机密★启用前

山东省 2022 年普通高等教育专升本统一考试
高等数学Ⅰ试题

本试卷分为第Ⅰ卷和第Ⅱ卷两部分，共 6 页。满分 100 分。考试用时 120 分钟。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

注意事项：

1. 答题前，考生务必用 0.5 毫米黑色签字笔将自己的姓名、考生号、座号填写到试卷规定的位置上，并将姓名、考生号、座号填（涂）在答题卡规定的位置。

2. 第Ⅰ卷每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号，答在本试卷上无效。

3. 第Ⅱ卷答题必须用 0.5 毫米黑色签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应的位置；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不能使用涂改液、胶带纸、修正带。不按以上要求作答的答案无效。

第Ⅰ卷

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

在每小题列出的四个备选项中只有一个是符合题目要求的，请将其选出并将答题卡的相应代码涂黑。错涂、多涂或未涂均无分。

1. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+a, & x<0, \\ 1, & x=0, \\ b-\cos x, & x>0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 a 和 b 的值为（　　）.

A. $a=1$，$b=2$　　B. $a=1$，$b=-2$

C. $a=-1$，$b=2$　　D. $a=-1$，$b=-2$

2. 下列向量中，与 $\boldsymbol{a}=(2,-3,1)$ 垂直的是（　　）.

A. $(-2,3,-1)$　　B. $(3,0,1)$

C. $(-3,2,1)$　　D. $(3,2,0)$

3. 下列微分方程中，通解为 $y=C_1\mathrm{e}^{-2x}+C_2\mathrm{e}^{4x}$ 的是（　　）.

A. $y''-2y'-8y=0$　　B. $y''+2y'-8y=0$

C. $y''-6y'-8y=0$　　D. $y''+6y'-8y=0$

4. 下列级数中，发散的是（　　）.

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+2}$　　B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$

C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt{n}}$　　D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n}$

5. 函数 $f(x,y)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上连续，将 $\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{3}x}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_2^4\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{16-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$ 转化为极坐标系下的二次积分是（　　）.

A. $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_0^4 f(r\cos\theta,r\cos\theta)\mathrm{d}r$　　B. $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_0^4 f(r\cos\theta,r\cos\theta)r\mathrm{d}r$

C. $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\mathrm{d}\theta\int_0^4 f(r\cos\theta,r\cos\theta)\mathrm{d}r$　　D. $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\mathrm{d}\theta\int_0^4 f(r\cos\theta,r\cos\theta)r\mathrm{d}r$

第Ⅱ卷

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

6. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{3x}\right)^{kx}=\mathrm{e}^2$，则 $k=$ _________.

7. 设点 $(1,a)$ 是曲线 $y=ax^3-x^2-2x+3$ 的拐点，则 $a=$ _________.

8. 已知两点 $A(-2,1,-1)$，$B(2,5,1)$，则 $|\overrightarrow{AB}|=$ _________.

9. 当 $|x|<\dfrac{1}{2}$ 时，函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-2x}$ 在 $x=0$ 处的幂级数展开式为_________.

10. 已知函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续，且 $\int_1^{1-2x}f(t)\mathrm{d}t=x^2$，则 $f(x)=$ _________.

三、计算题（本大题共 7 小题，每小题 6 分，共 42 分）

11. 求极限 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{\sqrt{2x-3}-1}$.

12. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{3x^2}$.

13. 求不定积分 $\int(2x\ln x+\sin x)\mathrm{d}x$.

14. 求过点 (0,2,3) ,且与直线 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+4}{1}=\dfrac{z+1}{3}$ 和 $\begin{cases}x=3+t,\\ y=2+2t,\\ z=1+t\end{cases}$ 都平行的平面方程.

15. 求微分方程 $2\sqrt{x}y'=y^2+1$ 的通解.

16. 已知 $z=f(x,y)$ 是由方程 $\sin(xz)=yz$ 确定的函数,求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

17. 计算二重积分 $\iint\limits_D(xy^3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 是由直线 $y=x,y=\dfrac{x}{2}$, $y=1$ 围成的闭区域.

四、解答题(本大题共 2 小题,每小题 7 分,共 14 分)

18. 求函数 $f(x)=\frac{2}{3}x^3-5x^2+12x-\frac{1}{3}$ 的极值,并判断是极大值还是极小值.

19. 过点 $(-1,1)$ 作曲线 $y=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$ 的法线,求其与该曲线围成的图形的面积.

五、证明题(本大题共 2 道小题,第 20 小题 6 分,第 21 小题 8 分,共 14 分)

20. 证明:当 $x>0$ 时, $x+\frac{x^2}{2}>(1+x)\ln(1+x)$.

