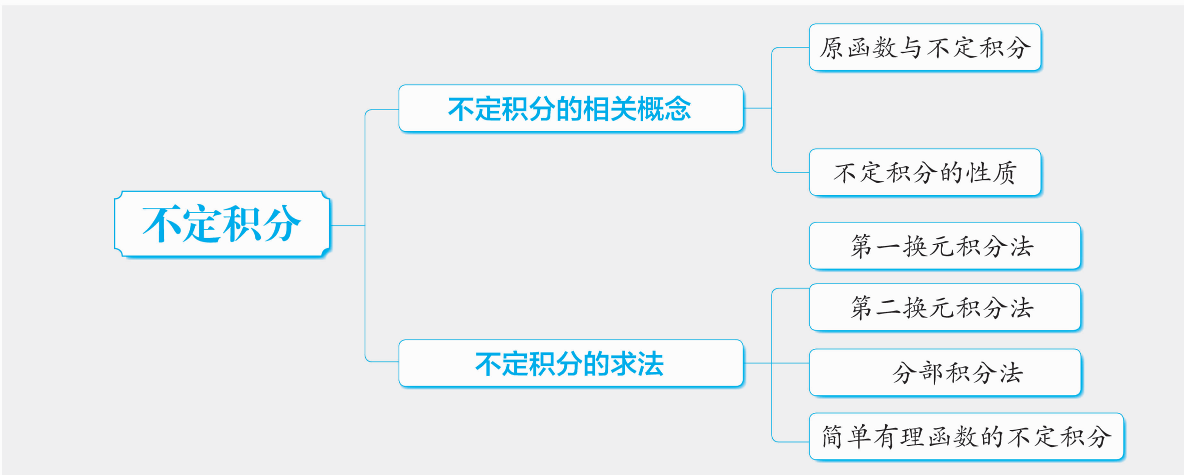
第三章 一元函数积分学

第一节 不定积分

知识脉络



考纲要求

1. 理解原函数与不定积分的概念，了解原函数存在定理，掌握不定积分的性质.
2. 熟练掌握不定积分的基本公式.
3. 熟练掌握不定积分的第一类、第二类换元法和分部积分法.
4. 掌握简单有理函数的不定积分的求法.

知识清单

一、不定积分的相关概念

1. 原函数与不定积分

定义 1 设 $f(x)$是定义在区间 I 上的函数，若存在函数 $F(x)$，使得对任意 $x \in I$ 均有

$$F'(x)=f(x) \text{或} \mathrm{d}F(x)=f(x)\mathrm{d}x,$$

则称函数 $F(x)$为 $f(x)$在区间 I 上的一个原函数.

例如，$(\sin x)'=\cos x$，所以 $\sin x$ 是 $\cos x$ 的一个原函数. 又如，当 $x>0$ 时，$(\ln|x|)'=(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$；当

$x<0$ 时，$(\ln|x|)'=(\ln-x)'=\frac{1}{x}$，所以 $\ln|x|$ 是 $\frac{1}{x}$ 的一个原函数.

注：根据导数的四则运算，如果 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数，那么对任一常数 C，函数 $F(x)+C$ 也是 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数. 由此可知，若函数 $f(x)$ 在某个区间上有原函数，则它的原函数不唯一，但任意两个原函数之间只相差一个常数.

例题 3.1.1　已知 $f(x)$ 的一个原函数为 x^2+4x，则 $f'(x)=($　　$)$.

A. $\frac{1}{3}x^2$　　B. x^2　　C. $2x$　　D. 2

【解析】　因为 $f(x)$ 的一个原函数为 x^2+4x，所以 $f(x)=(x^2+4x)'=2x+4$，从而 $f'(x)=(2x+4)'=2$. 故本题选 D.

定理 1(原函数存在定理)　若函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续，则函数 $f(x)$ 在区间 I 上存在原函数 $F(x)$.

注：由于初等函数在其定义区间上都是连续的，所以初等函数在其定义区间上都存在原函数.

定义 2　若函数 $f(x)$ 在区间 I 上存在原函数，则函数 $f(x)$ 的全体原函数称为 $f(x)$ 在区间 I 上的不定积分，记为

$$\int f(x)\mathrm{d}x$$

其中记号“$\int$”称为积分号，$f(x)$ 称为被积函数，$f(x)\mathrm{d}x$ 称为被积表达式，x 称为积分变量.

从不定积分的定义，即知下列关系：

$$\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]'=f(x),\qquad \mathrm{d}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]=f(x)\mathrm{d}x,$$

$$\int f'(x)\mathrm{d}x=f(x)+C,\qquad \int \mathrm{d}f(x)=f(x)+C.$$

注：积分变量采用的字母是无关紧要的，也就是说，对于 $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$，在需要的时候也可以写成诸如 $\int f(u)\mathrm{d}u=F(u)+C$，$\int f(t)\mathrm{d}t=F(t)+C$ 等形式.

例题 3.1.2　已知 $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$，若 $x=at+b$，则 $\int f(t)\mathrm{d}t=($　　$)$.

A. $F(x)+C$　　B. $\frac{1}{a}F(at+b)+C$

C. $F(t)+C$　　D. $F(at+b)+C$

【解析】　因为 $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$，所以 $\int f(t)\mathrm{d}t=F(t)+C$.

例题 3.1.3　下列各式中正确的是(　　).

A. $\mathrm{d}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]=f(x)$　　B. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]=f(x)\mathrm{d}x$

C. $\int \mathrm{d}f'(x)=f(x)+C$　　D. $\int \mathrm{d}f(x)=f(x)+C$

【解析】 $d\left[\int f(x)dx\right]=f(x)dx$，A 项错误；$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right]=f(x)$，B 项错误；$\int df'(x)=f'(x)+C$，C 项错误；$\int df(x)=f(x)+C$，D 项正确. 故本题选 D.

根据基本初等函数的导数公式，有如下基本积分公式，这些公式是一元函数积分学的基础，需要考生熟记.

$\int x^{\mu}dx=\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}+C\ (\mu\neq-1)$；

$\int \frac{dx}{x}=\ln|x|+C$；

$\int e^{x}dx=e^{x}+C$；

$\int a^{x}dx=\frac{a^{x}}{\ln a}+C$；

$\int \cos x dx=\sin x+C$；

$\int \sin x dx=-\cos x+C$；

$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C$；

$\int -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arccos x+C$；

$\int \frac{dx}{1+x^2}=\arctan x+C$；

$\int -\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arccot} x+C$；

$\int \frac{dx}{\cos^2 x}=\int \sec^2 x dx=\tan x+C$；

$\int \frac{dx}{\sin^2 x}=\int \csc^2 x dx=-\cot x+C$.

2. 不定积分的性质

性质 1 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的原函数存在，则

$$\int [f(x)\pm g(x)]dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx.$$

性质 2 设函数 $f(x)$ 的原函数存在，k 为非零常数，则

$$\int kf(x)dx=k\int f(x)dx.$$

备考提示

利用基本积分公式以及不定积分的这两个性质，可以求出一些简单函数的不定积分. 此外，如果被积函数不是基本积分公式里的函数，那么可以尝试使用恒等变换（三角函数使用三角恒等变换，分子分母都是多项式的有理函数使用多项式的除法），将被积函数变成可以套用基本积分公式的形式.

例题 3.1.4 计算下列不定积分.

(1) $\int e^{x+1}dx$； (2) $\int \sin^2\frac{x}{2}dx$； (3) $\int \frac{x^2}{1+x^2}dx$；

(4) $\int 3^{x}e^{x}dx$； (5) $\int \tan^2 x dx$； (6) $\int \frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}}dx$.

【解析】 (1) $\int e^{x+1}dx=e\int e^{x}dx=e^{x+1}+C$.

(2) $\int \sin^2\frac{x}{2}dx=\int \frac{1}{2}(1-\cos x)dx=\frac{1}{2}\left[\int 1dx-\int \cos x dx\right]=\frac{x-\sin x}{2}+C$.

