第7章 数　列

知识脉络

- 数　列
  - 数列的概念
  - 等差数列
    - 等差数列的概念
    - 等差数列前n项和公式
  - 等比数列
    - 等比数列的概念
    - 等比数列前n项和公式
  - 等差数列与等比数列的应用

7.1 数列的概念

学习目标

1. 了解数列的概念.
2. 理解数列的通项公式.

知识梳理

1. 数列的概念:按照一定的次序排成一列的数称为__________.

2. 数列的项:数列中的每一个数称为数列的__________.

3. 首项、项数:数列的一般形式可以写作 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots(n\in\mathbf{N}^*)$,记作__________,其中 a_1 称为数列的__________,a_n 称为数列的第 n 项,n 称为__________.

4. 有穷数列、无穷数列:项数有限的数列称为__________,项数无限的数列称为__________,所有项均为同一个数的数列称为__________.

5. 一般地,当一个数列的第 n 项 a_n 与项数 n 之间的关系可以用一个式子来表示时,这个式子就称为这个数列的__________.

(答案在本节末尾)

典型例题

例 1 设数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\dfrac{n}{n+1}$,写出数列 $\{a_n\}$ 的前 5 项.

解 $a_1=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$;$a_2=\dfrac{2}{2+1}=\dfrac{2}{3}$;$a_3=\dfrac{3}{3+1}=\dfrac{3}{4}$;$a_4=\dfrac{4}{4+1}=\dfrac{4}{5}$;$a_5=\dfrac{5}{5+1}=\dfrac{5}{6}$.

点拨 分别用 1,2,3,4,5 代换通项公式中的 n,再进行计算.

例 2 观察下列数列的前 4 项,总结规律并写出该数列的一个通项公式.

(1)2,4,6,8,…;

(2)−1,2,−3,4,…;

(3)2,2,2,2,…;

(4)$1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{4},\cdots$.

解 (1)观察可知数列的前 4 项都是偶数,且是项数 n 的 2 倍,故数列的一个通项公式为 $a_n=2n$.

(2)观察可知数列的前4项的绝对值是项数 n,且奇数项为负数,偶数项为正数,故数列的一个通项公式为 $a_n=(-1)^n\cdot n$.

(3)观察可知数列的前4项都是2,为常数列,$a_n=2$.

(4)观察可知数列的前4项是项数 n 的倒数,故数列的一个通项公式为 $a_n=\frac{1}{n}$.

点拨 先分析各数列中已知项的数字特征的共性,通过观察、类比、猜想等写出通项.

例3 设数列$\{a_n\}$的通项公式是 $a_n=3n+2$,判断17是不是该数列的项,如果是,请指出是第几项.

解 把17代入通项公式 $a_n=3n+2$ 中,得 $17=3n+2$,解得 $n=5$.因此17是数列$\{a_n\}$中的项,是第5项.

点拨 若给出的数是数列中的项,则解出的项数是正整数.

巩固练习

基础巩固

一、选择题

1.已知数列$\{a_n\}$的通项公式 $a_n=3n-7$,则它的首项为 ( )

A. -7　　B. -4　　C. -1　　D. 2

2.数列$-2,1,4,7,\cdots$的一个通项公式为 ( )

A. $a_n=n-3$　　B. $a_n=3n-5$

C. $a_n=n+3$　　D. $a_n=3(n-2)$

3.在数列$\{a_n\}$中,若 $a_n=(-1)^{n+1}n$,则 $a_{10}=$ ( )

A. 9　　B. -9　　C. 10　　D. -10

4.若数列$\{a_n\}$的通项公式 $a_n=n(n+1)$,则它的第4项是 ( )

A. 12　　B. 20　　C. 21　　D. 30

5.在数列$\{a_n\}$中,若 $a_n=n(n-1)$,则下列选项中,是数列$\{a_n\}$的项的是 ( )

A. 55　　B. 56　　C. 57　　D. 58

6.数列$1,-1,1,-1,\cdots$的一个通项公式是 ( )

A. $a_n=(-1)^n$　　B. $a_n=(-1)^{n+2}$

C. $a_n=(-1)^{n+4}$　　D. $a_n=(-1)^{n+1}$

二、填空题

7.1,2,3,4,5与5,4,3,2,1构成的数列________(是或不是)同一个数列;构成的集合________(是或不是)同一个集合.