21. 设函数 $f(x)$ 在 $[1,3]$ 上连续,在 $(1,3)$ 内可导,且 $f(1)=f(2)=1$, $f(3)=0$. 证明:

(1)存在 $\xi\in(2,3)$,使得 $f(\xi)=\frac{1}{\xi}$;

(2)存在 $\eta\in(1,3)$,使得 $\eta^2 f'(\eta)+1=0$.

山东省 2022 年普通高等教育专升本统一考试
高等数学 Ⅰ 试题参考答案及解析

一、单项选择题

1.【答案】A

【解析】因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，所以 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)$. 又 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(x^2+a)=a$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(b-\cos x)=b-1$，$f(0)=1$，所以 $a=b-1=1$，解得 $a=1$，$b=2$.

2.【答案】D

【解析】若两向量垂直，则它们的数量积为 0. 选项中的向量分别与 $\boldsymbol{a}=(2,-3,1)$ 作数量积，只有 D 项 $(3,2,0)$ 满足条件.

3.【答案】A

【解析】由微分方程的通解可知，微分方程的特征根为 $r_1=-2$，$r_2=4$，于是特征方程为 $(r+2)(r-4)=r^2-2r-8$，从而微分方程为 $y''-2y'-8y=0$.

4.【答案】B

【解析】A 项，因为当 $n\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{n^2+2}\sim\dfrac{1}{n^2}$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，所以由比较判别法的极限形式知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+2}$ 收敛；

B 项，因为当 $n\to\infty$ 时，$\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\sim\dfrac{1}{n}$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，所以由比较判别法的极限形式知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ 发散；

C 项中，因为数列 $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right\}$ 单调递减趋于 0，所以由莱布尼茨判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 收敛；

D 项中，因为 $\dfrac{1}{3}<1$，所以几何级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ 收敛.

5.【答案】B

【解析】根据题意，积分区域 D 为 $\left\{(r,\theta)\,\middle|\,0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{3},0\leqslant r\leqslant4\right\}$，所以原积分 $=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_0^4 f(r\cos\theta,r\cos\theta)r\mathrm{d}r$.

二、填空题

6.【答案】6

【解析】因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{3x}\right)^{kx}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{3x}\right)^{3x\cdot\frac{k}{3}}=\mathrm{e}^{\frac{k}{3}}=\mathrm{e}^2$，所以 $k=6$.

7.【答案】$\dfrac{1}{3}$

【解析】因为点 $(1,a)$ 是曲线 $y=ax^3-x^2-2x+3$ 的拐点，所以 $y''|_{x=1}=(6ax-2)|_{x=1}=6a-2=0$，

解得 $a=\dfrac{1}{3}$.

8.【答案】6

【解析】根据题意, $\overrightarrow{AB}=(2-(-2),5-1,1-(-1))=(4,4,2)$, 所以 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{4^2+4^2+2^2}=6$.

9.【答案】$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2x)^n$

【解析】当 $|x|<\dfrac{1}{2}$ 时,函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-2x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2x)^n$.

10.【答案】2

【解析】等式两边求导,得 $-2f(1-2x)=2x$, 于是 $f(1-2x)=-x$. 令 $1-2x=t$, 则 $f(t)=\dfrac{t-1}{2}$,

故 $f(x)=\dfrac{x-1}{2}$.

三、计算题

11.【解析】$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{\sqrt{2x-3}-1}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{\sqrt{1+2(x-2)}-1}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{\frac{2(x-2)}{2}}=1$.

12.【解析】$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 3x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}(3x)^2}{3x^2}=\dfrac{3}{2}$.

13.【解析】$\int(2x\ln x+\sin x)\mathrm{d}x=\int 2x\ln x\mathrm{d}x+\int\sin x\mathrm{d}x$.

$$=x^2\ln x-\int x^2\mathrm{d}(\ln x)-\cos x$$

$$=x^2\ln x-\int x\mathrm{d}x-\cos x$$

$$=x^2\ln x-\frac{1}{2}x^2-\cos x+C.$$

14.【解析】由题意可知,两直线的方向向量分别为 $\boldsymbol{s}_1=(2,1,3)$, $\boldsymbol{s}_2=(1,2,1)$, 则所求平面的方向向量可取为

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&1&3\\1&2&1\end{vmatrix}=(-5,1,3),$$

从而所求平面的方程为

$$-5(x-0)+(y-2)+3(z-3)=0,$$

即

$$-5x+y+3z-11=0.$$

15.【解析】微分方程可化为

$$\frac{1}{y^2+1}\mathrm{d}y=\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x,$$