(3) $\int \frac{x^2}{1+x^2}dx = \int 1-\frac{1}{1+x^2}dx = \int 1dx - \int \frac{1}{1+x^2}dx = x - \arctan x + C.$

(4) $\int 3^x e^x dx = \int (3e)^x dx = \frac{(3e)^x}{\ln 3e} + C.$

(5) $\int \tan^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos x^2}dx = \int (\sec^2 x - 1)dx = \tan x - x + C.$

(6) $\int \frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{x^2-2x+1}{\sqrt{x}}dx = \int x^{\frac{3}{2}}dx - 2\int x^{\frac{1}{2}}dx + \int x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + C.$

二、不定积分的求法

1. 第一换元积分法

定理 2　设 $\int f(u)du = F(u)+C$（$f(u)$ 的原函数存在），$u=u(x)$可微，则

$$\int f(u(x))u'(x)dx = \int f(u)du = F(u(x))+C.$$

上述定理称为第一换元积分法，其关键是引入中间变量 $u=u(x)$，将被积函数化为 $f(u(x))u'(x)$的形式，然后通过求关于 u 的不定积分而得到所要求的不定积分.

例题 3.1.5　设 $f(x)=e^{-2x}$，则 $\int \frac{f'(\ln x)}{x}dx = (\quad)$.

A. $2x+C$　　　　B. $-2x+C$

C. $\frac{1}{x^2}+C$　　　　D. $-\frac{1}{x^2}+C$

【解析】　令 $u=\ln x$，则 $du=\frac{1}{x}dx$，于是

$$\int \frac{f'(\ln x)}{x}dx = \int f'(u)d(u) = f(u)+C = e^{-2\ln x}+C = \frac{1}{x^2}+C.$$

例题 3.1.6　设 $\int f(x)dx = \arcsin x + C$，则$\int xf(1-x^2)dx = (\quad)$.

A. $\frac{1}{2}\arcsin(1-x^2)+C$　　　　B. $-\frac{1}{2}\arcsin(1-x^2)+C$

C. $2\arcsin(1-x^2)+C$　　　　D. $-2\arcsin(1-x^2)+C$

【解析】　令 $u=1-x^2$，则 $du=-2xdx$，于是

$$\int xf(1-x^2)dx = -\frac{1}{2}\int f(u)du = -\frac{1}{2}\arcsin u + C = -\frac{1}{2}\arcsin(1-x^2)+C.$$

例题 3.1.7　求下列不定积分.

(1) $\int \frac{1}{1+x}dx$；　　(2) $\int 2xe^{x^2}dx$；　　(3) $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$；

(4) $\int \frac{1}{a^2+x^2}dx$；　　(5) $\int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}dx$；　　(6) $\int \frac{1}{x(1+2\ln x)}dx$.

【解析】　(1)令 $u=1+x$，则 $du=dx$，于是

$$\int \frac{1}{1+x}dx = \int \frac{1}{u}du = \ln|u|+C = \ln|1+x|+C.$$

(2)令 $u=x^2$，则 $\mathrm{d}u=2x\mathrm{d}x$，于是

$$\int 2x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x=\int \mathrm{e}^u\mathrm{d}u=\mathrm{e}^u+C=\mathrm{e}^{x^2}+C.$$

(3)令 $u=x^2$，则 $\mathrm{d}u=2x\mathrm{d}x$，即 $x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}u$，于是

$$\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{1+u}}\mathrm{d}u=\sqrt{1+u}+C=\sqrt{1+x^2}+C.$$

(4)由于 $\int\frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{a^2}\int\frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\mathrm{d}x$，所以令 $u=\frac{x}{a}$，则 $\mathrm{d}u=\frac{1}{a}\mathrm{d}x$，即 $\mathrm{d}x=a\mathrm{d}u$，于是

$$\int\frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int\frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u=\frac{1}{a}\arctan u+C=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C.$$

(5)令 $u=\cos x+\sin x$，则 $\mathrm{d}u=(\cos x-\sin x)\mathrm{d}x$，于是

$$\int\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{u}\mathrm{d}u=\ln|u|+C=\ln|\cos x+\sin x|+C.$$

(6) $\int\frac{1}{x(1+2\ln x)}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+2\ln x}\mathrm{d}(1+2\ln x)=\frac{1}{2}\ln|1+2\ln x|+C.$

注：熟练掌握第一换元积分法后，可以省略写出引入中间变量的步骤，如题(6).

2. 第二换元积分法

定理 3 设 $x=\varphi(t)$ 可微，且 $\varphi(t)$ 存在反函数. 若 $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t=F(t)+C$，则

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t=F(t)+C=F(\varphi^{-1}(t))+C.$$

上述定理称为第二换元积分法. 第一换元积分法是引入中间变量 $u=u(x)$，将 $\int f(u(x))u'(x)\mathrm{d}x$ 化为 $\int f(u)\mathrm{d}u$，而第二换元积分法是引入变量 t，把原积分变量 x 看成关于 t 的一个函数 $\varphi(t)$，将 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 化为 $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$.

例题 3.1.8　求下列不定积分.

(1) $\int\frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$；　(2) $\int\frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}\mathrm{d}x$；　(3) $\int\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$.

【解析】 (1)令 $\sqrt{x}=t$，则 $x=t^2(t>0)$，$\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$，于是

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x&=\int\frac{2t}{1+t}\mathrm{d}t=2\int\left(1-\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t=2[t-\ln(1+t)]+C\\&=2[\sqrt{x}-\ln(1+\sqrt{x})]+C.\end{aligned}$$

(2)令 $\sqrt[3]{3x+1}=t$，则 $x=\frac{t^3-1}{3}$，$\mathrm{d}x=t^2\mathrm{d}t$，于是

$$\begin{aligned}\int\frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}\mathrm{d}x&=\int\frac{t^5+2t^2}{3t}\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\int(t^4+2t)\mathrm{d}t=\frac{1}{15}t^5+\frac{1}{3}t^2+C\\&=\frac{1}{15}(3x+1)^{\frac{5}{3}}+\frac{1}{3}(3x+1)^{\frac{2}{3}}+C.\end{aligned}$$

(3)令 $\sqrt[6]{x}=t$，则 $x=t^6$，$dx=6t^5dt$，于是

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx&=\int\frac{6t^5}{t^3+t^2}dt=6\int\frac{t^3}{t+1}dt=6\int\frac{t^3+1-1}{t+1}dt\\&=6\int(t^2-t+1)dt-6\int\frac{1}{t+1}dt\\&=2t^3-3t^2+6t-6\ln(t+1)+C\\&=2x^{\frac{1}{2}}-3x^{\frac{1}{3}}+6x^{\frac{1}{6}}-6\ln(x^{\frac{1}{6}}+1)+C.\end{aligned}$$

备考提示

当被积函数只含有一个 $\sqrt[n]{ax+b}$（n 是正整数，$a(a\neq0)$，b 是常数）型根式时，可令 $\sqrt[n]{ax+b}=t$；当被积函数含有两个或两个以上的 $\sqrt[a]{x}$ 型根式，即 $\sqrt[a]{x},\sqrt[b]{x},\cdots,\sqrt[n]{x}$ 时，可令 $\sqrt[u]{x}=t$，其中 u 是 $a,b,\cdots,n$ 的公倍数.

例题 3.1.9 求下列不定积分.

(1) $\int\sqrt{a^2-x^2}dx\,(a>0)$；

(2) $\int\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx\,(x>0)$；

(3) $\int\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$.

【解析】 (1)令 $x=a\sin t\left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)$，则 $dx=a\cos t\,dt$，$t=\arcsin\frac{x}{a}$，于是

$$\begin{aligned}\int\sqrt{a^2-x^2}dx&=\int a\sqrt{a^2-a^2\sin^2t}\cos t\,dt=a^2\int\cos^2t\,dt=\frac{a^2}{2}\int(\cos 2t+1)dt\\&=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C=\frac{a^2}{2}t+\frac{1}{2}a\sin t\sqrt{a^2-a^2\sin^2t}+C\\&=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+C.\end{aligned}$$

(2)令 $x=3\sec t\left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$，则 $dx=3\tan t\sec t\,dt$，$t=\arccos\frac{3}{x}$，于是

$$\begin{aligned}\int\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx&=\int\frac{3\tan t}{3\sec t}\cdot3\tan t\sec t\,dt=\int3\tan^2t\,dt=3\int(\sec^2t-1)dt\\&=3\tan t-3t+C=\sqrt{(3\sec t)^2-9}-3t+C\\&=\sqrt{x^2-9}-3\arccos\frac{3}{x}+C.\end{aligned}$$

(3)令 $x=\tan t\left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)$，则 $dx=\sec^2t\,dt$，于是

$$\int\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx=\int\frac{\sec^2t}{\sec^3t}dt=\int\cos t\,dt=\sin t+C.$$

作辅助三角形(如图 3.1.1)，可知

$$\sin t=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

故 $\int \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C.$

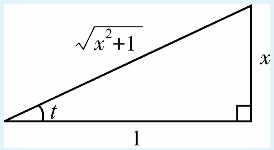


图 3.1.1

备考提示

当被积函数中含有 $\sqrt{a^2-x^2}(a>0)$ 时，可令 $x=a\sin t$ 或 $x=a\cos t$；当被积函数中含有 $\sqrt{a^2+x^2}(a>0)$ 时，可令 $x=a\tan t$ 或 $x=a\cot t$；当被积函数中含有 $\sqrt{x^2-a^2}(a>0)$ 时，可令 $x=a\sec t$ 或 $x=a\csc t$.