8.数列$-1,-3,-5,-7,\cdots$的一个通项公式是 $a_n=$________.

9.若数列$\{a_n\}$的通项公式 $a_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$,则 $a_4+a_5=$________.

10. 若数列$\{a_n\}$的通项公式 $a_n=2n+3$,则 $a_{n+1}=$____________.

三、解答题

11. 已知数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=\dfrac{(n-1)^3}{2}$,求数列的前 4 项.

12. 已知数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=n^2+n-1$,判断 11 是不是数列中的项. 如果是,请指出是第几项.

能力提升

1. 在数列$\{a_n\}$中,已知 $a_2=125$,$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{5}$,则 $a_4=$ ( )

A. 1　　B. 5　　C. 25　　D. 625

2. 已知在数列$\{a_n\}$中,$a_1=2$,且 $a_{n+1}=a_n+2$. 请写出该数列的前 4 项,并写出数列$\{a_n\}$的一个通项公式.

3. 已知在数列$\{a_n\}$中,$a_1=2$,且 $a_{n+1}=2a_n$. 请写出数列的前 4 项,并写出数列$\{a_n\}$的一个通项公式.

知识梳理答案

1. 数列　2. 项　3. $\{a_n\}$　首项　项数　4. 有穷数列　无穷数列　常数列　5. 通项公式

7.2　等差数列

7.2.1　等差数列的概念

学习目标

1. 了解等差数列的概念.
2. 掌握等差数列的通项公式.

知识梳理

1. 等差数列的概念：一般地，当一个数列从第二项开始，每一项与它前一项的差都等于同一个常数时，就称这个数列为____________；这个常数称为等差数列的____________，常用字母____________来表示.

2. 等差数列的通项公式：若数列$\{a_n\}$是首项为a_1、公差为d的等差数列，则它的通项公式为____________.

3. 等差中项：一般地，当三个数a，A，b成等差数列时，A称为a和b的____________，即____________.

(答案在本节末尾)

典型例题

例1　在等差数列$\{a_n\}$中，已知$a_4=8$，$a_{10}=20$，试求公差d及a_{20}.

解　因为$a_4=8$，$a_{10}=20$，所以由$a_n=a_1+(n-1)d$，可得$a_1+3d=8$，$a_1+9d=20$，解得$a_1=2$，$d=2$. 所以$a_{20}=a_1+(20-1)d=40$.

点拨　根据已知条件，可以利用等差数列的通项公式列出方程组求出首项和公差，然后再求解.

例2　已知三个数成等差数列，其和为15，平方和为83，求这三个数.

解　设这三个数依次是$a-d$，a，$a+d$，根据题意得

$$\begin{cases}a-d+a+a+d=15,\\(a-d)^2+a^2+(a+d)^2=83,\end{cases}\text{解得}\begin{cases}a=5,\\d=\pm 2.\end{cases}$$

因此这三个数分别为 3，5，7 或 7，5，3.

点拨　一般地，若三个数成等差数列，可依次设为 $a-d, a, a+d$. 若四个数成等差数列，可设这四个数为 $a-3d, a-d, a+d, a+3d$.

巩固练习

基础巩固

一、选择题

1. 数列 0，2，4，6，…的通项公式是 $a_n=$ （　　）

A. $2n$　　B. $2n+2$　　C. $2n-2$　　D. $2n+1$

2. 在等差数列$\{a_n\}$中，$a_1=2, d=3$，则它的第 5 项是 （　　）

A. 10　　B. 15　　C. 14　　D. 17

3. 若数列$\{a_n\}$的通项公式是 $a_n=4n-1$，则此数列是 （　　）

A. 公差为-1 的等差数列　　B. 公差为 4 的等差数列

C. 首项为-1 的等差数列　　D. 首项为 4 的等差数列

4. 下列选项中，不是等差数列通项公式的是 （　　）

A. $a_n=3n+5$　　B. $a_n=(-1)^n n$

C. $a_n=2$　　D. $a_n=-2n+3$

二、填空题

5. 在等差数列$\{a_n\}$中，

(1)若 $a_3=2, d=3$，则 $a_1=$____________；

(2)若 $a_8=12, d=-2$，则 $a_{10}=$____________；

(3)若 $a_3=-2, a_{10}=19$，则 $d=$____________；

(4)若 $a_1=5, d=5, a_n=25$，则 $n=$____________.

6. 数列 1，4，7，10，…的通项公式是 $a_n=$____________.

