考前冲刺卷(一)

第Ⅰ卷

一、单项选择题(本大题共 5 道小题,每小题 3 分,共 15 分.每小题只有一个选项符合题目要求)

1. 函数 $f(x)=\sqrt{2^x-1}+\frac{1}{x-1}$的定义域是(　　).

A. $[0,1)$　　B. $(1,+\infty)$

C. $[0,1)\cup(1,+\infty)$　　D. $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$

2. 当 $x\to0$ 时,$\sec x-1$ 与 x^2 比较是(　　).

A. 高阶无穷小　　B. 低阶无穷小

C. 同阶无穷小　　D. 等价无穷小

3. 函数 $f(x)=\int_2^x \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ 在$(-\infty,+\infty)$内(　　).

A. 单调递减,曲线为凹的　　B. 单调递减,曲线为凸的

C. 单调递增,曲线为凹的　　D. 单调递增,曲线为凸的

4. 过 y 轴与点$(1,-2,3)$的平面方程是(　　).

A. $x-y-z=0$　　B. $3y+2z=0$

C. $2x+y=0$　　D. $3x-z=0$

5. 方程 $y''-6y'+5y=0$ 的通解为 $y=$(　　).

A. $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{5x}$　　B. $y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{-5x}$

C. $y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{5x}$　　D. $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-5x}$

第Ⅱ卷

二、填空题(本大题共 5 道小题,每小题 3 分,共 15 分)

6. 若函数 $f(x)=\begin{cases}3x+a, & x\geqslant1,\\ x+1, & x<1\end{cases}$在点 $x=1$ 处连续,则常数 $a=$________.

7. 设 $y=x^n+\mathrm{e}^{2x-1}$,则 $y^{(n)}=$______________.

8. 空间曲面 $x^2+2y^2+3z^3=6$ 在点$(1,1,1)$处的切平面方程为______________.

9. 已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2-u_n)$ 收敛,则$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=$________.

10. 微分方程 $\cos y\mathrm{d}y=\sin x\mathrm{d}x$ 的通解为______________.

三、计算题(本大题共 7 道小题,每小题 6 分,共 42 分)

11. 求极限 $\lim\limits_{x\to0^+}\sin x\cdot\ln x$.

12. 求过点 $M(3,1,-2)$且与两平面 $x-y+z-7=0$,$4x-3y+z-6=0$ 都平行的直线方程.

13. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x, & x<0,\\ 1+\sin x, & x\geqslant0,\end{cases}$计算定积分$\int_{\frac{1}{2}}^{2}f(1-x)\mathrm{d}x$.

14. 计算 $\int\left(\frac{x^3}{1+x^2}+\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\right)\mathrm{d}x$.

15. 设曲线 $y=f(x)$ 与 $y=\sin x$ 在点 $(0,0)$ 处的切线重合，写出切线方程，并计算 $\lim\limits_{n\to\infty}nf\left(\frac{2}{n}\right)$.

16. 已知 $f(x)=x^3+ax^2+bx$ 在 $x=1$ 处取得极值 -2，求 a,b 及曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

17. 求二重积分 $\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，区域 D 为 $2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$.

四、应用题(本大题共 2 道小题，每小题 7 分，共 14 分)

18. 求曲线 $y=\sqrt{x}$ 与直线 $x=1,x=4,y=0$ 所围成的图形的面积和该图形绕 y 轴旋转产生的旋转体的体积.

19. 已知定义在区间$[0,+\infty)$上的非负可导函数$f(x)$满足$f^2(x)=\int_0^x \frac{1+f^2(t)}{1+t^2}dt(x\geqslant 0)$.

(1)判断函数$f(x)$是否存在极值,并说明理由;

(2)求$f(x)$.

五、证明题(本大题共2道小题,第20题6分,第21题8分,共14分)

20. 设x_n是$x^n+nx-1=0$在$(0,1)$内的根,证明:当$a>1$时,级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n^a$收敛.

