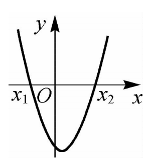
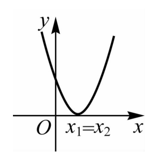
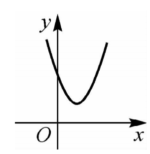
任意的一元二次不等式总可以化为一般形式：$ax^2+bx+c>0$ 或 $ax^2+bx+c<0(a>0)$.

2. 一般一元二次不等式的解法

一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$ 或 $ax^2+bx+c<0(a>0)$ 的解集可以联系二次函数 $y=ax^2+bx+c(a>0)$ 的图像，图像在 x 轴上方部分对应的横坐标 x 值的集合为不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集，图像在 x 轴下方部分对应的横坐标 x 值的集合为不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集.

若一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a>0)$ 的两根为 x_1,x_2，且 $x_1\leqslant x_2$，$\Delta=b^2-4ac$，则相应的不等式的解集的各种情况见表 2-3.

表 2-3

$\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
二次函数 $y=ax^2+bx+c(a>0)$ 的图像			
$ax^2+bx+c=0(a>0)$ 的根	有两个相异实根 $x_1,x_2(x_1<x_2)$	有两个相等实根 $x_1,x_2=-\dfrac{b}{2a}$	无实根
$ax^2+bx+c>0(a>0)$ 的解集	$\{x\mid x<x_1$ 或 $x>x_2\}$	$\left\{x\,\middle\vert\, x\neq-\dfrac{b}{2a}\right\}$	$\mathbf{R}$
$ax^2+bx+c<0(a>0)$ 的解集	$\{x\mid x_1<x<x_2\}$	$\varnothing$	$\varnothing$

3. 解一元二次不等式

(1)看二次项系数是不是正数，若为负数，则将二次项系数化为正数.

(2)写出相应的方程 $ax^2+bx+c=0(a>0)$，计算判别式 Δ.

①当 $\Delta>0$ 时，求出两根 x_1,x_2，且 $x_1<x_2$(注意灵活运用因式分解法和配方法).

②当 $\Delta=0$ 时，两根 $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$.

③当 $\Delta<0$ 时，方程无解.

(3)根据不等式，写出解集.

小贴士

特别地，考试题型为选择题时，可以通过观察选项判断出类型，结合特殊值代入法，找到正确选项.

五、含绝对值的不等式

1. 绝对值的定义

(1)代数意义：一个数的绝对值是非负数，即 $|a|=\begin{cases}a, a\geqslant 0,\\ -a, a<0.\end{cases}$

(2)几何意义：一个数的绝对值 $|a|$ 表示这个数 a 在数轴上对应的点到原点的距离.

2. 含绝对值不等式的解法

解含绝对值不等式的关键在于去掉绝对值符号，而去掉绝对值符号的常用方法有以下几种：

(1)根据绝对值的定义：$|a|=\begin{cases}a, a\geqslant 0,\\ -a, a<0.\end{cases}$

(2)零点分段讨论法：通常用于解含有两个或两个以上的绝对值符号的不等式.

(3)利用不等式的性质：$|x|<a(a>0)\Leftrightarrow -a<x<a$；$|x|>a(a>0)\Leftrightarrow x<-a$ 或 $x>a$.

(4)两边平方法：$|f(x)|<a(a>0)\Leftrightarrow f^2(x)<a^2$；$|f(x)|>a(a>0)\Leftrightarrow f^2(x)>a^2$.

(5)形如 $|ax+b|<c$ 或 $|ax+b|>c(c>0)$ 的不等式可以通过把 $ax+b$ 看作一个整体的方法求解，即 $|ax+b|<c\Leftrightarrow -c<ax+b<c$；$|ax+b|>c\Leftrightarrow ax+b<-c$ 或 $ax+b>c$.

真题链接

1. (2022 年真题) 不等式 $\frac{1-x}{3}-x<3-\frac{x+2}{4}$ 的解集是(　　).

A. $(-\infty,-2]$　　B. $[-2,+\infty)$

C. $(-\infty,-2)$　　D. $(-2,+\infty)$

答案：D

解析：原不等式可化为 $\frac{1-4x}{3}<\frac{10-x}{4}$，解得 $x>-2$，故选 D.

2. (2020 年真题)不等式 $5x\leqslant 6-x$ 的解集为(　　).

A. $(-\infty,1)$　　B. $(-\infty,1]$

C. $(1,+\infty)$　　D. $[1,+\infty)$

答案：B

解析：移项得 $6x\leqslant 6$，解得 $x\leqslant 1$，故选 B.

3.（2019 年真题）不等式 $(x+1)(x-2)<0$ 的解集是（　　）.

A. $\varnothing$　　B. $\mathbf{R}$

C. $(-1,2)$　　D. $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$

答案：C

解析：解不等式 $(x+1)(x-2)<0$，得 $-1<x<2$，故选 C.

典型例析

例 1　下列叙述中正确的是（　　）.

A. 若 $2x<-4$，则 $x>-2$　　B. 若 $a<b$，则 $ac^2>bc^2$

C. 若 $a>b$，$b>c$，则 $a>c$　　D. 若 $x<7$，则 $x-7>0$

答案：C

解析：由不等式的传递性，知 C 正确. 不等式的性质中，需要变号的只有两边同乘负数，其余都无需改变不等号方向，可知 A，B，D 错误.

例 2　已知 $6<a<10$，$2<b<3$，求 $a+b$，$a-b$，ab，$\frac{a}{b}$ 的取值范围.

解析：根据不等式的同向可加性可知 $8<a+b<13$；

根据不等式的同向可乘性可知 $12<ab<30$.

因为 $2<b<3$，

所以 $-3<-b<-2$.

又因为 $6<a<10$，

所以 $6-3<a-b<10-2$，即 $3<a-b<8$.

又因为 $\frac{1}{3}<\frac{1}{b}<\frac{1}{2}$，

所以 $\frac{6}{3}<\frac{a}{b}<\frac{10}{2}$，即 $2<\frac{a}{b}<5$.

点拨：利用不等式的性质求取值范围一定要熟练掌握不等式的性质，特别是同向可加性和同向可乘性.

例 3　设全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=(-1,3]$，$B=(0,4)$，求 $A\cap B$，$A\cup B$，$\complement_U A$，$\complement_U B$.

解析：如图 2-1 所示，在数轴上作出集合 A 与 B，观察它们所属区域，即可求得.

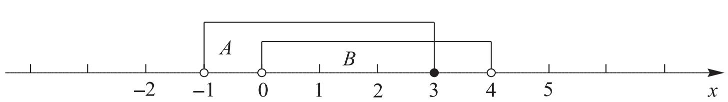


图 2-1

$A\cap B=(0,3]$，

$A\cup B=(-1,4)$，

$\complement_U A=(-\infty,-1]\cup(3,+\infty)$，

$\complement_U B=(-\infty,0]\cup[4,+\infty)$.

点拨: 本题主要考查对区间表示连续实数的集合的理解. 注意数形结合的数学思想,善于利用数轴来直观地表示集合的交、并、补运算.