7. 4 和 8 的等差中项是____________.

三、解答题

8. 在等差数列$\{a_n\}$中，$a_6=-8, a_{10}=12$，求公差 d 和 a_{20}.

9. 判断 83 是否为等差数列 $-1,3,7,11,\cdots$ 中的项，如果是，请指出是第几项.

能力提升

1. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_2=3$，$a_5=14$，则 $a_3+a_4=$ （　　）

A. 17　　B. 15　　C. 10　　D. 7

2. 在 -4 和 12 之间插入三个数使这五个数成等差数列，则这三个数分别是________.

3. 小明、小明的爸爸和小明的爷爷三人的年龄恰好构成一个等差数列，他们三人的年龄之和为 120 岁，爷爷的年龄比小明的年龄的 4 倍还多 5 岁，求他们祖孙三人的年龄.

知识梳理答案

1. 等差数列　公差　d　2. $a_n=a_1+(n-1)d$　3. 等差中项　$A=\frac{a+b}{2}$

7.2.2　等差数列前 n 项和公式

学习目标

1. 了解等差数列前 n 项和公式的推导过程.
2. 掌握等差数列的前 n 项和公式.

知识梳理

1. 数列的前 n 项和：将数列 $\{a_n\}$ 从第 1 项起到第 n 项为止的各项之和，称为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，记作 S_n，即 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$.

2. 等差数列的前 n 项和公式：

(1)已知 a_1 和 a_n，则 $S_n=$____________________；

(2)已知 a_1 和 d，则 $S_n=$____________________.

（答案在本节末尾）

典型例题

例1 在等差数列$\{a_n\}$中，

(1)$a_1=1, a_{20}=20$，求 S_{20}；

(2)$a_1=2, d=-2$，求 S_{20}.

解 (1)由已知条件可知，应选择公式 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$. 因为 $a_1=1, a_{20}=20, n=20$，所以

$S_{20}=\dfrac{n(a_1+a_{20})}{2}=\dfrac{20\times(1+20)}{2}=210$.

(2)由已知条件可知，应选择公式 $S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d$. 因为 $a_1=2, d=-2, n=20$，所以

$S_{20}=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d=20\times2+\dfrac{20\times(20-1)}{2}\times(-2)=-340$.

例2 等差数列$\{a_n\}$中，$a_3+a_7-a_{10}=-10, a_4+a_{11}=10$，求 S_{13}.

解 由已知得方程组

$$\begin{cases}(a_1+2d)+(a_1+6d)-(a_1+9d)=-10,\\(a_1+3d)+(a_1+10d)=10,\end{cases}$$

解得 $a_1=-8, d=2$，

因此 $S_{13}=13\times(-8)+\dfrac{1}{2}\times13\times12\times2=52$.

点拨 等差数列的基本计算问题，往往可以利用通项公式及求和公式列出含有已知量与未知量的方程或方程组，然后再解. 在解方程或方程组的过程中，注意使用相应的方法与技巧，如方程两边分别相除，整体代入等.

巩固练习

基础巩固

一、选择题

1. 若数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 $S_n=3+2^n$，则 $a_6=$ （　　）

A. 8　　B. 16　　C. 32　　D. 64

2. 前 n 个正整数的和是 （　　）

A. $\dfrac{n(n+1)}{2}$　　B. $n(n+1)$　　C. $\dfrac{n(n-1)}{2}$　　D. n^2

3. 在等差数列$\{a_n\}$中,$S_7=70$,则$a_4=$ ( )

A. 8 B. 9 C. 10 D. 20

4. 在等差数列$\{a_n\}$中,$a_2+a_4=36$,则数列的前5项和为 ( )

A. 108 B. 90 C. 72 D. 24

5. 已知数列$\{a_n\}$为等差数列,且$a_1=1$,$S_{10}=100$,则公差d的值为 ( )

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

二、填空题

6. 在等差数列$\{a_n\}$中,$a_1=2$,$a_6=8$,则$S_6=$__________.

7. 在等差数列$\{a_n\}$中,$a_3=2$,$a_5=8$,则$S_7=$__________.

8. 在等差数列$\{a_n\}$中,$a_1=-3$,$d=2$,则$S_{10}=$__________.

9. 已知数列$\{a_n\}$中,$a_1=3$且$a_{n+1}=a_n+2$,则$S_8=$__________.