21. 设函数$f(x)=\ln(1+x)-x+\frac{1}{2}x^2$,证明:

(1)当$x\to 0$时,$f(x)$是比x高阶的无穷小量;

(2)当$x>0$时,$f(x)>0$.

考前冲刺卷(二)

第Ⅰ卷

一、单项选择题(本大题共 5 道小题,每小题 3 分,共 15 分.每小题只有一个选项符合题目要求)

1. 函数 $f(x)=\sqrt{x-3}+\arctan\dfrac{1}{x}$ 的定义域是(　　).

A. $(-\infty,+\infty)$　　B. $[0,3]$

C. $(-\infty,0)\cup(0,3)$　　D. $[3,+\infty)$

2. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1+a)x^4+bx^3+2}{x^3+x^2-1}=-2$,则 a,b 的值分别为(　　).

A. $a=-3,b=0$　　B. $a=-1,b=-2$

C. $a=0,b=-2$　　D. $a=-1,b=0$

3. 若 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)}{x-2}=2$,则 $f'(2)=$(　　).

A. -4　　B. -2

C. 2　　D. 4

4. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\tan\dfrac{\pi}{n^3}$(　　).

A. 绝对收敛　　B. 条件收敛

C. 发散　　D. 敛散性不能确定

5. 设 $\boldsymbol{a}=(2,x,3)$,$\boldsymbol{b}=(4,-2,y)$,且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,则 x,y 的值分别为(　　).

A. 2,7　　B. 7,2

C. -1,2　　D. -2,1

第Ⅱ卷

二、填空题(本大题共 5 道小题,每小题 3 分,共 15 分)

6. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x+e^{2ax}-1}{x}, & x\neq0,\\ a, & x=0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续,则 $a=$________.

7. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\int_{x^2}^{1}e^t\,dt}{x-1}=$________.

8. 曲线 $\begin{cases}x=t^3,\\ y=e^t\end{cases}$ 在点 $t=1$ 处的切线方程是________________.

9. 设函数 $z=f(x+y,y^2)$,f 具有连续偏导数,则全微分 $dz=$________________.

10. 微分方程 $y''-4y'+4y=0$ 的通解为________________.

三、计算题(本大题共 7 道小题,每小题 6 分,共 42 分)

11. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)^x$.

12. 函数 $y=(1+2x)^{\sin x}$,求 y'.

13. 求不定积分 $\int x^2\ln x\,dx$.

14. 设$(x-y)^3+z+\tan z=0$,计算$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}$.

15. 求过点 $P(1,2,3)$且与平面 $3x-2y+z=0$ 平行的平面方程.

16. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-4)^n}{n\cdot 3^n}$ 的收敛区间.

17. 计算定积分$\int_1^2\frac{x}{\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x$.

四、应用题(本大题共 2 道小题,每小题 7 分,共 14 分)

18. 计算$\iint_D\frac{3x}{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 是由 $xy=1$,$y=x$ 及 $x=2$ 围成的闭区域.

19. 函数 $y=2e^{x}+e^{-x}$ 是否有极值？如果有，是极大值还是极小值？

五、证明题(本大题共 2 道小题，第 20 题 6 分，第 21 题 8 分，共 14 分)

20. 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，在区间 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=1$，$f(1)=0$，证明在 $(0,1)$ 内至少存在一点 c，使得 $f'(c)=-\frac{f(c)}{c}$.

21. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的单调递减的可导函数，且 $f(1)=2$，函数 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-x^2-1$.

(1)判别曲线 $y=F(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的凹凸性，并说明理由；

(2)证明：方程 $F(x)=0$ 在区间 $(0,1)$ 内有且仅有一个实根.

考前冲刺卷(三)

第Ⅰ卷

一、单项选择题(本大题共 5 道小题,每小题 3 分,共 15 分. 每小题只有一个选项符合题目要求)

1. 函数 $f(x)=\sqrt{1-\log_3 x}$的定义域是(　　).