3. 分部积分法

设 $u(x)$，$v(x)$ 具有连续导数，则有

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x=u(x)v(x)-\int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$$

或

$$\int u(x)\mathrm{d}v(x)=u(x)v(x)-\int v(x)\mathrm{d}u(x).$$

上述公式称为分部积分公式，用分部积分公式求不定积分的方法称为分部积分法. 分部积分法一般用于处理不同类型函数相乘的问题，使用的关键是将被积函数 $f(x)$ 凑成 $u(x)v'(x)\mathrm{d}x$ 的形式. 通常 $v'(x)$ 取 $\mathrm{e}^{\pm x}$，$\sin x$，$\cos x$，x^n 等函数.

例题 3.1.10　求下列不定积分.

(1) $\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$；

(2) $\int x^2\ln x\mathrm{d}x$；

(3) $\int \arctan x\mathrm{d}x$.

【解析】 (1) 令 $u=x$，$\mathrm{d}v=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{d}\mathrm{e}^x$，即 $v=\mathrm{e}^x$，则

$$\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=x\mathrm{e}^x-\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=(x-1)\mathrm{e}^x+C.$$

(2) 令 $u=\ln x$，$\mathrm{d}v=x^2\mathrm{d}x=\mathrm{d}\frac{x^3}{3}$，即 $v=\frac{x^3}{3}$，则

$$\int x^2\ln x\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{1}{3}\int x^2\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{x^3}{9}+C.$$

(3) $\int \arctan x\mathrm{d}x = x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C.$

熟练掌握分部积分法后,选取 u,$\mathrm{d}v$ 的步骤可以省略,如题(3).

例题 3.1.11　设 $\ln f(x)=\cos x$,则 $\int \frac{xf'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=$(　　).

A. $x(\cos x+\sin x)+C$

B. $x\sin x-\cos x+C$

C. $x\cos x-\sin x+C$

D. $x\sin x+C$

【解析】　因为 $\ln f(x)=\cos x$,所以 $\int \frac{xf'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x = \int x\mathrm{d}(\ln f(x)) = x\ln f(x) - \int \ln f(x)\mathrm{d}x = x\cos x - \int \cos x\mathrm{d}x = x\cos x - \sin x + C.$

例题 3.1.12　已知 $f(x)$的一个原函数为 e^{-x},则 $\int xf'(x)\mathrm{d}x=$(　　).

A. $x\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-x}+C$

B. $x\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-x}+C$

C. $-x\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-x}+C$

D. $-x\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-x}+C$

【解析】　因为 $f(x)$的一个原函数为 e^{-x},所以 $f(x)=(\mathrm{e}^{-x})'=-\mathrm{e}^{-x}$,从而 $\int xf'(x)\mathrm{d}x = \int x\mathrm{d}(f(x)) = xf(x) - \int f(x)\mathrm{d}x = -x\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x} + C.$

4. 简单有理函数的不定积分

形如 $R(x)=\frac{Q(x)}{P(x)}$的函数称为有理函数,其中 $Q(x)$,$P(x)$为互素的多项式(没有公因式). 如果分子的次数小于分子的次数,那么称有理函数为真分式;如果分子的次数大于等于分母的次数,那么称有理函数为假分式.

利用多项式的乘法,总可以将假分式化成一个多项式与一个真分式的和,由于多项式的不定积分容易求出,所以讨论有理函数的不定积分,只需讨论真分式的不定积分积分. 下面主要讨论分母为二次多项式的真分式的不定积分.

设 $R(x)=\frac{Q(x)}{P(x)}$是分母为二次多项式的真分式.

(1)若 $P(x)=(x-a)(x-b)$,则 $R(x)$可分拆为 $\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}$,从而 $\int R(x)\mathrm{d}x = A\ln|x-a| + B\ln|x-b|+C$;

(2)若 $P(x)=(x-a)^2$,则 $R(x)$可分拆为 $\frac{A}{x-a}+\frac{B}{(x-a)^2}$,从而 $\int R(x)\mathrm{d}x = A\ln|x-a| - \frac{B}{x-a}+C.$

例题 3.1.13　求不定积分 $\int \frac{x+7}{x^2-x-6}\mathrm{d}x.$

【解析】　因为 $x^2-x-6=(x-3)(x+2)$,所以

$$\frac{x+7}{x^2-x-6}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+2},$$

其中 A,B 为待定系数.

上式两边同乘 $(x-3)(x+2)$,分别令 $x=3$,$x=-2$,得 $A=2$,$B=-1$. 于是

$$\int \frac{x+7}{x^2-x-6}\mathrm{d}x = \int \frac{2}{x-3} - \frac{1}{x+2}\mathrm{d}x = 2\int \frac{1}{x-3}\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x+2}\mathrm{d}x$$
$$= 2\ln|x-3| - \ln|x+2| + C.$$

例题 3.1.14 求不定积分 $\int \frac{2x+1}{x^2-4x+4}\mathrm{d}x$.

【解析】 因为 $x^2-4x+4=(x-2)^2$，所以

$$\frac{2x+1}{x^2-4x+4}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2},$$

其中 A,B 为待定系数.

上式两边同乘 $(x-2)^2$，得

$$2x+1=A(x-2)+B,$$

即

$$2x+1=Ax+B-2A,$$

比较上式两端同次幂的系数，即有

$$\begin{cases} A=2, \\ B-2A=1, \end{cases}$$

解得 $A=2,B=5$. 于是

$$\int \frac{2x+1}{x^2-4x+4}\mathrm{d}x = \int \frac{2}{x-2} + \frac{5}{(x-2)^2}\mathrm{d}x = 2\int \frac{1}{x-2}\mathrm{d}x + 5\int \frac{1}{(x-2)^2}\mathrm{d}x$$
$$= 2\ln|x-2| - \frac{5}{x-2} + C.$$

巩固练习

求下列不定积分.

1. $\int (x^3+2x^2-5\sqrt{x})\mathrm{d}x$；
2. $\int (\sin x+3\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x$；
3. $\int \frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}\mathrm{d}x$；
4. $\int (1-x^2)\sqrt{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x$；
5. $\int \frac{1}{4x-3}\mathrm{d}x$；
6. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-2x^2}}$；
7. $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$；
8. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-2x+2}$；
9. $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{2x}}$；
10. $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x$；
11. $\int x\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$；
12. $\int x\cos(\omega x+\varphi)\mathrm{d}x$；
13. $\int x\ln(x-1)\mathrm{d}x$；
14. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x$；
15. $\int \frac{x+1}{x^2-5x+6}\mathrm{d}x$ ；
16. $\int \frac{x+2}{x^2-2x+1}\mathrm{d}x$.

第二节 定　积　分

知识脉络

- 定积分
  - 定积分的相关概念
    - 定积分的定义
    - 定积分的几何意义
    - 定积分的性质
    - 积分上限的函数及其导数
  - 定积分的求法
    - 牛顿-莱布尼茨公式
    - 定积分的换元积分法
    - 定积分的分部积分法
  - 定积分的应用
    - 计算平面图形的面积
    - 计算旋转体的体积

考纲要求

1. 理解定积分的概念及几何意义,了解可积的条件.
2. 掌握定积分的性质.
3. 理解积分上限的函数,会求它的导数,掌握牛顿-莱布尼茨公式.
4. 熟练掌握定积分的换元积分法与分部积分法.
5. 会用定积分表达和计算平面图形的面积、旋转体的体积.