三、解答题

10. 已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,若$S_7=49$,$S_{15}=225$,求S_{20}.

能 力 提 升

1. 已知数列$\{a_n\}$为等差数列,且$3a_4+a_8=36$,则$\{a_n\}$的前9项的和$S_9=$ ( )

A. 9 B. 17 C. 36 D. 81

2. 已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=n^2(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2)证明:数列$\{a_n\}$是等差数列.

知识梳理答案

2. (1)$\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$ (2)$na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d$

7.3 等比数列

7.3.1 等比数列的概念

学习目标

1. 了解等比数列的概念.
2. 掌握等比数列的通项公式.

知识梳理

1. 等比数列的概念：一般地，当一个数列$\{a_n\}$从第二项开始，每一项与它前一项的比都等于同一个非零常数时，就称这个数列为__________；这个常数称为等比数列的__________，常用字母__________来表示.

2. 等比数列的通项公式：若数列$\{a_n\}$是首项为a_1、公比为q的等比数列，则它的通项公式为__________.

3. 等比中项：一般地，当三个数a,G,b成等比数列时，称G为a和b的__________，即__________.

（答案在本节末尾）

典型例题

例1 已知在等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=2,q=-1$，求a_n及a_{10}.

解 $a_n=a_1q^{n-1}=(-1)^{n-1}\cdot 2,a_{10}=(-1)^9\times 2=-2$.

点拨 等比数列的通项公式为$a_n=a_1q^{n-1}$，代入即可求解.

例2 在1和16之间插入三个数，使这五个数成等比数列，求插入的这三个数.

解 设这五个数的公比为q，则$q^4=\dfrac{16}{1}$，解得$q=\pm 2$.因此，插入的三个数分别为2，4，8或$-2,4,-8$.

例3 已知三个数成等比数列，且它们的积是8，公比是2，求这三个数.

解 设这三个数分别为$\dfrac{a}{2},a,2a$，则$a^3=8$，解得$a=2$，于是三个数分别为1，2，4.

点拨 一般地,若三个数成等比数列,可依次设为$\frac{a}{q}$,a,aq,其中 q 为公比.

例 4 已知在等比数列$\{a_n\}$中,$a_2=4$,$a_4=16$,求 a_6.

解 因为 $a_2\cdot a_6=a_4^2$,所以 $a_6=\frac{a_4^2}{a_2}=64$.

点拨 根据等比中项的性质可求.

巩固练习

基 础 巩 固

一、选择题

1. 若数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=3\cdot 2^n$,则该数列是 ( )

A. 公差为 3 的等差数列　　B. 公差为 2 的等差数列

C. 公比为 3 的等比数列　　D. 公比为 2 的等比数列

2. 若等比数列$\{a_n\}$的前 3 项是-1,2,-4,则 $a_7=$ ( )

A. 32　　B. -32　　C. 64　　D. -64

3. 在等比数列$\{a_n\}$中,$a_2=4$,$a_5=9$,则它的第 8 项是 ( )

A. 36　　B. 6　　C. $\frac{81}{4}$　　D. $\frac{4}{81}$

4. “$b^2=ac$”是“a,b,c 成等比数列”的 ( )

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

5. 在等比数列$\{a_n\}$中,若 $a_1=1$,$a_3=\frac{1}{9}$,则 $a_2=$ ( )

A. 3 或-3　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $-\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{3}$或$-\frac{1}{3}$

二、填空题

6. 在等比数列$\{a_n\}$中,$a_1=-2$,$q=3$,则 $a_3=$____________.

7. 在等比数列$\{a_n\}$中,$a_4=-3$,$q=-1$,则 $a_{10}=$____________.

8. 在等比数列$\{a_n\}$中,$a_1=-1$,$a_4=-27$,则 $q=$____________.

9. 若 1,$x+1$,9 成等比数列,则 $x=$____________.

三、解答题

10. 已知在等比数列$\{a_n\}$中,$a_1=2$,$q=-3$,求 a_n 及 a_3.

11. 已知数列$\{a_n\}$为等比数列，其中$a_3=2$，$a_2+a_4=\frac{20}{3}$，求$\{a_n\}$的通项公式.

能 力 提 升

1. 在等比数列$\{a_n\}$中，$a_5\cdot a_{14}=5$，则$a_8\cdot a_9\cdot a_{10}\cdot a_{11}=$ （　　）

A. 10　　B. 25　　C. 50　　D. 75

2. 有四个数，其中前三个数成等比数列，其积为216，后三个数成等差数列，其和为36，求这四个数.