例 4　不等式$\dfrac{2x+1}{3}+1<x-1$ 的解集是(　　).

A. $(-\infty,1)$　　B. $(1,+\infty)$

C. $(-\infty,7)$　　D. $(7,+\infty)$

答案: D

解析: 按一元一次不等式解题步骤:$2x+1+1\times3<3x-1\times3$,所以$-x<-7\Rightarrow x>7\Rightarrow x\in(7,+\infty)$,故选 D.

例 5　解不等式组:$\begin{cases}x+2\leqslant0,\\x-3<0.\end{cases}$

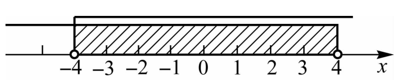
解析: 本题考查一元一次不等式组的解法.

由题意可得$\begin{cases}x\leqslant-2,\\x<3,\end{cases}$ 即 $x\leqslant-2$,

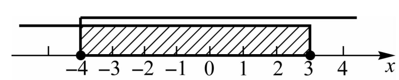
所以不等式组的解集为$\{x\mid x\leqslant-2\}$.

点拨: 掌握不等式组"同小取小"的口诀.

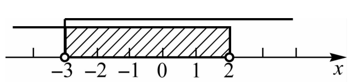
例 6　不等式组$\begin{cases}x+1>-2,\\3-x\geqslant1\end{cases}$ 的解集在数轴上表示为(　　).



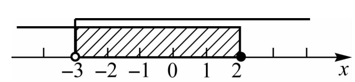
A



B



C



D

答案: D

解析: 根据原不等式组可得$-3<x\leqslant2$. 答案为 D.

点拨: 掌握数形结合的思想.

例 7　不等式$(x-2)(3-x)>0$ 的解集是(　　).

A. $(2,3)$　　B. $(-\infty,2)$

C. $(3,+\infty)$　　D. $(-\infty,2)\cup(3,+\infty)$

答案: A

解析: $(x-2)(3-x)>0$ 不是标准形式,故先化为标准形式$(x-2)(x-3)<0$,看不等号定解集为取中间,故选 A.

例 8　不等式 $x^2+2x+5\leqslant0$ 的解集是(　　).

A. $\mathbf{R}$　　B. $(-1,+\infty)$

C. $(-\infty,-1)$　　D. $\varnothing$

答案: D

解析：当解一元二次不等式选项中有 $\mathbf{R}$（或$(-\infty,+\infty)$），$\varnothing$时，首先考虑算 $\Delta=b^2-4ac$，看是否小于 0，显然此题 $\Delta=b^2-4ac<0$，故不等式 $x^2+2x+5\leqslant 0$ 的解集是$\varnothing$，故选 D.

例 9　不等式$(2x+3)(x+1)\leqslant 0$ 的解集为（　　）.

A. $\left[-\frac{3}{2},-1\right]$　　B. $\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right]\cup(-1,+\infty)$

C. $\left[-\frac{3}{2},-1\right)$　　D. $\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right]\cup[-1,+\infty)$

答案：A

解析：不等式$(2x+3)(x+1)\leqslant 0$ 的解集为$\left[-\frac{3}{2},-1\right]$，因此选 A.

点拨：注意二次项的系数和不等号的方向.

例 10　一元二次不等式$-x^2-5x+6\geqslant 0$ 的解集是（　　）.

A. $[-6,1]$　　B. $(-6,1)$

C. $(-\infty,-6)\cup(1,+\infty)$　　D. $(-\infty,-6]\cup[1,+\infty)$

答案：A

解析：$-x^2-5x+6\geqslant 0$ 变形得 $x^2+5x-6\leqslant 0$，解得$-6\leqslant x\leqslant 1$，所以该一元二次不等式的解集为$[-6,1]$，故选 A.

点拨：掌握十字交叉相乘法或求根公式求解一元二次不等式，注意将二次项系数化为正数.

例 11　不等式$|3-2x|>1$ 的解集是（　　）.

A. $(-1,1)$　　B. $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

C. $(1,2)$　　D. $(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$

答案：D

解析：解绝对值不等式，标准形式下化为解绝对值方程，求两根，看标准形式下的不等号定解集. 由$|2x-3|=1$，得 $2x-3=-1$ 或 $2x-3=1$，即 $x=1$ 或 $x=2$，故不等式$|2x-3|>1$ 的解集为$(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$.

例 12　解不等式组$\begin{cases}|2x+3|\leqslant 5,\\ x^2-3>2x.\end{cases}$

解析：由不等式$|2x+3|\leqslant 5$，

得$-5\leqslant 2x+3\leqslant 5$，

即$-4\leqslant x\leqslant 1$.

由不等式 $x^2-3>2x$，

得 $x^2-2x-3>0\Rightarrow(x+1)(x-3)>0$，

即 $x<-1$ 或 $x>3$.

可列不等式组$\begin{cases}-4\leqslant x\leqslant 1,\\ x<-1 \text{ 或 } x>3,\end{cases}$

所以原不等式组的解集为$[-4,-1)$.

点拨：先分别求绝对值不等式和一元二次不等式的解集，再求两个不等式解集的交集.

模拟训练

A 组

1. 下列数学表达式正确的有(　　).

①$a>b\Rightarrow ac^2>bc^2$;②$a>b\Rightarrow ac>bc$;③$a>b\Rightarrow a-c>b-c$;

④$a>b\Rightarrow a+c>b+c$;⑤$a>b\Rightarrow \frac{a}{c}>\frac{b}{c}(c\neq 0)$.

A. 1 个　　B. 2 个

C. 3 个　　D. 4 个

2. 已知 $a>b$,则下列式子不一定成立的是(　　).

A. $a-2>b-2$　　B. $a^2>b^2$

C. $a^3>b^3$　　D. $2a>2b$

3. 不等式$\frac{x+1}{2}-2<\frac{2x-1}{3}$的解集是(　　).

A. $(-\infty,7)$　　B. $(-\infty,-7)$

C. $(7,+\infty)$　　D. $(-7,+\infty)$

4. 不等式$(x+3)(2-x)\leqslant 0$ 的解集是(　　).

A. $(-\infty,-3)\cup(2,+\infty)$　　B. $(-3,2)$

C. $(-\infty,-3]\cup[2,+\infty)$　　D. $[-3,2]$

5. 不等式 $x-x^2+2\geqslant 0$ 的解集是(　　).

A. $[-1,2]$　　B. $(-\infty,-1]\cup[2,+\infty)$

C. $[-2,1]$　　D. $(-\infty,-2]\cup[1,+\infty)$

6. 不等式组$\begin{cases}x-2\geqslant 0,\\ \frac{x+1}{2}+1>\frac{2x+2}{3}\end{cases}$的解集是(　　).

A. $(-\infty,5)\cup(2,+\infty)$　　B. $(-\infty,2]\cup(5,+\infty)$

C. $[2,5)$　　D. $(2,5)$

7. 不等式 $12x-4x^2\leqslant 9$ 的解集为(　　).