知识清单

一、定积分的相关概念

1. 定积分的定义

设函数 $f(x)$是定义在区间$[a,b]$上的有界函数,用分点

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b,$$

把区间$[a,b]$划分成 n 个小区间,每个小区间的长度依次为 $\Delta x_1=x_1-x_0,\Delta x_2=x_2-x_1,\cdots,\Delta x_n=x_n-x_{n-1}$.在每个小区间$[x_{i-1},x_i]$上任取一点 ξ_i,作和

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

记 $\lambda=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\}$，若当 $\lambda\to0$ 时，和式 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$ 的极限存在，则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，并称该极限为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分，记作 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i,$$

其中 $f(x)$ 称为被积函数，$f(x)\mathrm{d}x$ 称为被积表达式，x 称为积分变量，a 称为积分下限，b 称为积分上限，$[a,b]$ 称为积分区间.

注：函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积的必要条件.

定理 1　若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

定理 2　若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界，且只有有限个间断点，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

例题 3.2.1　将下列和式的极限表示成定积分的形式.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(2+\sin\frac{2i\pi}{n}\right)\frac{2\pi}{n}$.

【解析】 (1) 由于

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n},$$

因此，这个和式可以看成是把区间 $[0,1]$ 平均分成 n 个小区间

$$\left[0,\frac{1}{n}\right],\left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right],\cdots,\left[\frac{n-1}{n},1\right],$$

在每个小区间上取右端点 $\frac{i}{n}(i=1,2,\cdots,n)$，得到的函数 $f(x)=\frac{1}{1+x}$ 的一个和式.

因为 $f(x)=\frac{1}{1+x}$ 在 $[0,1]$ 上连续，所以它在 $[0,1]$ 上可积，从而

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x.$$

(2) 和式 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(2+\sin\frac{2i\pi}{n}\right)\frac{2\pi}{n}$ 可以看成是把区间 $[0,2\pi]$ 平均分成 n 个小区间

$$\left[0,\frac{2\pi}{n}\right],\left[\frac{2\pi}{n},\frac{4\pi}{n}\right],\cdots,\left[\frac{2(n-1)\pi}{n},2\pi\right],$$

在每个小区间上取右端点 $\frac{2i\pi}{n}(i=1,2,\cdots,n)$，得到的函数 $f(x)=2+\sin x$ 的一个和式.

因为 $f(x)=2+\sin x$ 在 $[0,2\pi]$ 上连续，所以它在 $[0,2\pi]$ 上可积，从而

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(2+\sin\frac{2i\pi}{n}\right)\frac{2\pi}{n}=\int_0^{2\pi}2+\sin x\mathrm{d}x.$$

注：本题所求的两个和式极限都是可积函数在对应区间上的一个特殊的和式极限(将区间划分成长度相同的 n 个小区间，并取每个小区间的右端点). 因为定积分存在，所以根据定积分的定义，这两个和式极限存在且等于定积分. 但反过来，只确定函数在区间的一个特定划分和特定取值下的和式存在极限，不能确定函数在该区间上是可积的，因为定积分的定义中对于区间的划分和每个小区间上的取值都是任意的.

2. 定积分的几何意义

若在区间$[a,b]$上，$f(x)\geqslant 0$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示由曲线 $y=f(x)$、x 轴及两条直线 $x=a$，$x=b$ 所围成的曲边梯形的面积.

若在区间$[a,b]$上，$f(x)\leqslant 0$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示由曲线 $y=f(x)$、x 轴及两条直线 $x=a$，$x=b$ 所围成的曲边梯形的面积的相反数.

若在区间$[a,b]$上，$f(x)$既有正值又有负值，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示由曲线 $y=f(x)$、x 轴及两条直线 $x=a$，$x=b$ 所围成的各个平面图形的面积的代数和(x 轴上方的图形的面积为正，x 轴下方的图形的面积为负)，如图 3.2.1所示.

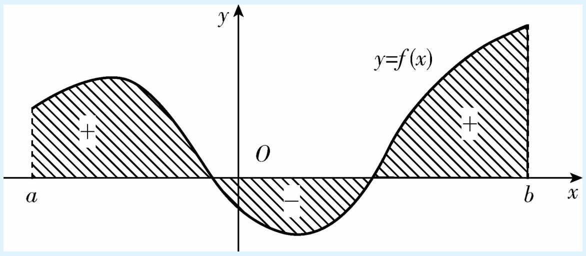


图 3.2.1

例题 3.2.2 利用定积分的几何意义说明下列等式的正确性.

(1) $\int_a^b k\,\mathrm{d}x=k(b-a)$ $(a<b,k$ 为常数$)$；

(2) $\int_a^b x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(b^2-a^2)$ $(a<b)$；

(3) $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\pi a^2$ $(a>0)$.

【解析】 (1)定积分 $\int_a^b k\,\mathrm{d}x$ 表示以 $b-a$ 为底，以 k 为高的矩形的面积，如图 3.2.2. 因此，$\int_a^b k\,\mathrm{d}x=k(b-a)$.

(2)定积分 $\int_a^b x\,\mathrm{d}x$ 表示以 a 为上底、b 为下底、$b-a$ 为高的直角梯形的面积，如图 3.2.3. 因此，$\int_a^b x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(b^2-a^2)$.

(3)定积分 $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$ 表示以原点为圆心、a 为半径的圆的面积的 $\frac{1}{4}$，如图 3.2.4. 因此，$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\pi a^2$.

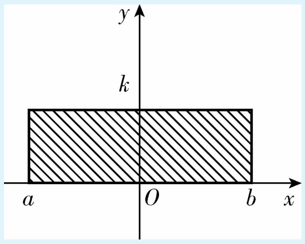


图 3.2.2

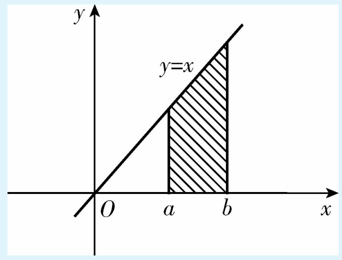


图 3.2.3

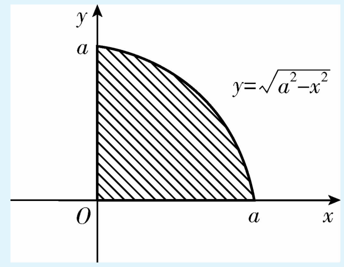


图 3.2.4

例题 3.2.3 定积分 $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=$ ________.

【解析】 根据定积分的几何意义，$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-y^2}\mathrm{d}x$ 表示单位圆 $x^2+y^2=1$ 的上半圆的面积，所以 $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-y^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$.

例题 3.2.4 $\int_{0}^{2}\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x=$ ________.

【解析】 根据定积分的几何意义，$\int_{0}^{2}\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x$ 表示圆 $x^2+y^2=4$ 在第一象限的面积，所以 $\int_{0}^{2}\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\times\pi\times2^2=\pi$.

3. 定积分的性质

性质 1 设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则

$$\int_{b}^{a}f(x)\mathrm{d}x=-\int_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x;$$

$$\int_{a}^{b}f(x)\pm g(x)\mathrm{d}x=\int_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x\pm\int_{a}^{b}g(x)\mathrm{d}x;$$

$$\int_{a}^{b}kf(x)\mathrm{d}x=k\int_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x(k\in\mathbf{R}).$$

性质 2 对于任意三个常数 a,b,c，

$$\int_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x=\int_{a}^{c}f(x)\mathrm{d}x+\int_{c}^{b}f(x)\mathrm{d}x.$$

性质 3 设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，若对任意 $x\in[a,b]$，有 $f(x)\leqslant g(x)$（或 $f(x)<g(x)$），则

$$\int_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_{a}^{b}g(x)\mathrm{d}x\left(\text{或}\int_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x<\int_{a}^{b}g(x)\mathrm{d}x\right).$$

性质 4 设函数 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上可积，则

$$\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & f(x)\text{ 是奇函数},\\ 2\int_{0}^{a}f(x)\mathrm{d}x, & f(x)\text{ 是偶函数}.\end{cases}$$

例题 3.2.5 下列定积分计算结果正确的是（　　）.