知识梳理答案

1. 等比数列　公比　q　2. $a_n=a_1q^{n-1}$　3. 等比中项　$G^2=ab$

7.3.2　等比数列前 n 项和公式

学习目标

1. 了解等比数列前n项和公式的推导过程.
2. 掌握等比数列的前n项和公式.

知识梳理

等比数列的前n项和公式：

(1)当$q=1$时，$S_n=$____________；

(2)当$q\neq1$时，$S_n=$____________$=$____________.

（答案在本节末尾）

典型例题

例 1　已知在等比数列$\{a_n\}$中,$a_1=6$,$a_4=-\frac{3}{4}$,$S_n=\frac{129}{32}$,求项数 n.

解　因为 $a_1=6$,$a_4=-\frac{3}{4}$,所以 $6q^{4-1}=-\frac{3}{4}$,解得 $q=-\frac{1}{2}$.

又$\frac{6\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{129}{32}$,

即$\left(-\frac{1}{2}\right)^n=-\frac{1}{128}=\left(-\frac{1}{2}\right)^7$,

因此 $n=7$.

点拨　先求出公比 q,然后利用等比数列的前 n 项和公式来进行讨论.

例 2　求等比数列$\frac{1}{2}$,$\frac{1}{4}$,$\frac{1}{8}$,…的前 n 项和公式,并求出数列的前 8 项和.

解　因为 $a_1=\frac{1}{2}$,$q=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\neq 1$,所以等比数列前 n 项和公式为

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{\frac{1}{2}\times\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

所以 $S_8=1-\left(\frac{1}{2}\right)^8=\frac{255}{256}$.

点拨　在求等比数列的前 n 项和时,一定要先判断公比 q 是否为 1.

巩固练习

基 础 巩 固

一、选择题

1. 数列-2,-2,-2,…的前 10 项和为　(　　)

A. -2　　B. 0　　C. -18　　D. -20

2. 在等比数列$\{a_n\}$中,若 $a_1=1$,$q=2$,则该数列的前 9 项和为　(　　)

A. 512　　B. 511　　C. 256　　D. 255

3. 若在等比数列$\{a_n\}$中,$q=4$,$S_3=21$,则该数列的通项公式为 $a_n=$　(　　)

A. 4^{n-1}　　B. 4^n　　C. 3^n　　D. 3^{n-1}

4. 设 S_n 为等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和，若 $2a_2+a_3=0$，则$\dfrac{S_5}{S_2}=$ （　　）

A. 11　　B. 5　　C. -8　　D. -11

二、填空题

5. 若在等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=\dfrac{1}{2}$，$q=2$，则 $S_5=$__________.

6. 若数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n$（$n\in\mathbf{N}^*$），则 $a_5=$__________，前 8 项和 $S_8=$__________.

7. 若在等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，$S_3=6$，则 $q=$__________.

三、解答题

8. 已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 $S_n=2^{n+1}-2$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)证明：数列$\{a_n\}$是等比数列.

9. 已知在等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_n=32$，$S_n=63$，求 q 和 n.

能 力 提 升

1. 等比数列$\{a_n\}$中，$a_1-a_5=-\dfrac{15}{2}$，$S_4=-5$，则 $a_4=$__________.

2. 设$\{a_n\}$是公比大于 1 的等比数列，S_n 为数列$\{a_n\}$的前 n 项和. 已知 $S_3=7$，且 $3a_2$ 是 $3+a_1$ 与$4+a_3$ 的等差中项. 求数列$\{a_n\}$的通项公式.

知识梳理答案

(1)na_1　(2)$\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$　$\dfrac{a_1-a_nq}{1-q}$

7.4　等差数列与等比数列的应用

学习目标

初步掌握从实际情境中抽象出等差数列和等比数列模型解决简单实际问题的方法.

知识梳理

等差数列和等比数列在实际生活中有广泛的应用，有很多实际问题可以转化为数列问题，然后运用数列的知识解决问题.

应用数列知识解决问题的基本步骤：

(1)审题——要读懂题意，弄清楚各量之间的关系；

(2)建模——把实际问题的数值转化为数列中的各数值，分清是等差数列还是等比数列，同时弄清是求哪个量；

(3)求解——求出实际问题的解；

(4)还原——把所求结果还原到实际问题中.