A. $\varnothing$　　B. $(-\infty,+\infty)$

C. $\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)$　　D. $\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$

8. 不等式$|3-2x|\leqslant 5$ 的解集是(　　).

A. $[-1,4]$　　B. $[1,4]$

C. $(-\infty,-1]\cup[4,+\infty)$　　D. $(-\infty,1]\cup[4,+\infty)$

9. 不等式 $x^2-4\leqslant 0$ 的解集是(　　).

A. $(-2,2)$　　B. $[-2,2]$

C. $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$　　D. $(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$

10. 设$-1<a\leqslant 2,0\leqslant b<3$,则 $2a+b$ 的取值范围是(　　).

A. $(-2,7)$　　B. $[-2,7]$

C. $(-2,7]$　　D. $[-2,7)$

B 组

1. 若 $3a-1$ 不小于 $4a-6$，则实数 a 的取值范围是（　　）.

A. $\{a|a>5\}$　　B. $\{a|a\geqslant 5\}$

C. $\{a|a<5\}$　　D. $\{a|a\leqslant 5\}$

2. 已知 $a+b>0$，$b<0$，则 a，b，$-a$，$-b$ 的大小关系是（　　）.

A. $a>b>-b>-a$　　B. $a>-b>-a>b$

C. $a>b>-a>-b$　　D. $a>-b>b>-a$

3. “$x>2$”是“$5x-20>0$”的（　　）.

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. 不等式组 $\begin{cases} 3x-2\leqslant -3, \\ \dfrac{2x-5}{3}\leqslant 2+\dfrac{x+2}{3} \end{cases}$ 的解集为（　　）.

A. $\left\{x\middle|-\dfrac{1}{3}<x\leqslant 13\right\}$　　B. $\left\{x\middle|-\dfrac{1}{3}\leqslant x\leqslant 13\right\}$

C. $\{x|x\leqslant 13\}$　　D. $\left\{x\middle|x\leqslant -\dfrac{1}{3}\right\}$

5. 一元二次不等式 $x^2-x+6\leqslant 0$ 的解集是（　　）.

A. $\mathbf{R}$　　B. $\varnothing$

C. $[-2,3]$　　D. $[-3,2]$

6. “$x>2$”是“$x^2-x-2>0$”的（　　）.

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

7. 不等式 $|1-2x|<3$ 的解集为（　　）.

A. $\{x|x<2\}$　　B. $\{x|x>-1\}$

C. $\{x|-1<x<2\}$　　D. $\{x|-2<x<4\}$

8. 不等式 $|x+5|>3$ 的解集为（　　）.

A. $\{x|-2<x<2\}$　　B. $\{x|-8<x<8\}$

C. $\{x|x<-2$ 或 $x>2\}$　　D. $\{x|x<-8$ 或 $x>-2\}$

9. 不等式 $|3x-4|<2$ 的整数解的个数为（　　）.

A. 0　　B. 1

C. 2　　D. 3

10. 已知一元二次不等式 $x^2+bx+\dfrac{1}{4}\leqslant 0$ 的解集为 $\varnothing$，则实数 b 需满足（　　）.

A. $b<1$　　B. $b>-1$

C. $-1<b<1$　　D. $b>1$ 或 $b<-1$

第三章　函　　数

考情分析

函数属于必考内容，考点包括基础的函数的定义域，求函数值，函数的奇偶性与函数的单调性．考查的知识点也比较多，但是做好复习总结，还是比较容易掌握的．

知识结构

- 函数
  - 函数的概念及表示法
    - 函数的概念
    - 函数的表示方法
  - 函数的性质
    - 函数的单调性
    - 函数的奇偶性
  - 函数的应用

要点归纳

一、函数的概念及表示法

1. 函数的概念

如果在一个变化过程中有两个变量 x，y，并且对于 x 在某个范围内的每一个确定的值，按照某个对应关系，都有唯一确定的 y 值与它对应，那么 y 就是 x 的函数，x 叫作自变量，x 的取值范围叫作函数的定义域，各 x 的值对应的 y 的值叫作函数值，函数值的集合叫作值域（我们称用变量叙述的定义为函数的传统定义）．

函数就是定义在非空数集 A，B 上的映射，此时称数集 A 为定义域，数集 $B=\{f(x)\mid x\in A\}$ 为值域．定义域、对应关系、值域构成了函数的三要素．

2. 函数的表示方法

（1）解析法

如果在函数 $y=f(x)(x\in A)$ 中，$f(x)$ 是用代数式来表达的，这种表示 $f(x)$ 的方法叫作解析法，这个代数式叫作函数的解析表达式，简称解析式．

（2）列表法

通过列出自变量与对应的函数值的表来表达函数关系的方法叫作列表法．

(3)图像法

如果图形 F 是函数 $y=f(x)$ 的图像，则图像上的任一点的坐标 (x,y) 都满足函数的关系式 $y=f(x)$；反之，满足函数关系式 $y=f(x)$ 的点 (x,y) 都在图像 F 上. 这种由图形表示函数的方法叫作图像法.

3. 分段函数

对于自变量 x 的不同取值区间，有着不同的对应关系，这样的函数通常叫作分段函数.

小贴士

(1)分段函数是一个函数，而不是几个函数. 其定义域分段，每段函数的解析式不同，分段函数的定义域是各段定义域的并集.

(2)分段函数求函数值，首先要看 x 的值属于哪一段定义域，横向找到解析式，再代入计算. 例如 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, -1\leqslant x<2, \\ 2^x-1, 2\leqslant x\leqslant 5,\end{cases}$ 则函数的定义域为：$[-1,2)\cup[2,5]=[-1,5]$，$f(0)=0^2+1=1$；$f(3)=2^3-1=7$.

4. 函数的解析式

(1)函数的解析式的概念

如果把两个变量之间的函数关系用一个等式来表示，那么这个数学式子就叫作函数的解析式.

(2)求函数的解析式的常用方法

配凑法：应用配凑法的关键是从解析式的结构入手，把括号里的代数式看作一个整体，把表达式配凑成整体的形式.

换元法：若已知表达式 $f[g(x)]$，则常用换元法求 $f(x)$，换元法的关键是设 $g(x)=t$，用 t 把 x 表示出来，代入 $f[g(x)]$ 的解析式得 $f(t)$，再把 t 换成 x 即可(注意新元的取值范围).

待定系数法：已知函数模型时，常用待定系数法求解析式.

消去法：用消去法求函数解析式，就是将所求解析式作为整体，采用构造方程的方法，通过解方程组得出 $f(x)$ 的表达式.

5. 函数的定义域

(1)函数定义域的含义

如无特别说明，函数的定义域是指使函数的解析式有意义的自变量的取值范围.

(2)函数定义域的求法(已知函数解析式，求定义域)

整式形式的函数，定义域是实数集；分式形式的函数，分母不等于零；偶次根式被开方数非负；x^0 中的底数 x 不等于零.

分段函数的定义域是各段中 x 取值的并集；若 $f(x)$ 是由多个部分的式子构成的，则函数的定义域是使各部分有意义的集合的交集.