A. $\int_{-1}^{1}(x^2+x^3)\mathrm{d}x=0$　　　B. $\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}\mathrm{d}x=0$

C. $\int_{-1}^{1}\ln(x+2)\mathrm{d}x=0$　　　D. $\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}\mathrm{d}x=0$

【解析】 因为 $y=x^2$ 是偶函数，$y=x^3$ 是奇函数，所以 $\int_{-1}^{1}(x^2+x^3)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}x^2\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}x^3\mathrm{d}x=2\int_{0}^{1}x^2\mathrm{d}x$，又 x^2 在 $(0,1]$ 上恒大于 0，所以 $\int_{-1}^{1}(x^2+x^3)\mathrm{d}x=2\int_{0}^{1}x^2\mathrm{d}x>0$，A 项错误；因为 $y=\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$ 是偶函数，且 $\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}\geqslant\frac{2\sqrt{\mathrm{e}^x\cdot\mathrm{e}^{-x}}}{2}=1$，所以 $\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}\mathrm{d}x=2\int_{0}^{1}\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}\mathrm{d}x\geqslant 2\int_{0}^{1}\mathrm{d}x=2$，B 项错误；因为 $\ln(x+2)$ 在 $(-1,1]$ 上恒大于 0，所以 $\int_{-1}^{1}\ln(x+2)\mathrm{d}x>0$，C 项错误；因为 $y=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$ 是奇函数，所以 $\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}\mathrm{d}x=0$，D 项正确. 故本题选 D.

例题 3.2.6 定积分 $\int_{-1}^{1}(x^6-x^2+2x^3\sqrt{1-x^2}+1)\mathrm{d}x=$ ________.

【解析】 根据定积分的性质，$\int_{-1}^{1}(x^6-x^2+2x^3\sqrt{1-x^2}+1)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}(x^6-x^2+1)\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}2x^3\cdot\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$. 因为函数 $y=x^6-x^2+1$ 在 $[-1,1]$ 上是偶函数，$y=2x^3\sqrt{1-x^2}$ 在 $[-1,1]$ 上是奇函数，所以 $\int_{-1}^{1}(x^6-x^2+1)\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}2x^3\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=2\int_{0}^{1}(x^6-x^2+1)\mathrm{d}x=2\left(\frac{x^7}{7}-\frac{x^3}{3}+x\right)\Big|_{0}^{1}=\frac{34}{21}$.

性质 5（定积分中值定理） 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则在 $[a,b]$ 上至少存在一点 ξ，使得

$$\int_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a).$$

4. 积分上限的函数及其导数

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，x 是 $[a,b]$ 上的一点，则称

$$\Phi(x)=\int_{a}^{x}f(t)\mathrm{d}t\,(x\in[a,b])$$

为 $f(x)$ 的积分上限的函数.

定理 3 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则积分上限的函数

$$\Phi(x)=\int_{a}^{x}f(t)\mathrm{d}t\,(x\in[a,b])$$

在 $[a,b]$ 上可导，并且

$$\Phi'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{a}^{x}f(t)\mathrm{d}t=f(x).$$

注：$\Phi(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数，因此 $f(x)$ 的不定积分可以表示为 $\int_{a}^{x}f(t)\mathrm{d}t+C$.

例题 3.2.7 设 $\int_{0}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\ln(x^2+1)$，则 $f(2)=$ (　　).

A. $\frac{4}{5}$ 　　　　B. $\frac{3}{5}$

C. $\frac{2}{5}$ 　　　　D. $\frac{1}{5}$

【解析】 $\int_{0}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\ln(x^2+1)$ 两边求导，得 $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$，于是 $f(2)=\frac{2\times 2}{2^2+1}=\frac{4}{5}$. 故本题选 A.

例题 3.2.8 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \ln(1+2t)\mathrm{d}t}{x^2}=$________.

【解析】 利用洛必达法则，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \ln(1+2t)\mathrm{d}t}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{2x},$$

再利用等价无穷小因子替换，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{2x}=1.$$

备考提示

对于积分上限的函数 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t(x\in[a,b])$，如果把 x 换成一个可微函数 $g(x)(g(x)\in[a,b])$，即得到一个新的变上限定积分 $F(g(x))=\int_a^{g(x)} f(t)\mathrm{d}t(g(x)\in[a,b])$，那么根据复合函数的求导法则，$\left[\int_a^{g(x)} f(t)\mathrm{d}t\right]'=[F(g(x))]'=F'(g(x))g'(x)=f(g(x))g'(x)$.

例题 3.2.9 已知 $F(x)=\int_0^{x^2} f(t)\mathrm{d}t$，则 $F''(x)=$________.

【解析】 $F(x)=\int_0^{x^2} f(t)\mathrm{d}t$，则 $F'(x)=f(x^2)(x^2)'=2xf(x^2)$，从而 $F''(x)=2f(x^2)+4x^2f'(x^2)$.

二、定积分的求法

1. 牛顿-莱布尼茨公式(微积分基本定理)

定理 4 设 $f(x)$在$[a,b]$上连续，$F(x)$是 $f(x)$的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a).$$

上述定理通常称为牛顿-莱布尼茨公式，也称为微积分基本定理.

注：牛顿-莱布尼茨公式是计算定积分的基本方法，需要注意的是，应用公式的前提是函数在给定区间上连续. 例如 $f(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}\cos\dfrac{1}{x^2},x\neq 0,\\ 0,x=0,\end{cases}$ 虽然有原函数 $F(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x^2},x\neq 0,\\ 0,x=0,\end{cases}$ 但 $f(x)$在 $x=0$附近是无界的，因此 $f(x)$在包含 $x=0$ 的任何闭区间$[a,b]$上不可积.

由于 $f(x)$的原函数 $F(x)$一般可通过求不定积分得到，因此，根据牛顿-莱布尼茨公式，计算不定积分的公式以及不定积分的方法均可直接应用到定积分的计算中.

例题 3.2.10 计算下列定积分.

(1) $\int_0^1 x\mathrm{d}x$；　(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-1)\mathrm{d}x$；　(3) $\int_0^1(1+x)^2\mathrm{d}x$.

【解析】 (1) $\int_0^1 x\mathrm{d}x=\dfrac{x^2}{2}\Big|_0^1=\dfrac{1^2}{2}-\dfrac{0^2}{2}=\dfrac{1}{2}$.

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-1)\mathrm{d}x=(-\cos x-x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1-\dfrac{\pi}{2}$.

(3) $\int_0^1(1+x)^2\mathrm{d}x=\int_0^1(1+x)^2\mathrm{d}(1+x)=\dfrac{(1+x)^3}{3}\Big|_0^1=\dfrac{7}{3}$.

2. 定积分的换元积分法

定理 5 设函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续,函数 $x=\varphi(t)$满足:

(1)$\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b$;

(2)$\varphi(t)$在$[\alpha,\beta]$或$[\beta,\alpha]$上具有连续导数,且值域为$[a,b]$,

则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

上述公式称为定积分的换元公式.需要注意的是,在应用换元公式时,积分上、下限也要换成相对应于新变量的积分上、下限.

例题 3.2.11 求定积分 $\int_0^2 f(x-1)\mathrm{d}x$,其中 $f(x)=\begin{cases}\ln(1+x), & x\geqslant 0,\\ \dfrac{2x}{1+x^2}, & x<0.\end{cases}$

【解析】 令 $t=x-1$,则当 $x=0$ 时,$t=-1$;当 $x=2$ 时,$t=1$,于是

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x-1)\mathrm{d}x&=\int_{-1}^1 f(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t+\int_{-1}^0 f(t)\mathrm{d}t\\&=\int_0^1\ln(1+t)\mathrm{d}t+\int_{-1}^0\frac{2t}{1+t^2}\mathrm{d}t=\int_0^1\ln(1+t)\mathrm{d}(1+t)+\int_{-1}^0\frac{\mathrm{d}(1+t^2)}{1+t^2}\\&=(1+t)\ln(1+t)\Big|_0^1-\int_0^1\mathrm{d}t+\ln(1+t^2)\Big|_{-1}^0\\&=\ln 2-1.\end{aligned}$$

例题 3.2.12 计算下列定积分.

(1) $\int_0^{\frac{a}{2}}\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x(a>0)$;

(2) $\int_1^{\sqrt{3}}\dfrac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$.

【解析】 (1)令 $x=a\sin t$,则当 $x=0$ 时,$t=0$;当 $x=\dfrac{a}{2}$时,$t=\dfrac{\pi}{6}$,于是

$$\int_0^{\frac{a}{2}}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{a\sin t}{a\cos t}a\cos t\mathrm{d}t=-a\cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a.$$

(2)令 $x=\dfrac{1}{t}$,则当 $x=1$ 时,$t=1$;当 $x=\sqrt{3}$时,$t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,于是

$$\begin{aligned}\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x&=\int_1^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\frac{1}{\frac{1}{t^2}\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t=\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^1\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t\\&=\sqrt{1+t^2}\Big|_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^1=\sqrt{2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}.\end{aligned}$$

3. 定积分的分部积分法

设 $u(x),v(x)$在$[a,b]$上具有连续导数,则有

$$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x.$$

例题 3.2.13　计算下列定积分.