典型例题

例 1　某男子擅长走路，9 天共走了 1 260 里，其中第 1 天、第 4 天、第 7 天所走的路程之和为 390 里. 若从第 2 天起，每天比前一天多走的路程相同，问该男子第 5 天走了多少里？这是我国古代数学专著《九章算术》中的一个问题，请尝试解决.

解　因为从第 2 天起，每天比前一天多走的路程相同，所以该男子这 9 天中每天走的路程数构成等差数列，设该数列为 $\{a_n\}$，第 1 天走的路程数为首项 a_1，公差为 d，则 $S_9=1\ 260$，$a_1+a_4+a_7=390$.

因为 $S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d$，$a_n=a_1+(n-1)d$，

所以 $9a_1+\dfrac{9\times(9-1)}{2}d=1\ 260$，$a_1+a_1+3d+a_1+6d=390$，

解得 $\begin{cases}a_1=100,\\d=10,\end{cases}$

则 $a_5=a_1+4d=100+4\times10=140$.

所以该男子第5天走了140里.

点拨 本题考查等差数列的概念、通项公式及前n项和公式.

例2 某职业学校的王亮同学到一家贸易公司实习，恰逢该公司要通过海运出口一批货物，王亮同学随公司负责人到保险公司洽谈货物运输期间的投保事宜，保险公司提供了缴纳保险费的两种方案：

①一次性缴纳50万元，可享受9折优惠；

②按照航行天数缴纳：第一天缴纳0.5元，从第二天起每天缴纳的金额都是其前一天的2倍，共需缴纳20天.

请通过计算，帮助王亮同学判断哪种方案缴纳的保费较低.

解 若按方案①缴纳，需缴纳$50\times0.9=45$(万元).

若按方案②缴纳，则每天的缴纳额组成等比数列，其中$a_1=\frac{1}{2}$，$q=2$，$n=20$，

所以共需缴纳$S_{20}=\dfrac{\frac{1}{2}(1-2^{20})}{1-2}=2^{19}-\frac{1}{2}=524\ 288-\frac{1}{2}\approx52.4$(万元)，

所以方案①缴纳的保费较低.

点拨 本题考查等比数列的概念及前n项和公式.

例3 某城市2018年底人口总数为50万，绿化面积为35万平方米.假定今后每年人口总数比上一年增加1.5万，每年新增绿化面积是上一年年底绿化面积的5%，并且每年均损失0.1万平方米的绿化面积(不考虑其他因素).

(1)求到哪一年年底，该城市人口总数达到60万(精确到1年)？

(2)假如在人口总数达到60万并保持平稳、不增不减的情况下，到哪一年年底，该城市人均绿化面积达到0.9平方米(精确到1年)？

解 (1)由题意知，自2018年起，每年人口总数构成等差数列$\{a_n\}$，

其中首项$a_1=50$，公差$d=1.5$，

通项公式为$a_n=a_1+(n-1)d=50+(n-1)\times1.5$.

设第n项$a_n=60$，即$50+(n-1)\times1.5=60$，

解得$n\approx7.7$.

因为$n\in\mathbf{N}^*$，所以$n=8$，$2018+8-1=2025$.

答：到2025年底，该城市人口总数达到60万.

(2)由题意知，自2018年起，每年的绿化面积构成数列$\{b_n\}$，

其中b_1是2018年底的绿化面积，$b_1=35$，

b_2是2019年底的绿化面积，$b_2=35(1+5\%)-0.1=35\times1.05-0.1$，

b_3是2020年底的绿化面积，

$b_3=(35\times1.05-0.1)(1+5\%)-0.1=35\times1.05^2-0.1\times1.05-0.1$，

以此类推，则 b_k 是$(2018+k-1)$年年底的绿化面积，

$$b_k=35\times1.05^{k-1}-0.1\times1.05^{k-2}-0.1\times1.05^{k-3}-\cdots-0.1\times1.05-0.1$$

$$=35\times1.05^{k-1}-\frac{0.1(1-1.05^{k-1})}{1-1.05},$$

又因为 $b_k=60\times0.9$，所以 $35\times1.05^{k-1}-\frac{0.1(1-1.05^{k-1})}{1-1.05}=60\times0.9$，

解得 $k\approx10.3$，

因为 $k\in\mathbf{N}^*$，所以 $k=11$，$2018+11-1=2028$.

答：到 2028 年底，该城市人均绿化面积达到 0.9 平方米.