等号两边积分,得

$$\arctan y=\sqrt{x}+C,$$

故微分方程的通解为

$$y=\tan(\sqrt{x}+C).$$

16.**【解析】**令 $F(x,y,z)=\sin(xz)-yz$，则

$$\frac{\partial F}{\partial x}=z\cos(xz),\ \frac{\partial F}{\partial y}=-z,\ \frac{\partial F}{\partial z}=x\cos(xz)-y,$$

于是

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{z\cos(xz)}{y-x\cos(xz)},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{z}{x\cos(xz)-y}.$$

17.**【解析】**积分区域 D 可表示为 $\{(x,y)\mid y\leqslant x\leqslant 2y,0\leqslant y\leqslant 1\}$，所以

$$\iint_D(xy^3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^{2y}xy^3\,\mathrm{d}x=\frac{3}{2}\int_0^1 y^5\,\mathrm{d}y=\frac{1}{4}.$$

18.**【解析】**函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，且

$$f'(x)=2x^2-10x+12=2(x-2)(x-3),$$

令 $f'(x)=0$，解得驻点

$$x_1=2,\ x_2=3.$$

因为 x_1，x_2 将 $(-\infty,+\infty)$ 分为三个区间 $(-\infty,2)$，$(2,3)$，$(3,+\infty)$，且在这三个区间上 $f'(x)$ 的符号分别是

$$+,-,+,$$

所以函数的极大值为 $f(2)=9$，极小值为 $f(3)=\dfrac{26}{3}$.

19.**【解析】**因为

$$y'\big|_{x=-1}=x\big|_{x=-1}=-1,$$

所以曲线 $y=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}$ 在点 $(-1,1)$ 处的法线斜率为 1，从而法线方程为

$$y=x+2.$$

联立曲线方程与法线方程，解得 $x_1=-1$，$x_2=3$，所以法线与曲线围成的图形的面积为

$$S=\int_{-1}^{3}\left(x+2-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{2}x\right)\bigg|_{-1}^{3}=\frac{16}{3}.$$

四、证明题

20.**【证明】**令 $F(x)=x+\dfrac{x^2}{2}-(1+x)\ln(1+x)$，则

$$F'(x)=x-\ln(1+x),\ F''(x)=1-\frac{1}{1+x}.$$

因为当 $x>0$ 时，

$$F''(x)=1-\frac{1}{1+x}>0,$$

所以 $F'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增.

于是，当 $x>0$ 时，

$$F'(x)>F'(0)=0,$$

所以 $F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增,从而当 $x>0$ 时,

$$F(x)>F(0)=0,$$

即

$$x+\frac{x^2}{2}>(1+x)\ln(1+x).$$

21.【证明】(1)令 $F(x)=xf(x)-1$, 因为 $f(x)$ 在 $[1,3]$ 上连续,在 $(1,3)$ 内可导,所以 $F(x)$ 在 $[1,3]$ 上连续,在 $(1,3)$ 内可导. 又

$$f(2)=1, f(3)=0,$$

所以

$$F(2)=1, F(3)=-1,$$

于是由零点存在定理知,存在 $\xi\in(2,3)$, 使得 $F(\xi)=0$, 即 $f(\xi)=\dfrac{1}{\xi}$.

(2)令 $G(x)=f(x)-\dfrac{1}{x}$, 因为 $f(x)$ 在 $[1,3]$ 上连续,在 $(1,3)$ 内可导,所以 $G(x)$ 在 $[1,3]$ 上连续,在 $(1,3)$ 内可导. 又

$$f(1)=1, f(\xi)=\frac{1}{\xi},$$

所以

$$G(1)=G(\xi)=0,$$

于是由罗尔中值定理知,存在 $\eta\in(1,\xi)\subseteq(1,3)$, 使得 $G'(\eta)=0$, 即 $\eta^2 f'(\eta)+1=0$.

山东省 2022 年普通高等教育专升本统一考试
高等数学Ⅱ试题参考答案及解析

一、单项选择题

1.【答案】B

【解析】因为 $x\to0$ 时, $x\sim\ln(1+x)\sim\tan x\sim\arctan x$, 所以 A,C,D 三项正确;B 项,当 $x\to0$ 时, $\cos x$ 不是无穷小量

2.【答案】C

【解析】$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{\sin 3x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{3x}=\dfrac{1}{3}$.

3.【答案】B

【解析】根据题意, $y'=6x^2+6x, y''=12x+6$, 令 $y'=0$, 解得 $x=-1$ 或 $x=0$,因为 $y''|_{x=0}=6>0$, $y''|_{x=-1}=-6<0$, 所以 $x=0$ 为极小值点.

4.【答案】A

【解析】因为 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{x+y},\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{x+y}$, 所以 $\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{(x+y)^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\dfrac{1}{(x+y)^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\dfrac{1}{(x+y)^2}$,