小贴士

函数的定义域(高频考点)：分式(分母含有未知数)，定义域是分母不为 0；二次根式(根号内有未知

数)，定义域是被开方式非负；分式与根式结合求定义域，例如函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}}{x-1}$ 的定义域，则是不等式 $x+2\geqslant 0$ 与 $x-1\neq 0$ 解集的交集. 求分段函数的定义域，是各段定义域的并集.

6. 函数的值域

(1)函数值域的含义

函数的值域取决于函数的定义域和对应关系，无论采用什么方法求函数的值域均应考虑其定义域.

(2)求函数值域的常用方法

配方法：求二次函数值域最基本的方法，形如 $F(x)=af^2(x)+bf(x)+c(a\neq 0)$ 的函数的值域问题，均可用配方法.

分离常数法：形如 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}(c\neq 0)$ 的函数的值域为 $\left\{y\,\middle|\,y\neq\dfrac{a}{c}\right\}$.

换元法：运用代数或三角代换，将所给函数转化成容易求值域的另一个函数，从而求得原函数的值域. 形如 $y=ax+b+\sqrt{cx+d}$(a,b,c,d 均为常数)的函数的值域问题，均可用此方法.

(3)常见函数的值域

一次函数 $y=kx+b(k\neq 0)$ 的值域为 $\mathbf{R}$.

二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$，当 $a>0$ 时，值域为 $\left[\dfrac{4ac-b^2}{4a},+\infty\right)$；当 $a<0$ 时，值域为 $\left(-\infty,\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right]$.

反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}(k\neq 0)$ 的值域为 $\{y\in\mathbf{R}\mid y\neq 0\}$.

小贴士

求函数值或函数值域：求函数值只需要把 x 的具体值代入函数解析式中替换 x 的位置，并进行相应的计算即可得到对应的函数值；定义域的形式决定了值域的形式，例如：函数 $f(x)=x^2-1,x\in\{1,2,3\}$，则对应的值域为 $f(1)=1^2-1=0$；$f(2)=2^2-1=3$；$f(3)=3^2-1=8$，故值域为 $f(x)\in\{0,3,8\}$，与定义域对应. 再如：函数 $f(x)=x+1,x\in(0,3]$，则求函数对应的值域时，先求区间端点的函数值，即 $f(0)=0+1=1$；$f(3)=3+1=4$，且定义域不包含左端点，包含右端点，故函数的值域 $f(x)\in(1,4]$，与定义域保持一致.

二、函数的性质

1. 函数的单调性

(1)函数单调性的概念

如果对于定义域内某个区间上的任意两个自变量 x_1,x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，那么函数 $f(x)$ 在此区间上单调递增(增函数)；当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，那么函数 $f(x)$ 在此区间上单调递减

(减函数). 如果函数 $f(x)$ 在某个区间上是增函数或减函数，就说 $f(x)$ 在此区间上具有单调性，这个区间叫作单调区间.

(2)单调函数的图像

增函数的图像从左往右呈上升趋势，减函数的图像从左往右呈下降趋势.

(3)已学过的函数单调性总结

正比例函数：$y=kx$，$k>0$，函数为增函数；$k<0$，函数为减函数；

反比例函数：$y=\frac{k}{x}$，$k>0$，函数在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 上为减函数；$k<0$，函数在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 上为增函数；

一次函数：$y=kx+b$，$k>0$，函数为增函数；$k<0$，函数为减函数；

二次函数：$y=ax^2+bx+c$，$a>0$，函数在 $\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right)$ 上是减函数；在 $\left(-\frac{b}{2a},+\infty\right)$ 上是增函数；$a<0$，函数在 $\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right)$ 上是增函数，在 $\left(-\frac{b}{2a},+\infty\right)$ 上是减函数.

2. 轴对称图形和中心对称图形

一般地，设点 $P(a,b)$ 为平面上任意一点，则点 $P(a,b)$ 关于 x 轴对称的点的坐标为 $(a,-b)$，点 $P(a,b)$ 关于 y 轴对称的点的坐标为 $(-a,b)$，点 $P(a,b)$ 关于原点对称的点的坐标为 $(-a,-b)$.

结论：关于谁，谁不变；关于原点都改变.

对于函数图像，我们有如下的结论：

(1)如果函数图像上任意一点 P 关于原点对称的点 P' 也在函数的图像上，那么，函数图像关于原点对称，原点 O 叫作这个函数图像的对称中心. 此函数图像即为中心对称图形.

(2)如果函数图像上任意一点 P 关于 y 轴对称的点 P' 也在函数的图像上，那么，函数图像关于 y 轴对称，y 轴叫作这个函数图像的对称轴. 此函数图像即为轴对称图形.

3. 函数奇偶性的定义

(1)奇函数：如果对于函数 $f(x)$ 在定义域内的任意一个 x，都有 $f(-x)=-f(x)$，则这个函数叫作奇函数.

(2)偶函数：如果对于函数 $f(x)$ 在定义域内的任意一个 x，都有 $f(-x)=f(x)$，则这个函数叫作偶函数.

(3)如果 $f(x)$ 是奇函数或偶函数，我们就说 $f(x)$ 具有奇偶性.

4. 奇函数和偶函数的性质

(1)若 $f(x)$ 是奇函数，则 $f(x)$ 的图像关于原点对称；若 $f(x)$ 是偶函数，则 $f(x)$ 的图像关于 y 轴对称.

(2)若 $f(x)$ 是奇函数且在 $x=0$ 处有定义，则 $f(0)=0$.

(3)奇函数在其对称的单调区间上具有相同的单调性，偶函数在其对称的单调区间上具有相反的单调性.

5. 奇偶函数的判定

(1)检查函数的定义域是否关于原点对称. 若定义域不关于原点对称，则一定是非奇非偶函数；若定义域关于原点对称，再考察函数值的关系.

(2)判断函数奇偶性的方法.

①定义法：若 $f(-x)=-f(x)$ 或 $f(-x)+f(x)=0$，则 $f(x)$ 为奇函数；若 $f(-x)=f(x)$ 或 $f(-x)-$

$f(x)=0$,则 $f(x)$为偶函数.

②图像法:若 $f(x)$是奇函数,则 $f(x)$的图像关于原点对称;若 $f(x)$是偶函数,则 $f(x)$的图像关于 y 轴对称.

6. 函数图像的对称性

(1)$y=f(-x)$与 $y=f(x)$的图像关于y 轴对称.

(2)$y=-f(x)$与 $y=f(x)$的图像关于x 轴对称.

(3)$y=-f(-x)$与 $y=f(x)$的图像关于原点对称.

(4)若函数 $f(x)(x\in\mathbf{R})$满足 $f(a+x)=f(b-x)$,则函数 $f(x)$图像的对称轴方程是$x=\frac{a+b}{2}$.

(5)若函数 $f(x)(x\in\mathbf{R})$满足 $f(x-a)=f(b-x)$,则函数 $f(x)$图像的对称轴方程是$x=\frac{b-a}{2}$.