A. $(0,3)$　　B. $(0,3]$

C. $(3,+\infty)$　　D. $[3,+\infty)$

2. 极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x}\right)^{2x}=$(　　).

A. e^4　　B. e^{-2}

C. 1　　D. e^2

3. 已知$\int f(x)dx=F(x)+C$,则$\int e^{-x}f(e^{-x})dx=$(　　).

A. $F(x)+C$　　B. $-F(x)+C$

C. $F(e^{-x})+C$　　D. $-F(e^{-x})+C$

4. 设 $f(x)=e^{-x}$,则$\int\dfrac{f'(\ln x)}{x}dx=$(　　).

A. $-\dfrac{1}{x}+C$　　B. $\dfrac{1}{x}$

C. $\dfrac{1}{x}+C$　　D. $\ln x+C$

5. 下列微分方程中,属于一阶可分离变量微分方程的是(　　).

A. $y^2dx+(x+y)dy=0$　　B. $dx+(x^2+y)dy=0$

C. $\dfrac{dy}{dx}=xy^2+x$　　D. $\dfrac{d^2y}{dx^2}=xy$

第Ⅱ卷

二、填空题(本大题共 5 道小题,每小题 3 分,共 15 分)

6. 已知 $\boldsymbol{a}=(1,2,3)$,$\boldsymbol{b}=(0,1,1)$,则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$________.

7. 极限$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}\sin 2x+x\sin\dfrac{1}{x}\right)=$________.

8. 方程 $y^5+2y-x-7x^3=0$ 所确定的曲线 $y=y(x)$在点 $x=0$ 处的切线方程为____________.

9. $u=f\left(xy,\dfrac{xz}{y}\right)$,其中 f 具有一阶连续偏导数,则$\dfrac{\partial u}{\partial y}=$________________.

10. 已知幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-1)^n}{n\cdot 3^n}$,其收敛半径是________;收敛区间是________.

三、计算题(本大题共 7 道小题,每小题 6 分,共 42 分)

11. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x t\tan t\,dt}{\ln(1+x^3)}$.

12. 求 $z=4(x-y)-x^2-y^2$ 的极值,并判定是极大值还是极小值.

13. 求曲面 $x^2+2y^2+3z^2=6$ 的切平面,该切平面与$\begin{cases}x=t,\\y=t^2,\\z=t^3\end{cases}$在 $t=1$ 处的切线垂直.

14. 已知 $f(x-1)=af(x)$，$f'(0)=b$，求 $f'(1)$.

15. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+\cos x}, & -\pi<x<0,\\ xe^{-x^2}, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 计算定积分 $\int_{-2}^{2}f(x)\mathrm{d}x$.

16. 计算 $\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，区域 D 为圆 $x^2+(y-1)^2=1$ 所围成的 y 轴右半部分.

17. 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+\ln n}$ 是否收敛，若收敛，是条件收敛还是绝对收敛？

四、应用题(本大题共 2 道小题，每小题 7 分，共 14 分)

18. 计算 $\iint\limits_D y\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由直线 $y=x$，$y=x-2$ 与 $y=0$，$y=2$ 围成的有界闭区域.

19. 求曲线 $y=2-x^2$ 和直线 $y-2x=2$ 所围成的图形面积.

五、证明题(本大题共 2 道小题,第 20 题 6 分,第 21 题 8 分,共 14 分)

20. 设 $b>a>0$,证明:$\ln\frac{b}{a}>\frac{2(b-a)}{a+b}$.

21. 已知 $f(x)$ 是定义在区间 $[0,+\infty)$ 上的非负可导函数,且曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=0,x=0$ 及 $x=t(t\geqslant 0)$ 围成的图形面积为 $f(t)-t^2$.

(1)求函数 $f(t)$;

(2)证明:当 $x>0$ 时,$f(x)>x^2+\frac{x^3}{3}$.