巩固练习

基础巩固

一、选择题

1. 某工厂总产值月平均增长率为 p，则年平均增长率为　(　　)

A. p　　B. $12p$　　C. $(1+p)^{12}$　　D. $(1+p)^{12}-1$

2. 有一个很神秘的地方，那里有很多的雕塑，每个雕塑都是由蝴蝶组成的. 第一个雕塑有 3 只蝴蝶，第二个雕塑有 5 只蝴蝶，第三个雕塑有 7 只蝴蝶，第四个雕塑有 9 只蝴蝶，以后的雕塑按照这样的规律一直延伸到很远的地方，看不到这排雕塑的尽头在哪里，那么，第 102 个雕塑是由多少只蝴蝶组成的呢？　(　　)

A. 203 只　　B. 205 只　　C. 207 只　　D. 103 只

3. 某种产品计划每年降低成本 $q\%$，若三年后的成本是 a 元，则现在的成本是　(　　)

A. $a^3q\%$　　B. $a\cdot(q\%)^3$　　C. $a(1-q\%)^3$　　D. $\frac{a}{(1-q\%)^3}$

4. 某人在一年 12 个月中，每月 10 日向银行存入 1 000 元，假设银行的月利率为 5‰(按单利计算)，则到第二年的元月 10 日，此项存款一年的利息之和是　(　　)

A. $5(1+2+3+\cdots+12)$元

B. $5(1+2+3+\cdots+11)$元

C. 1 000[1+5‰+(5‰)^2+…+(5‰)^{11}]元

D. 1 000[1+5‰+(5‰)^2+…+(5‰)^{12}]元

5. 某企业 2020 年 12 月份产值是这年 1 月份产值的 p 倍，则该企业 2020 年度的产值月平均的增长率为　(　　)

A. $\sqrt[12]{p}$　　B. $\sqrt[12]{p}-1$　　C. $\sqrt[11]{p}-1$　　D. $\sqrt[11]{p}$

二、填空题

6. 小王每月除去所有日常开支，大约结余 a 元. 小王决定采用零存整取的方式把余钱积蓄

起来，每月初存入银行 a 元，存期1年(存12次)，到期取出本金和利息. 假设一年期零存整取的月利率为 r，每期存款按单利计息. 那么，当小王存款到期时，利息应为____________元.

7. 有这样一首诗："有个学生资性好，一部《孟子》三日了，每日添增一倍多，问君每日读多少？"(注:《孟子》全书共34 685字，"一倍多"指一倍)，由此诗知该君第二日读了____________字.

三、解答题

8. 某银行设立了教育助学贷款，其中规定一年期以上贷款月均等额还本付息(利息按月以复利计算). 如果贷款10 000元，两年还清，月利率为0.457 5%，那么每月应还多少钱呢？

9. 用分期付款购买价格为25万元的住房一套，如果购买时先付5万元，以后每年付2万元加上欠款利息. 签订购房合同后1年付款一次，再过1年又付款一次，直到还完后为止，商定年利率为10%，则第5年该付多少元？购房款全部付清后实际共付多少元？

能 力 提 升

1. 某商场今年销售计算机5 000台，如果平均每年的销售量比上一年的销售量增加10%，那么从今年起，大约多少年可以使总销售量达到30 000台？(结果保留到个位)(参考数据：$\lg 1.1 \approx 0.041$，$\lg 1.6 \approx 0.204$)　　(　　)

A. 3年　　B. 4年　　C. 5年　　D. 6年

2. 自祖国大陆允许台湾农民到大陆创业以来，在11个省区设立了海峡两岸农业合作试验区和台湾农民创业园，台湾农民在那里申办个体工商户可以享受"绿色通道"的申请、受理、审批一站式服务. 某台商到大陆一创业园投资72万美元建起一座蔬菜加工厂，第一年各种经费12万美元，以后每年增加4万美元，每年销售蔬菜收入50万美元，设 $f(n)$ 表示前 n 年的纯收入. 求从第几年开始获取纯利润？($f(n)$=前 n 年的总收入－前 n 年的总支出－投资额)

第 7 章测试题

一、选择题(本大题共 10 小题,每小题 4 分,共 40 分)

1. 在数列$\{a_n\}$中,$a_1=4$,$a_{n+1}-a_n=2(n\in\mathbf{N}^*)$,则 $a_6=$　(　　)