7. 学习过的函数奇偶性总结

正比例函数:$y=kx$ 是奇函数;反比例函数:$y=\frac{k}{x}$是奇函数;

一次函数:$y=kx+b(b\neq0)$是非奇非偶函数;

二次函数:$y=ax^2+c$ 是偶函数;

组合函数的奇偶性判断口诀:

奇±奇=奇,例如:$y=x$ 和 $y=\sin x$ 都是奇函数,则 $y=x+\sin x$ 是奇函数;偶±偶=偶,例如:$y=x^2$ 与 $y=\cos x$ 都是偶函数,则 $y=x^2+\cos x$ 是偶函数;奇±常数=非奇非偶,例如一次函数($b\neq0$);偶±常数=偶,例如:$y=\cos x-1$ 是偶函数;奇+偶=非奇非偶,例如:$y=x^2+x$ 是非奇非偶函数;奇×奇=偶;偶×偶=偶;奇×偶=奇.

小贴士

(1)函数的奇偶性:定义域关于原点对称是前提.

(2)从图像看:关于 y 轴对称的函数是偶函数;关于原点对称的函数是奇函数.

三、函数的应用

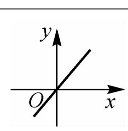
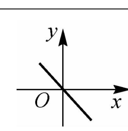
1. 正比例函数

(1)正比例函数的表达式

$$y=kx(k\neq0)$$

(2)正比例函数的图像和性质(表 3-1)

表 3-1

k 的取值	$k>0$	$k<0$
图　像		
经过的象限	第一、三象限	第二、四象限

续表

性　质	(1)奇函数； (2)在$(-\infty,+\infty)$上是增函数	(1)奇函数； (2)在$(-\infty,+\infty)$上是减函数
必经过的点	图像一定经过原点	

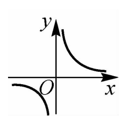
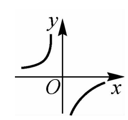
2. 反比例函数

(1)反比例函数的表达式

$$y=\frac{k}{x}(k\neq0)$$

(2)反比例函数的图像和性质(表 3-2)

表 3-2

k 的取值	$k>0$	$k<0$
图　像		
所在的象限	第一、三象限	第二、四象限
性　质	(1)奇函数； (2)在$(-\infty,0)$上是减函数；在$(0,+\infty)$上是减函数	(1)奇函数； (2)在$(-\infty,0)$上是增函数；在$(0,+\infty)$上是增函数

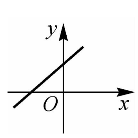
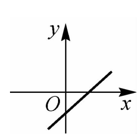
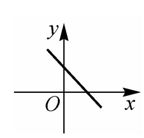
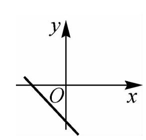
3. 一元一次函数

(1)一元一次函数的表达式

$$y=kx+b(k\neq0)$$

(2)一元一次函数的图像和性质(表 3-3)

表 3-3

图　像				
k,b 的取值	$k>0,b>0$	$k>0,b<0$	$k<0,b>0$	$k<0,b<0$
经过的象限	第一、二、三象限	第一、三、四象限	第一、二、四象限	第二、三、四象限
单调性	在$(-\infty,+\infty)$上是增函数		在$(-\infty,+\infty)$上是减函数	

4. 一元二次函数

(1)一元二次函数的表达式

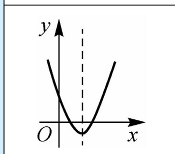
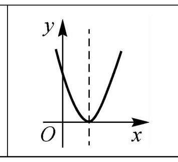
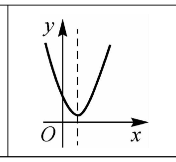
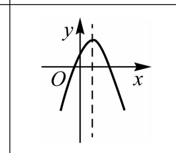
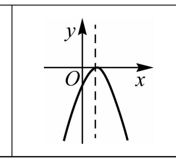
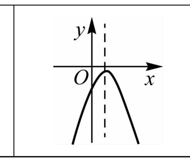
一般式：$y=ax^2+bx+c$(a,b,c 为常数且 $a\neq0$).

顶点式：$y=a(x-h)^2+k(a\neq0)$，顶点是(h,k).

两根式：$y=a(x-x_1)(x-x_2)(a\neq0)$，$x_1,x_2$ 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根.

（2）一元二次函数的图像和性质（表 3-4）

表 3-4

		$y=ax^2+bx+c(a>0)$	$y=ax^2+bx+c(a<0)$
图　像		  	  
性　质	定义域	**R**	**R**
	值　域	$\left[\frac{4ac-b^2}{4a},+\infty\right)$，其中，当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，$y_{\min}=\frac{4ac-b^2}{4a}$	$\left(-\infty,\frac{4ac-b^2}{4a}\right]$，其中，当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，$y_{\max}=\frac{4ac-b^2}{4a}$
	单调性	在 $\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right]$ 上是减函数；在 $\left[-\frac{b}{2a},+\infty\right)$ 上是增函数	在 $\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right]$ 上是增函数；在 $\left[-\frac{b}{2a},+\infty\right)$ 上是减函数
	奇偶性	当 $b=0$ 时，是偶函数；当 $b\neq0$ 时，是非奇非偶函数	

5. 函数的实际应用

（1）应用问题

应用问题是指有实际背景和实际意义的数学问题（常常涉及反映两个变量依存关系的问题）.

（2）数学模型

数学模型是指把实际问题用数学语言抽象概括，再从数学角度来反映或模拟实际问题，它可以是几何图形、方程、解析式等.

（3）解答函数应用题的一般步骤

①审题：理解题意，把握数学本质.

②建模：分析题中的数量关系，建立相应的数学问题，将应用问题转化为数学问题.

③解模：用数学知识与方法解决转化了的数学问题.

④检验：回到应用问题，检验结果的实际意义，给出答案.

真题链接

1.（2022 年真题）下列函数是偶函数的是（　　）.

A. $y=x^6+3x^2$　　　　B. $y=\frac{3}{x}$

C. $y=x^3-4$　　　　D. $y=1+\sin 2x$

答案：A

解析：函数的奇偶性判断，首先搞清楚各种基本函数的奇偶性，然后掌握规律：奇＋奇＝奇；奇＋常数＝非奇非偶；偶＋偶＝偶；偶＋常数＝偶；奇＋偶＝非奇非偶. 可以知道选项 A 属于偶＋偶＝偶；选项 B 是奇函数；选项 C 是奇＋常数＝非奇非偶；选项 D 是常数＋奇＝非奇非偶. 故选 A.

2.(2021 年真题)函数 $y=\sqrt{x-2}$的定义域为(　　).

A. $(2,+\infty)$　　B. $(0,+\infty)$

C. $[2,+\infty)$　　D. $(-\infty,+\infty)$

答案:C

解析:由 $x-2\geqslant 0$ 得 $x\geqslant 2$,故选 C.

3.(2020 年真题)下列函数是奇函数的是(　　).

A. $f(x)=\sin x$　　B. $f(x)=x^2$

C. $f(x)=x^4+1$　　D. $f(x)=\sqrt{x}$

答案:A

解析:选项 A 是奇函数,选项 B 和选项 C 是偶函数,选项 D 是非奇非偶函数.