考前冲刺卷(四)

第Ⅰ卷

一、单项选择题(本大题共5道小题,每小题3分,共15分.每小题只有一个选项符合题目要求)

1. 若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}, & x>0,\\ b, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续,则(　　).

A. $ab=\dfrac{1}{2}$　　B. $ab=-\dfrac{1}{2}$

C. $ab=0$　　D. $ab=2$

2. 函数 $f(x)=\begin{cases}x, & x<0,\\ xe^{x}, & x\geqslant 0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处(　　).

A. 不可导　　B. 不可微

C. 不连续　　D. 连续

3. 设 $y=y(x)$ 是由参数方程 $\begin{cases}x=2t+t^{2},\\ y=\int_{0}^{t}e^{-s^{2}}ds\end{cases}$ 所确定的,则 $\dfrac{dy}{dx}=$(　　).

A. $\dfrac{-e^{-t^{2}}}{2+2t}$　　B. $\dfrac{-t^{2}e^{-t^{2}}}{2+2t}$

C. $\dfrac{-te^{-t^{2}}}{1+t}$　　D. $\dfrac{e^{-t^{2}}}{2+2t}$

4. 已知 $\boldsymbol{a}=(1,x,3)$,$\boldsymbol{b}=(4,5,y)$,且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,则 x,y 的值分别为(　　).

A. $1,-1$　　B. $-1,1$

C. $-2,2$　　D. $2,-2$

5. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$(　　).

A. 收敛　　B. 发散

C. 可能收敛,也可能发散　　D. 条件收敛

第Ⅱ卷

二、填空题(本大题共5道小题,每小题3分,共15分)

6. 若 $f(x)=\sqrt{1-2x}$,则 $d[f(x)]_{x=-4}=$________.

7. 过点 $(1,0,-2)$ 且与平面 $x-4z=3$ 及平面 $3x-y-5z=1$ 的交线平行的直线方程为________.

8. 函数 $f(x)=x^{2}-2x+3$ 在闭区间 $[0,2]$ 上满足罗尔定理的 $\xi=$________.

9. 设函数 $z=\cos(x^{2}-y^{2})$,则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$________.

10. 已知函数 $y=e^{-x}$ 是微分方程 $2y''+ay'-3y=0$ 的一个特解,则 $a=$________.

三、计算题(本大题共7道小题,每小题6分,共42分)

11. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^{2}+4x+1}-x)$.

12. 设方程 $e^{xy}+y^{2}=1+\cos x$ 确定了 $y=y(x)$,求 y'.

13. 计算定积分 $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x$.

14. 求微分方程 $xy'+y-\sin x=0$ 的通解.

15. 已知函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $\mathrm{e}^{x-y}\cdot\sin(x+z)=0$ 所确定,求 $\mathrm{d}z$.

16. 计算二重积分 $I=\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 是由 $xy=1,x=2,y=x$ 所围成的封闭区域.

17. 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}x^n$ 的收敛半径和收敛域.

四、应用题(本大题共 2 道小题,每小题 7 分,共 14 分)

18. 求函数 $f(x,y)=3x^2y+y^3-3x^2-3y^2+2$ 的极值点和极值.

19. 设图形 D 由曲线 $y=x^2+1$ 与其在点 $(1,2)$ 处的切线及 y 轴所围成.

(1)求该图形的面积;

(2)求该图形绕 x 轴旋转一周所生成的旋转体体积.

五、证明题(本大题共 2 道小题,第 20 题 6 分,第 21 题 8 分,共 14 分)

20. 设函数 $f(x)$,$g(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导,证明在(a,b)内至少存在一点 ξ,使 $\dfrac{f(a)-f(\xi)}{g(\xi)-g(b)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

21. (1) $f(x)$在 $[a,b]$ 上连续,证明:对于任意的正整数 λ,至少存在一点 $x_0\in[a,b]$,使 $\int_a^{x_0}f(x)\mathrm{d}x=\lambda\int_{x_0}^{b}f(x)\mathrm{d}x$.