(1) $\int_1^{\mathrm{e}} x\ln x\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_0^{\pi} x\cos x\mathrm{d}x$；　　(3) $\int_0^1 \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

【解析】 (1) $\int_1^{\mathrm{e}} x\ln x\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}}\frac{x^2}{2}\mathrm{d}(\ln x) = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}}\frac{x}{2}\mathrm{d}x$

$$=\frac{\mathrm{e}^2}{2}-\frac{x^2}{4}\Big|_1^{\mathrm{e}}=\frac{1}{4}(\mathrm{e}^2+1).$$

(2) $\int_0^{\pi} x\cos x\mathrm{d}x = x\sin x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x = \cos x\Big|_0^{\pi} = -2.$

(3)先用换元法，令$\sqrt{x}=t$，则当 $x=0$ 时，$t=0$；当 $x=1$ 时，$t=1$，于是

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}\,x = \int_0^1 2t\mathrm{e}^t\mathrm{d}t.$$

再用分部积分法，

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int_0^1 2t\mathrm{e}^t\mathrm{d}t = \int_0^1 2t\mathrm{d}(\mathrm{e}^t) = 2t\mathrm{e}^t\Big|_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^t\mathrm{d}(2t)$$

$$= 2\mathrm{e} - 2\mathrm{e}^t\Big|_0^1 = 2.$$

例题 3.2.14　求 $\int_0^1 x\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x$.

【解析】 $\int_0^1 x\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_0^1 x\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-2x}) = -\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{-2x}\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x$

$$=-\frac{1}{2\mathrm{e}^2}-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2x}\Big|_0^1=\frac{1}{4}-\frac{3}{4\mathrm{e}^2}.$$

三、定积分的应用

1. 计算平面图形的面积

(1)如图 3.2.2，由连续曲线 $y=f(x)$，$y=g(x)$（$f(x)\geqslant g(x)$），及直线 $x=a$，$x=b$（$a<b$）围成的平面图形的面积为

$$S = \int_a^b [f(x)-g(x)]\mathrm{d}x.$$

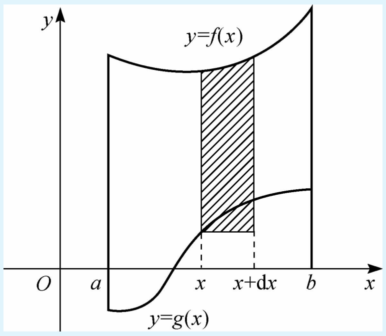


图 3.2.2

(2)如图 3.2.3,由连续曲线 $x=\varphi(y)$,$x=\psi(y)$($\varphi(y)\geqslant\psi(y)$),及直线 $y=c$,$y=d$($c<d$)围成的平面图形的面积为

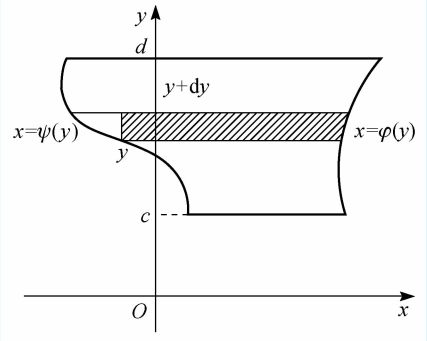


图 3.2.3

$$S=\int_c^d[\varphi(y)-\psi(y)]\mathrm{d}y.$$

例题 3.2.15 求由 $y=\mathrm{e}^x$ 与 $y=\mathrm{e}^{-x}$ 及 $x=1$ 所围成的平面图形的面积.

【解析】 画出两函数的图像,如图 3.2.4 所示,选 x 为积分变量,则平面图形的面积为

$$S=\int_0^1(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}x=(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})\Big|_0^1=\mathrm{e}+\mathrm{e}^{-1}-2.$$

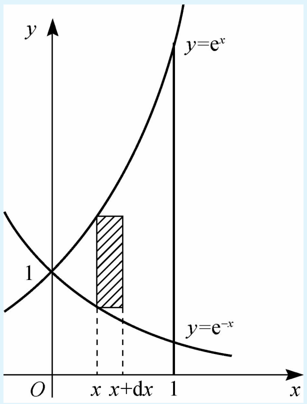


图 3.2.4

例题 3.2.16 求由 $x=5y^2$,$x=1+y^2$ 及 x 轴所围成的平面图形的面积.

【解析】 画出两函数的图像,如图 3.2.5 所示,选 y 为积分变量,则平面图形的面积为

$$S=\int_0^{\frac{1}{2}}(1+y^2-5y^2)\mathrm{d}y=\left(y-\frac{4}{3}y^3\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}.$$

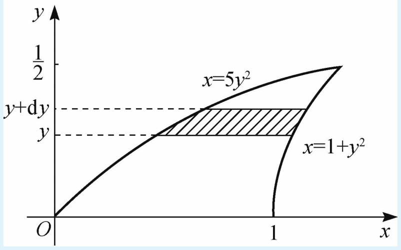


图 3.2.5

2. 计算旋转体的体积

(1)如图 3.2.6,由连续曲线 $y=f(x)$,直线 $x=a,x=b(a<b)$,及 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积为

$$V=\pi\int_a^b[f(x)]^2\mathrm{d}x.$$

(2)如图 3.2.7,由连续曲线 $x=\varphi(y)$,直线 $y=c,y=d(c<d)$,及 y 轴所围成的平面图形绕 y 轴旋转而成的旋转体的体积为

$$V=\pi\int_c^d[\varphi(y)]^2\mathrm{d}y.$$

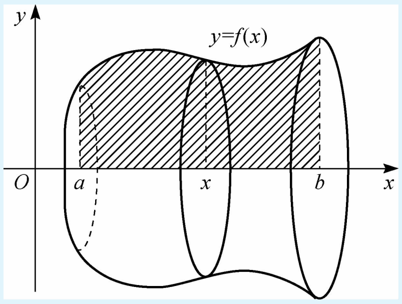


图 3.2.6

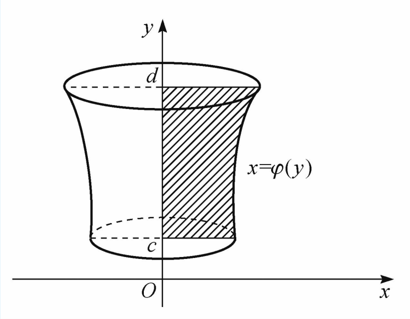


图 3.2.7

例题 3.2.17　求 $y=\cos x\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$与 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积.

【解析】　根据旋转体的体积公式,所求旋转体体积为

$$V=\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos 2x+1)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\left(\frac{\sin 2x}{2}+x\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{2}.$$

例题 3.2.18　如图 3.2.8,求高为 h 的球缺的体积,其中球的半径为 R.

【解析】　此球缺的体积可以看成由 $x=\sqrt{R^2-y^2}(R-h\leqslant y\leqslant R)$的一段圆弧与直线 $y=R-h$ 及 y 轴所围成的图形绕 y 轴旋转一周所形成的,从而其体积为

$$V=\pi\int_{R-h}^{R}(\sqrt{R^2-y^2})^2\mathrm{d}y=\pi\int_{R-h}^{R}(R^2-y^2)\mathrm{d}y=\pi\left(R^2y-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{R-h}^{R}=\pi h^2\left(R-\frac{1}{3}h\right).$$

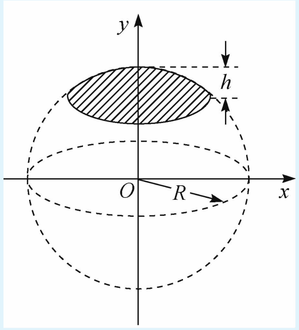


图 3.2.8

巩固练习

1. 设 $f(x)$是 $2x$ 的一个原函数,且 $f(0)=1$,则$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=$(　　).

A. $-\frac{4}{3}$　　B. $-\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{4}{3}$

2. $\int_{-\pi}^{\pi}(x\cos x)\mathrm{d}x=$(　　).

A. 1　　B. 2π　　C. π　　D. 0

3. $S_1=\int_1^2 x^2\mathrm{d}x$,$S_2=\int_1^2\frac{1}{x}\mathrm{d}x$,则 S_1 与 S_2 的大小关系是(　　)。

A. $S_1<S_2$　　B. $S_1=S_2$

C. $S_1>S_2$　　D. 不确定

4. $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\int_0^x(\mathrm{e}^t-1)\mathrm{d}t}{1-\cos x}=$________.