A. 12　B. 14　C. 16　D. 18

2. 在等比数列$\{a_n\}$中,$a_2=4$,$a_3=2$,则该数列的前 4 项和 $S_4=$　(　　)

A. 7　B. 12　C. 13　D. 15

3. 在等比数列$\{a_n\}$中,$a_1=1$,$a_4=\frac{1}{8}$,则该数列的公比 $q=$　(　　)

A. $\frac{1}{4}$　B. $\frac{1}{2}$　C. 2　D. 4

4. 在等差数列$\{a_n\}$中,$a_2=3$,$a_7=13$,则该数列的前 8 项和 $S_8=$　(　　)

A. 128　B. 92　C. 80　D. 64

5. 在等比数列$\{a_n\}$中,$a_1=2$,$q=2$,若 $a_n=64$,则 $n=$　(　　)

A. 5　B. 6　C. 7　D. 8

6. 在等差数列$\{a_n\}$中,已知通项公式 $a_n=3n-2$,则 $S_{20}=$　(　　)

A. 390　B. 590　C. 780　D. 295

7. 在等差数列$\{a_n\}$中,$S_{15}=90$,则 $a_8=$　(　　)

A. 3　B. 4　C. 6　D. 12

8. 已知等差数列$\{a_n\}$的前三项为 $a-1$,$a+1$,$2a+3$,则此数列的通项公式为　(　　)

A. $a_n=2n-5$　B. $a_n=2n+1$　C. $a_n=2n-3$　D. $a_n=2n-1$

9. 在等差数列$\{a_n\}$中,公差 $d=\frac{1}{2}$,$S_{100}=145$,则 $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{99}$的值为　(　　)

A. 57　B. 58　C. 59　D. 60

10. 某变速箱的第 1 个到第 9 个齿轮的齿数成等差数列,其中第 1 个齿轮的齿数是 25,第 9 个齿轮的齿数是 57,则第 5 个齿轮的齿数是　(　　)

A. 41　B. 42　C. 43　D. 45

二、填空题(本大题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分)

11. 在等差数列$\{a_n\}$中,$a_3=1$,$a_6=4$,则 $a_9=$____________.

12. 在等比数列$\{a_n\}$中,$a_3=8$,$a_5=16$,则 $a_9=$____________.

13. 已知数列$\{a_n\}$是等差数列,a_1,a_2,a_5 构成公比不为 1 的等比数列,且 $a_9=4$,则公差 $d=$____________.

14. 等差数列$\{a_n\}$的前 9 项和为 72,则 $a_2+a_4+a_9=$____________.

15.若数列$\{a_n\}$是公差不为0的等差数列，$\ln a_1$，$\ln a_2$，$\ln a_5$成等差数列，则$\frac{a_2}{a_1}$的值为__________.

16.已知一个正方形的边长为1 cm，以它的对角线为边作一个新的正方形，再以新的正方形的对角线为边作正方形，这样继续下去，共作了6个正方形，那么第六个正方形(包括已知正方形)的边长是__________，这6个正方形的面积和是__________.

三、解答题(本大题共4小题，每小题9分，共36分)

17.已知在等差数列$\{a_n\}$中，$a_3=4$，$a_7=16$，求a_1与S_7.

18.已知三个数成等差数列，且它们的和是12，积是48，求这三个数.

19.已知在等比数列$\{a_n\}$中，$a_2=\frac{1}{4}$，$a_5=\frac{1}{32}$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)若数列$\{b_n\}$满足$b_n=a_n+n$，求$\{b_n\}$的前n项和S_n.

20.某软件公司新开发一款学习软件，该软件把学科知识设计为由易到难共12关的闯关游戏.为了激发学习者的闯关热情，每闯过一关都奖励若干慧币(一种网络虚拟币).该软件提供了三种奖励方案:第一种，每闯过一关奖励40慧币；第二种，闯过第一关奖励4慧币，以后每一关比前一关多奖励4慧币；第三种，闯过第一关奖励0.5慧币，以后每一关比前一关奖励翻一番(即增加1倍).游戏规定:闯关者需要在闯关前任选一种奖励方案.

(1)设闯过n($n\in\mathbf{N}^*$，且$n\leqslant 12$)关后三种奖励方案获得的慧币数依次为A_n，B_n，C_n，试求出A_n，B_n，C_n的表达式；

(2)如果你能闯过10关，你会选择哪种奖励方案？