(2)若 $f(x)>0$ 恒成立,证明使(1)中等式成立的 x_0 是唯一的.

考前冲刺卷(五)

第Ⅰ卷

一、单项选择题(本大题共 5 道小题,每小题 3 分,共 15 分. 每小题只有一个选项符合题目要求)

1. 函数 $f(x)=\dfrac{\arccos(x-1)}{\sqrt[3]{x-1}}$ 的定义域是(　　).

A. $[1,2]$　　　　B. $[0,2]$

C. $(0,2)$　　　　D. $[0,1)\cup(1,2]$

2. $\lim\limits_{x\to 0}(1+2\sin x)^{\frac{2}{\sin x}}=$(　　).

A. e　　　　B. e^2

C. e^4　　　　D. 1

3. 已知 $|\boldsymbol{a}|=2$, $|\boldsymbol{b}|=1$, $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\pi}{3}$,则 $|(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})|=$(　　).

A. 1　　　　B. 2

C. 3　　　　D. 4

4. 直线 l: $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z}{5}$ 与平面 π: $6x-4y+10z-1=0$ 的位置关系是(　　).

A. l 在 π 上　　　　B. l 与 π 平行但无公共点

C. l 与 π 相交但不垂直　　　　D. l 与 π 垂直

5. 曲线 $y=\dfrac{1}{x}$, $x=2$ 与 $y=3$ 所围图形的面积是(　　).

A. $5-\ln 6$　　　　B. 0

C. 1　　　　D. $\ln 6$

第Ⅱ卷

二、填空题(本大题共 5 道小题,每小题 3 分,共 15 分)

6. $\int_{-1}^{1}(2\sin x^5+3)\mathrm{d}x=$ ________.

7. 设函数 $f(x)=\begin{cases}3x+2, & x>0,\\ 2a, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续,则常数 $a=$ ________.

8. 已知 $f'(x_0)=-1$,则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}{x}=$ ________.

9. 曲线 $y=f(x)$ 过点 $(1,2)$,且在任一点 $M(x,y)$ 处的切线的斜率为 $2x$,则该曲线的方程是________________.

10. $y''+2y'+y=0$ 的通解为________________.

三、计算题(本大题共 7 道小题,每小题 6 分,共 42 分)

11. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}$.

12. 求由方程 $x^2+xy+e^y=e$ 所确定的隐函数在点 $x=0$ 处的导数 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$.

13. 确定函数 $f(x)=2x^3+9x^2+12x-3$ 的单调区间.

14. 求不定积分 $\int x\sin x\mathrm{d}x$.

15. 求定积分 $\int_1^{\sqrt{2}} x\sqrt{x^2-1}\mathrm{d}x$.

16. 求经过直线 l_1：$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{1}$ 和直线 l_2：$\begin{cases}x=1+t,\\y=1+2t,\\z=1+3t\end{cases}$ 的平面的方程.

17. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin\frac{2n\pi}{3}}{2^n}$ 的敛散性.

四、应用题(本大题共 2 道小题,每小题 7 分,共 14 分)

18. 求 $\iint_D x^2 e^{-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$ 由直线 $y=x$，$y=1$ 及 $x=0$ 所围成.

19. 求 $y=\sqrt{x}$ 与 $x=4$，以及 x 轴所围成图形的面积以及该图形绕 y 轴旋转一周所形成的旋转体的体积.

五、证明题(本大题共 2 道小题，第 20 题 6 分，第 21 题 8 分，共 14 分)

20. 证明：当 $b>a>0$ 时，$na^{n-1}(b-a)<b^n-a^n<nb^{n-1}(b-a)$.

21. 若当 $x\to 0$ 时，函数 $f(x)=\int_0^x 2^{t^3-3t+a}\mathrm{d}t$ 与 x 是等价无穷小量.

(1)求常数 a 的值；

(2)证明：$\frac{1}{2}\leqslant f(2)\leqslant 8$.