5. 由曲线 $y=\frac{1}{x}$,直线 $y=4x$ 及 $x=2$ 围成的平面图形的面积为________.

6. 由曲线 $y=\sqrt[3]{x}$与直线 $y=x$ 所围成的平面图形的面积为________.

7. 求曲线 $y=x^2-8$ 与直线 $2x+y+8=0$,$y=-4$ 所围成图形的面积.

8. 求由曲线 $y=\cos x$,$y=\sin x$,直线 $x=\frac{\pi}{6}$及 y 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周而成旋转体的体积.

考点总结

考点一　不定积分的概念与性质

方法突破

1. 原函数与不定积分

如果函数在区间 I 上,$F'(x)=f(x)$,那么 $F(x)$是 $f(x)$的一个原函数. 如果函数 $f(x)$在区间 I 上存在原函数,那么 $f(x)$在区间 I 上有无穷多个原函数,并且任意两个原函数之间只相差一个常数,$f(x)$的全体原函数称为在区间 I 上的不定积分,记为$\int f(x)\,\mathrm{d}x=F(x)+C$($C$ 为任意常数).

不定积分是由函数关系决定的,所以积分变量采用的字母是无关紧要的,即$\int f(x)\mathrm{d}x=\int f(t)\mathrm{d}t$.

2. 不定积分的性质

$\left[\int f(x)\,\mathrm{d}x\right]' = f(x)$；　　$\mathrm{d}\left[\int f(x)\,\mathrm{d}x\right] = f(x)\mathrm{d}x$；

$\int f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x) + C$；　　$\int \mathrm{d}f(x) = f(x) + C$；

$\int [af(x) \pm bg(x)]\mathrm{d}x = a\int f(x)\,\mathrm{d}x \pm b\int g(x)\mathrm{d}x$.

例题 1　设 $f(x)$的一个原函数是 e^{x^2}，则 $f'(x)=$(　　).

A. xe^{x^2}　　B. $2x^2e^{x^2}$

C. $2(1+2x^2)e^{x^2}$　　D. $2(1+x^2)e^{x^2}$

【答案】　C

【解析】　因为 $f(x)$的一个原函数是 $F(x)=e^{x^2}$，所以

$$f(x)=F'(x)=(e^{x^2})'=2xe^{x^2},$$

从而

$$f'(x)=(2xe^{x^2})'=2e^{x^2}+4x^2e^{x^2}=2(1+2x^2)e^{x^2}.$$

例题 2　若 $\int f(x)\mathrm{d}x = e^{2x}+C$，则 $f(x)=$(　　).

A. e^{2x}　　B. $2e^{2x}$

C. $\frac{1}{2}e^{2x}+C$　　D. $e^{2x}+C$

【答案】　B

【解析】　$\int f(x)\mathrm{d}x = e^{2x}+C$ 两边求导，得 $f(x)=2e^{2x}$.

例题 3(2020 年 · 山东 · 数Ⅲ)　不定积分 $\int f'(x)\mathrm{d}x=$(　　).

A. $f(x)$　　B. $f'(x)$

C. $f(x)+C$　　D. $f'(x)+C$

【答案】　C

【解析】　因为 $f(x)$是 $f'(x)$的原函数，所以 $\int f'(x)\mathrm{d}x = f(x)+C$.

例题 4(2017 年 · 山东 · 财经类)　设 $F'(x)=f(x)$，则下式成立的是(　　).

A. $\int F'(x)\mathrm{d}x = f(x)+C$　　B. $\int f'(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$

C. $\int F(x)\mathrm{d}x = F'(x)+C$　　D. $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$

【答案】　D

【解析】　根据题意，$F(x)$是 $f(x)$的原函数，所以 $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$.

例题 5(2017 年·山东·交通运输) 设 $f(x)$为可导函数,则下列结果正确的是( ).

A. $\int f(x)\mathrm{d}x = f(x)$ B. $\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = f(x)$

C. $\int f'(x)\mathrm{d}x = f(x)$ D. $\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = f(x) + C$

【答案】 B

【解析】 $\int f'(x)\mathrm{d}x = f(x) + C$,$\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = f(x)$.

考点二 利用基本积分公式与不定积分的性质求不定积分

方法突破

基本积分公式是一元函数积分学的基础,如果被积函数是基本积分公式里的函数的线性组合,那么可以直接利用基本积分公式与不定积分的性质求解;如果被积函数不是基本积分公式里的函数的线性组合,那么可以先尝试使用恒等变换(三角函数使用三角恒等变换,分子分母都是有理函数使用多项式的除法),将被积函数变成可以套用基本积分公式的形式.

例题 6 求 $\int \frac{(x-2)^2}{x^2}\mathrm{d}x$.

【解析】 $\int \frac{(x-2)^2}{x^2}\mathrm{d}x = \int \frac{x^2-4x+4}{x^2}\mathrm{d}x = \int \left(1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}\right)\mathrm{d}x = x - 4\ln x - \frac{4}{x} + C$.

例题 7 求$\int 2^{3x}\cdot \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$.

【解析】 原式$=\int (8\mathrm{e}^2)^x\mathrm{d}x = \frac{(8\mathrm{e}^2)^x}{\ln(8\mathrm{e}^2)} + C = \frac{2^{3x}\cdot \mathrm{e}^{2x}}{3\ln 2 + 2} + C$.

例题 8 求$\int \cos^2\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$.

【解析】 原式 $=\int \frac{1+\cos x}{2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin x + C$.

例题 9(2017 年·山东·土木工程) $\int x(1+2x)^2\mathrm{d}x =$ ________.

【答案】 $x^4+\frac{4}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+C$

【解析】 $\int x(1+2x)^2\mathrm{d}x = \int (4x^3+4x^2+x)\mathrm{d}x = 4\int x^3\,\mathrm{d}x + 4\int x^2\,\mathrm{d}x + \int x\,\mathrm{d}x = x^4 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C$.

例题 10(2016 年·山东·土木工程) $\int \sqrt{x}(x^2-5)\mathrm{d}x =$ ________.

【答案】 $\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} - \frac{10}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$

【解析】 $\int \sqrt{x}(x^2-5)\mathrm{d}x = \int x^{\frac{5}{2}}\,\mathrm{d}x - 5\int x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} - \frac{10}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$.

考点三　利用第一换元积分法求不定积分

方法突破

第一换元积分法的主要思想是凑微分，即引入中间变量 $u=u(x)$，将被积函数化为 $f(u(x))u'(x)$（或 $f(u(x))\mathrm{d}u(x)$）的形式. 常见的凑微分公式如下.

$\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\mathrm{d}(ax+b)$；　$x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}(x^2)$；　$x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\mathrm{d}(x^3)$；

$\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\mathrm{d}(\sqrt{x})$；　$\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\ln|x|)$；　$\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=-\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)$；

$\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)$；　$\sin x\mathrm{d}x=-\mathrm{d}(\cos x)$；　$\cos x\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\sin x)$；

$\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\arctan x)$；　$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\arcsin x)$；　$\sec^2 x\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\tan x)$.

例题 11　求 $\int\cos(3x-1)\mathrm{d}x$.

【解析】　原式 $=\frac{1}{3}\int\cos(3x-1)\mathrm{d}(3x-1)=\frac{1}{3}\sin(3x-1)+C$.

例题 12　求 $\int x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$.

【解析】　原式 $=-\frac{1}{2}\int\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}(-x^2)=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}+C$.

例题 13　求 $\int\sin^3 x\,\mathrm{d}x$.

【解析】　原式 $=-\int\sin^2 x\,\mathrm{d}(\cos x)=-\int(1-\cos^2 x)\,\mathrm{d}(\cos x)=-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x+C$.

例题 14　求 $\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x$.

【解析】　原式 $=\frac{1}{a}\int\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\mathrm{d}x=\frac{a}{a}\int\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}}\mathrm{d}\left(\frac{x}{a}\right)=\arcsin(\frac{x}{a})+C$.

例题 15　求 $\int\frac{1}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x$.

【解析】　原式 $=\int\frac{1}{1+(x+1)^2}\mathrm{d}(x+1)=\arctan(x+1)+C$.

例题 16　求 $\int\frac{2x+\mathrm{e}^{-x}}{x^2-\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x$.

【解析】　原式 $=\int\frac{1}{x^2-\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}(x^2-\mathrm{e}^{-x})=\ln|x^2-\mathrm{e}^{-x}|+C$.