4.(2019 年真题)已知函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}}{x+1}$,则 $f(2)=$(　　).

A. 1　　B. $\dfrac{2}{3}$

C. $-\dfrac{2}{3}$　　D. -1

答案:B

解析:$f(2)=\dfrac{\sqrt{2+2}}{2+1}=\dfrac{2}{3}$,故选 B.

5.(2019 年真题)下列函数是偶函数的是(　　).

A. $y=\dfrac{1}{x}$　　B. $y=x^2$

C. $y=\sin x$　　D. $y=-\dfrac{1}{3}x$

答案:B

解析:选项 B 是偶函数;选项 A,C,D 均为奇函数.

典型例析

例 1　函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x-2}$的定义域是(　　).

A. $\{x|x\neq 2\}$　　B. $\{x|-3\leqslant x\leqslant 3\}$

C. $\{x|x\geqslant 3$ 或 $x\leqslant -3\}$　　D. $\{x|-3\leqslant x<2$ 或 $2<x\leqslant 3\}$

答案:C

解析:观察解析式,既是分式(分母不为 0),又含根式(被开方数非负),常规方法是解不等式组,但是此题根式的解集是$\{x|x\geqslant 3$ 或 $x\leqslant -3\}$,本身都不含 $x=2$,也就是说直接满足分母不为 0,故选 C.

例 2　下列函数中,奇函数是(　　).

A. $y=\sin x+\cos x$　　B. $y=x+1$

C. $y=\cos x+2$　　D. $y=x+\sin x$

答案:D

解析:判断函数的奇偶性,先掌握基本函数的奇偶性,再结合奇偶性组合的规律"奇+奇=奇""奇+偶=非奇非偶""奇+常数=非奇非偶""偶+常数=偶",故可以判断正确的为 D.

例 3　判断下列函数的增减性.

(1)函数 $y=2x-3$ 在 $\mathbf{R}$ 上是__________函数;

(2)函数 $y=x^2-2x+3$ 的单调递增区间是__________,单调递减区间是__________;

(3)函数 $y=\frac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上是__________函数.

答案:(1)增　(2) $[1,+\infty)$;$(-\infty,1]$　(3)减

解析:在判断一次函数、二次函数、反比例函数、对数函数和指数函数(实际上还包括三角函数)这些初等函数的增减性时,可以先画出所给函数的图像,再进行判断.

点拨:熟记常见函数的单调性对解题有很大的帮助,题中各函数的图像如图 3-1 所示.

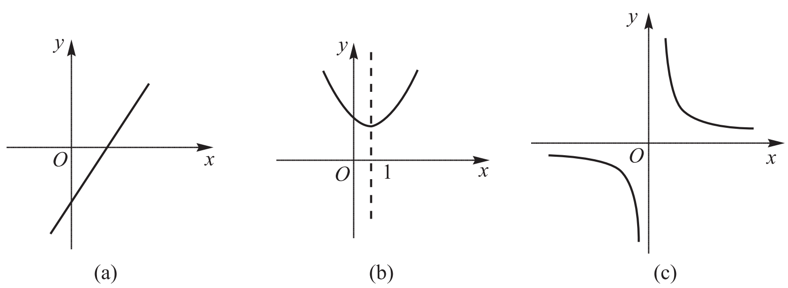


图 3-1

例 4　已知 $f(x)=\begin{cases}x^2, x<0,\\ 2^x, x\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $f(-1)=($　　$)$.

A. 1　　　　B. -1

C. $\frac{1}{2}$　　　　D. 2

答案:A

解析:本题考查分段函数求函数值,首先看自变量 $x=-1$ 属于定义域的哪一部分,可知属于 $x<0$,选择解析式 $f(x)=x^2$,$f(-1)=1$. 故选 A.

例 5　函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 图像的一部分如图 3-2 所示,图像过点 $A(-3,0)$,对称轴方程为 $x=-1$,给出下面四个结论:

①$b^2>4ac$;　② $2a-b=1$;　③$a-b+c=0$;　④ $5a<b$.

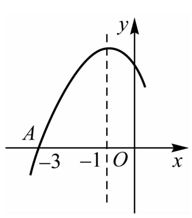


图 3-2

其中正确的是(　　).

A. ②④　　B. ①④

C. ②③　　D. ①③

答案：B

解析：由函数 $f(x)$ 的图像可知 $a<0$，$c>0$，最大值 $\frac{4ac-b^2}{4a}>0$. 因为 $a<0$，所以 $4a<0$，$4ac-b^2<0$，故 $b^2>4ac$，①正确；对称轴方程为 $x=-1$，即 $-\frac{b}{2a}=-1$，故 $2a=b$，②错误；图像在 $x=-1$ 处的函数值大于 0，所以 $a-b+c>0$，③错误；因为 $2a=b$，$a<0$，故 $5a<b$，④正确. 故选 B.

点拨：解决一元二次函数的图像问题有两种方法：(1)排除法，抓住函数的特殊性质或特殊点；(2)讨论函数图像，依据图像特征得到参数间的关系.

例 6　求下列函数的值域.

(1) $y=x^2-4x+3(2\leqslant x\leqslant 3)$；

(2) $y=\frac{3x-5}{2x+1}$.

解析：(1)因为函数在 $[2,3]$ 上单调递增，

所以当 $x=2$ 时，$y_{\min}=-1$；

当 $x=3$ 时，$y_{\max}=0$.

所以函数的值域为 $[-1,0]$.

(2)(分离常数法) $y=\frac{3x-5}{2x+1}=\frac{\frac{3}{2}(2x+1)-\frac{13}{2}}{2x+1}=\frac{3}{2}-\frac{\frac{13}{2}}{2x+1}\neq\frac{3}{2}$，

所以函数的值域为 $\left\{y\,\middle|\,y\in\mathbf{R} \text{ 且 } y\neq\frac{3}{2}\right\}$.

点拨：求函数的值域，应根据解析式的结构特点选择适当的方法，常见的方法有如下几种：

(1)直接观察法：对于一些比较简单的函数，根据函数的定义域、性质，结合函数的解析式来求函数的值域.

(2)配方法：配方法是求二次函数值域最基本的方法之一，即把函数通过配方转化为能直接看出其值域的方法.

(3)换元法：通过简单的换元把一个函数变为简单函数，然后通过求简单函数的值域，间接地求解原函数的值域.

例 7　已知 $f(\sqrt{x}+1)=x+2\sqrt{x}$，求 $f(x)$.

解析：方法一：(换元法)令 $\sqrt{x}+1=t(t\geqslant 1)$，

则 $\sqrt{x}=t-1$，$x=(t-1)^2$，

所以 $f(t)=(t-1)^2+2(t-1)=t^2-1(t\geqslant 1)$，

即 $f(x)=x^2-1(x\geqslant 1)$.

方法二：(配方法)由已知可得 $f(\sqrt{x}+1)=(\sqrt{x}+1)^2-1$，

因为 $x\geqslant 0$，所以$\sqrt{x}+1\geqslant 1$，

所以$f(x)=x^2-1(x\geqslant 1)$.

点拨：用换元法求函数解析式的关键是设 $g(x)=t$，用 t 把 x 表示出来，代入$f[g(x)]$的解析式得 $f(t)$，再把 t 换成 x 即可；用配方法求函数解析式的关键是从解析式的结构入手，把括号里的代数式看作一个整体，把表达式配凑成用整体表示的形式.

例 8　求函数 $y=x^2-5x-6$，$x\in(-\infty,-1]\cup[6,+\infty)$的单调区间.

解析：由题意可知函数 $y=x^2-5x-6$ 图像的对称轴为 $x=\dfrac{5}{2}$，开口向上.

所以其在区间$\left(-\infty,\dfrac{5}{2}\right]$上单调递减，在区间$\left[\dfrac{5}{2},+\infty\right)$上单调递增.

所以函数 $y=x^2-5x-6$，$x\in(-\infty,-1]\cup[6,+\infty)$的单调递增区间为$[6,+\infty)$，单调递减区间为$(-\infty,-1]$.

点拨：结合函数的定义域，判断函数的单调性，确定单调区间.

例 9　判断下列函数的奇偶性.

(1)$f(x)=x(x+1)$；

(2)$f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$；

(3)$f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{|x|}$.

解析：判断函数的奇偶性时，首先判断函数的定义域是否关于坐标原点对称. 若关于坐标原点对称，再判断 $f(-x)$与 $f(x)$的关系，结合奇偶性定义给出结论；若函数的定义域不关于坐标原点对称，则函数一定是非奇非偶函数.

(1)$f(x)$的定义域是 $\mathbf{R}$，关于坐标原点对称.

因为 $f(-x)=-x(-x+1)=x(x-1)\neq f(x)$且 $f(-x)\neq -f(x)$，

所以函数 $f(x)=x(x+1)$是非奇非偶函数.

(2)$f(x)$的定义域是 $\mathbf{R}$，关于坐标原点对称.

因为 $f(-x)=\dfrac{2(-x)}{(-x)^2+1}=-\dfrac{2x}{x^2+1}=-f(x)$，

所以函数 $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$是奇函数.

(3)由$\begin{cases}1-x^2\geqslant 0,\\ x\neq 0,\end{cases}$得$-1\leqslant x\leqslant 1$ 且 $x\neq 0$，

所以函数 $f(x)$的定义域是$[-1,0)\cup(0,1]$，关于坐标原点对称.

又因为 $f(-x)=\dfrac{\sqrt{1-(-x)^2}}{|-x|}=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{|x|}=f(x)$，

所以函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{|x|}$ 是偶函数.

点拨:判断函数 $f(x)$ 是否具有奇偶性的基本步骤如下:

(1)先求出函数 $f(x)$ 的定义域 D,如果对于任意的 $x\in D$ 都有 $-x\in D$(关于坐标原点对称),则可以根据函数奇偶性的定义判断函数的奇偶性;如果存在某个 $x_0\in D$,但是 $-x_0\notin D$,即函数的定义域不关于坐标原点对称,则函数 $f(x)$ 一定是非奇非偶函数.

(2)判断 $f(-x)$ 与 $f(x)$ 的关系:若 $f(-x)=f(x)$,则函数 $f(x)$ 为偶函数;若 $f(-x)=-f(x)$,则函数 $f(x)$ 为奇函数.

当然,对于用图像法表示的函数,可以通过对函数图像对称性的观察来判断函数是否具有奇偶性.

例 10　已知 $y=f(x)$ 是奇函数,且当 $x\geqslant 0$ 时,$f(x)=2x-x^2$,求当 $x<0$ 时,$f(x)$ 的解析式.

解析:当 $x<0$ 时,$-x>0$.

因为当 $x\geqslant 0$ 时,$f(x)=2x-x^2$,

所以 $f(-x)=2(-x)-(-x)^2=-2x-x^2$.

又因为 $f(x)$ 是奇函数,

所以 $f(-x)=-f(x)$.

所以 $f(x)=-f(-x)=-(-2x-x^2)=2x+x^2$,

即 $x<0$ 时,$f(x)=x^2+2x$.

点拨:本题中,$y=f(x)$ 为奇函数,利用奇函数的性质 $f(-x)=-f(x)$ 即可作答.

例 11　已知分段函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, x\leqslant -1,\\ x+2, -1<x<2,\\ 2x, x\geqslant 2.\end{cases}$

(1)求函数 $f(x)$ 的定义域;

(2)计算 $f(3)-f(-2)+f(1)$ 的值,并作出函数 $f(x)$ 的图像.

解析:分段函数的定义域是自变量的各不同取值范围的并集.求分段函数的函数值 $f(x_0)$ 时,应该首先判断 x_0 所属的取值范围,再把 x_0 代入相应的解析式中进行计算.

(1)函数 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,-1]\cup(-1,2)\cup[2,+\infty)=(-\infty,+\infty)$.

(2)因为 $3\in[2,+\infty)$,

所以 $f(3)=2\times 3=6$.

因为 $-2\in(-\infty,-1]$,

所以 $f(-2)=(-2)^2=4$.

因为 $1\in(-1,2)$,

所以 $f(1)=1+2=3$.

综上所述,$f(3)-f(-2)+f(1)=6-4+3=5$.

作出 $f(x)=x^2$ 的图像,取 $x\leqslant -1$ 的部分.

作出 $f(x)=x+2$ 的图像,取 $-1<x<2$ 的部分.

作出 $f(x)=2x$ 的图像,取 $x\geqslant 2$ 的部分.

由此得到函数 $f(x)$ 的图像,如图 3-3 所示.

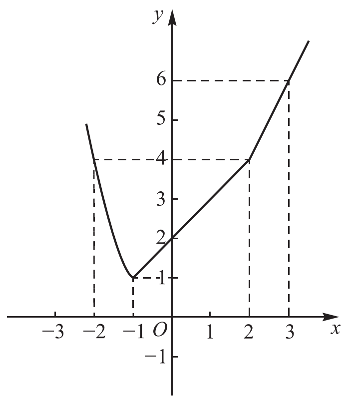


图 3-3

点拨：因为分段函数是一个函数，所以作分段函数的图像时应将不同取值范围内的图像作在同一个平面直角坐标系中.

例 12　已知 $f(x)$是一个一元二次函数且满足下列条件：①$f(x+2)=f(2-x)$，②$f(3)=-2$，③$f(x)$的最大值是 12，求 $f(x)$的解析式.

解析：根据题意可设 $f(x)=a(x-2)^2+12(a\neq 0)$，

因为 $f(3)=-2$，

所以 $a(3-2)^2+12=-2$，

解得$a=-14$. 所以 $f(x)=-14x^2+56x-44$.

点拨：由 $f(x+2)=f(2-x)$可知，函数 $f(x)$的图像关于直线 $x=2$ 对称. 又因为 $f(x)$的最大值是 12，所以可设 $f(x)=a(x-2)^2+12$，最后可以根据 $f(3)=-2$ 求出系数 a 的值.

例 13　若函数 $f(x)=x^2+bx+c$ 对任意的实数 x 都有 $f(1+x)=f(-x)$，则(　　).

A. $f(-2)<f(0)<f(2)$　　B. $f(0)<f(-2)<f(2)$

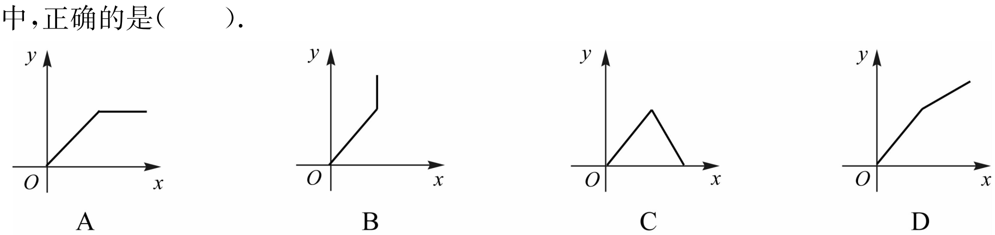
C. $f(2)<f(0)<f(-2)$　　D. $f(0)<f(2)<f(-2)$

答案：D

解析：由题可知，函数 $f(x)$图像的对称轴方程为 $x=\frac{1+x+(-x)}{2}=\frac{1}{2}$. 因为 $a=1>0$，故该函数图像开口向上. 因此，$f(0)<f(2)<f(-2)$. 故选 D.

点拨：本题的解题关键是判断对称轴的位置，掌握函数图像的对称性.

例 14　小明去上学，一开始乘车，然后剩一段路步行，图中横轴表示小明用的时间，纵轴表示所走路程，则下列图形中，正确的是(　　).



答案：D

解析：A 中可以看出后一段时间增加，所走路程未变，不符合题意，排除 A；B 中后一段所走路程增加，时间未变，不符合题意，排除 B；C 中后一段所走路程缩短，不符合题意，排除 C；D 中后一段时间增加，所走路程增加，且增长速度比前一段慢，符合题意，故选 D.

点拨：抓住两个变量间的变化规律与函数的性质、图像相吻合即可.

模拟训练

A 组

1. 函数 $y=\sqrt{1-x}+\sqrt{x}$ 的定义域为（　　）.

A. $\{x|x\leqslant 1\}$　　B. $\{x|x\geqslant 0\}$

C. $\{x|x\geqslant 1$ 或 $x\leqslant 0\}$　　D. $\{x|0\leqslant x\leqslant 1\}$

2. 函数 $f(x)=\sqrt{x^2-x-6}$ 的定义域是（　　）.

A. $(-2,3)$　　B. $(-\infty,-2)\cup(3,+\infty)$

C. $[-2,3]$　　D. $(-\infty,-2]\cup[3,+\infty)$

3. 函数 $f(x)=\log_2\sqrt{2x-1}$ 的定义域是（　　）.

A. $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$　　B. $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$

C. $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$　　D. $\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)$

4. 已知函数 $f(x)=\frac{x^2-2x}{x-1}$，则 $f(-1)=$（　　）.

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$

C. $-\frac{3}{2}$　　D. $\frac{3}{2}$

5. 已知函数 $y=f(x)$ 是奇函数，且 $f(2)=5$，则 $f(-2)=$（　　）.

A. 5　　B. -5

C. 0　　D. 无法确定

6. 下列函数中，既是奇函数又是减函数的是（　　）.

A. $y=\sin x$　　B. $y=x+1$

C. $y=\frac{1}{x}$　　D. $y=-x$

7. 若 $f(x)$ 是偶函数，且当 $x>0$ 时是增函数，则下列结论正确的是（　　）.

A. $f(1)<f(-2)<f(3)$　　B. $f(3)<f(2)<f(1)$

C. $f(-2)<f(-1)<f(-3)$　　D. $f(-1)<f(-3)<f(-2)$

8. 函数 $y=\sin x+x$ 的图像关于（　　）.

A. y 轴对称　　B. 坐标原点

C. 关于直线 $x=0$ 对称　　D. 关于 $y=x$ 对称

9. 下列函数中，偶函数是（　　）.

A. $y=\sin x+\frac{1}{x}$　　B. $y=3x$

C. $y=\cos x$　　D. $y=x+\cos x$

10. 已知 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 范围内是增函数，则下列各式成立的是（　　）.

A. $f(-1)>f\left(-\frac{1}{2}\right)$　　B. $f(1)>f\left(\frac{1}{2}\right)$

C. $f(-1)>f\left(\frac{1}{2}\right)$　　D. $f\left(-\frac{1}{2}\right)>f(1)$

B 组

1. 函数 $f(x)=\frac{1}{x-1}+\sqrt{2+x}$的定义域为(　　).

A. $[-2,+\infty)$　　B. $(-\infty,-2]$

C. $\mathbf{R}$　　D. $[-2,1)\cup(1,+\infty)$

2. 函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-2}}$的定义域是(　　).

A. $\{x\in\mathbf{R}\mid x\neq 2\}$　　B. $\{x\in\mathbf{R}\mid x<2\}$

C. $\{x\in\mathbf{R}\mid x\geqslant 2\}$　　D. $\{x\in\mathbf{R}\mid x>2\}$

3. 函数 $f(x)=\begin{cases}x-1, x>0,\\ 0, x=0,\\ x+1, x<0,\end{cases}$ 则 $f\left(\frac{1}{2}\right)$的值是(　　).

A. $\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{1}{2}$

C. $\frac{3}{2}$　　D. $-\frac{3}{2}$

4. 下列函数在$(0,+\infty)$上为增函数的是(　　).

A. $y=-2x+1$　　B. $y=\frac{1}{x}$

C. $y=-x^2$　　D. $y=2x^2$

5. 函数 $y=x^2-x-2$ 的减区间为(　　).

A. $(-1,2)$　　B. $\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$

C. $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$　　D. $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$

6. 下列函数为偶函数的是(　　).

A. $y=3x+2$　　B. $y=x^2-1$

C. $y=x^2-2x+1$　　D. $y=\frac{1}{x}$

7. 已知 $f(x)$,$g(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数,$f(x)$是奇函数,$g(x)$是偶函数,则(　　).

A. $f(x)\cdot g(x)$是偶函数　　B. $f(x)\cdot g(x)$是奇函数

C. $f(x)+g(x)$是偶函数　　D. $f(x)+g(x)$是奇函数

8. 函数 $y=x^3+x$ 的图像关于__________对称.(　　).

A. y 轴　　B. x 轴

C. 原点　　D. 直线 $y=x$

9. 函数 $f(x)=4x^2-mx+5$ 在区间$[-2,+\infty)$上是增函数,在区间$(-\infty,-2)$上是减函数,则 $f(1)=$(　　).

A. -7　　B. 1

C. 17　　D. 25

10. 已知 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,当 $x>0$ 时,$f(x)=x^2+2x$,则$f(-1)=$(　　).

A. 3　　B. 1

C. -1　　D. -3