例题 17　求 $\int\frac{1}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x$.

【解析】 原式 $=\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx=\int \frac{1}{e^{2x}+1}d(e^x)=\arctan(e^x)+C.$

例题 18(2021 年·山东·数Ⅲ) 已知$\int f(x)dx=F(x)+C$,则$\int f(3x+2)dx=$( ).

A. $F(3x+2)+C$

B. $3F(3x+2)+C$

C. $\frac{1}{2}F(3x+2)+C$

D. $\frac{1}{3}F(3x+2)+C$

【答案】 D

【解析】 $\int f(3x+2)dx=\frac{1}{3}\int f(3x+2)d(3x+2)=\frac{1}{3}F(3x+2)+C.$

例题 19(2016 年·山东·国际经济与贸易) 如果 $f(x)=e^x$,则$\int \frac{f'(\ln x)}{x}dx=$( ).

A. $-\frac{1}{x}+C$

B. $-x+C$

C. $\frac{1}{x}+C$

D. $x+C$

【答案】 D

【解析】 $\int \frac{f'(\ln x)}{x}dx=\int f'(\ln x)d\ln x=f(\ln x)+C=e^{\ln x}+C=x+C.$

例题 20(2020 年·山东·数Ⅰ) 求不定积分$\int \frac{\sqrt{x}+\ln x}{x}dx.$

【解析】 $\int \frac{\sqrt{x}+\ln x}{x}dx=\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx+\int \frac{\ln x}{x}dx=2\sqrt{x}+\int \ln x d(\ln x)=2\sqrt{x}+\frac{(\ln x)^2}{2}+C.$

例题 21(2022 年·山东·数Ⅲ) 已知函数$\int f(x)\,dx=e^x\sin x+C$,则$\int \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx=$( )

A. $e^x\sin x+C$

B. $2e^x\sin x+C$

C. $e^{\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}+C$

D. $2e^{\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}+C$

【答案】 D

【解析】 根据题意,$\int \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx=2\int f(\sqrt{x})\,d\sqrt{x}=2e^{\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}+C.$

例题 22(2016 年·山东) 若$\int xf(x)dx=\arcsin x+C$,求 $I=\int \frac{1}{f(x)}dx.$

【解析】 等号两边对 x 求导,得

$$xf(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

于是$\frac{1}{f(x)}=x\sqrt{1-x^2}$,从而

$$\int \frac{1}{f(x)}dx=\int x\sqrt{1-x^2}dx=-\frac{1}{2}\int \sqrt{1-x^2}d(1-x^2)=-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+C.$$

考点四　利用第二换元积分法求不定积分

方法突破

第二换元积分法的主要思想是，引入新的变量 t，将 x 看成关于 t 的函数 $x=\varphi(t)$（$\varphi(t)$ 可逆），从而将 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 化为易求积分的 $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$ 的形式．常见的变量 t 的选取方法如下．

（1）被积函数只含有一个 $\sqrt[n]{ax+b}$ 型根式时，令 $\sqrt[n]{ax+b}=t$，即 $x=\dfrac{1}{a}(t^n-b)$，此时 $\mathrm{d}x=\dfrac{n}{a}t^{n-1}\mathrm{d}t$；

（2）被积函数含有两个或两个以上的 $\sqrt[a]{x}$ 型根式，即 $\sqrt[a]{x},\sqrt[b]{x},\cdots,\sqrt[n]{x}$ 时，令 $\sqrt[u]{x}=t$（u 是 $a,b,\cdots,n$ 的最小公倍数），即 $x=t^u$，此时 $\mathrm{d}x=ut^{u-1}\mathrm{d}t$；

（3）被积函数包含 $\sqrt{a^2-x^2}\,(a>0)$ 时，可令 $x=a\sin t$ 或 $x=a\cos t$，此时 $\mathrm{d}x=a\cos t\,\mathrm{d}t$ 或 $\mathrm{d}x=-a\sin t\mathrm{d}t$.

例题 23　求 $\displaystyle\int\frac{x}{1+\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x$.

【解析】　令 $\sqrt{1-x}=t$，则 $x=1-t^2$，$\mathrm{d}x=-2t\mathrm{d}t$，于是

$$
\begin{aligned}
\text{原式}&=-\int\frac{1-t^2}{1+t}\cdot 2t\,\mathrm{d}t=2\int(t^2-t)\mathrm{d}t\\
&=\frac{2}{3}t^3-t^2+C_1=\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}+x+C.
\end{aligned}
$$

例题 24　求不定积分 $\displaystyle\int\frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}\mathrm{d}x$.

【解析】　令 $\sqrt[6]{x}=t$，则 $x=t^6$，$\mathrm{d}x=6t^5$，于是

$$
\begin{aligned}
\int\frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}\mathrm{d}x&=\int\frac{6}{t^2+t}\mathrm{d}t=6\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t\\
&=6[\ln t-\ln(t+1)]+C\\
&=\ln x-6\ln(\sqrt[6]{x}+1)+C.
\end{aligned}
$$

例题 25　求 $\displaystyle\int\frac{x^3}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x\,(a>0)$.

【解析】　令 $x=a\sin t$，则 $\mathrm{d}x=a\cos t\mathrm{d}t$，于是

$$
\begin{aligned}
\text{原式}&=\int\frac{a^3\sin^3 t}{a\cos t}\cdot a\cos t\mathrm{d}t\\
&=-a^3\int(1-\cos^2 t)\mathrm{d}(\cos t)\\
&=-a^3\cos t+\frac{a^3}{3}\cos^3 t+C\\
&=-a^3\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}+\frac{a^3}{3}\left(\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}\right)^3+C\\
&=-a^2\sqrt{a^2-x^2}+\frac{1}{3}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}+C.
\end{aligned}
$$

例题 26(2021 年·山东·数Ⅱ) 求不定积分 $\int \frac{\sin^2 x\cos x}{1+4\sin^2 x}dx$.

【解析】 令 $t=\sin x$,则 $\frac{\sin^2 x\cos x}{1+4\sin^2 x}dx=\frac{t^2}{1+4t^2}dt$,于是

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin^2 x\cos x}{1+4\sin^2 x}\,dx &= \int \frac{t^2}{1+4t^2}dt = \int \frac{t^2+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}}{1+4t^2}dt \\ &= \frac{1}{4}\int dt-\frac{1}{8}\int \frac{1}{1+(2t)^2}d(2t) \\ &= \frac{t}{4}-\frac{1}{8}\arctan 2t+C \\ &= \frac{1}{4}\sin x-\frac{1}{8}\arctan(2\sin x)+C.\end{aligned}$$

考点五 利用分部积分法求不定积分

方法突破

分部积分法主要用来处理不同类型函数相乘的问题,使用的关键是将被积函数 $f(x)$凑成 $u(x)\cdot v'(x)$的形式.常见的 $u(x)$,$v'(x)$的选取方法如下.

(1)被积函数 $f(x)$的形式为 $P_n(x)e^{ax}$($P_n(x)$为 n 次多项式),$P_n(x)\sin ax$,$P_n(x)\cos ax$ 时,$P_n(x)$为 $u(x)$,e^{ax},$\sin ax$,$\cos ax$ 为 $v'(x)$;

(2)被积函数 $f(x)$的形式为 $P_n(x)\ln x$,$P_n(x)\arcsin x$,$P_n(x)\arccos x$,$P_n(x)\arctan x$ 时,取 $\ln x$,$\arcsin x$,$\arccos x$,$\arctan x$ 为 $u(x)$,$P_n(x)$为 $v'(x)$.

例题 27(2017 年·山东·国际贸易) 求不定积分 $\int x\,e^x dx$.

【解析】 $\int x\,e^x dx=\int x de^x=xe^x-\int e^x dx=xe^x-e^x+C$.

例题 28(2021 年·山东·数Ⅰ) 求不定积分 $\int \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}dx$.

【解析】 $\int \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\,dx=-\int \ln(1+x^2)d\left(\frac{1}{x}\right)=-\left[\frac{1}{x}\ln(1+x^2)-\int \frac{1}{x}d[\ln(1+x^2)]\right]$.

$$\begin{aligned}&=-\frac{1}{x}\ln(1+x^2)+\int \frac{1}{x}\cdot\frac{2x}{1+x^2}dx \\ &=-\frac{1}{x}\ln(1+x^2)+2\int \frac{1}{1+x^2}dx \\ &=-\frac{1}{x}\ln(1+x^2)+2\arctan x+C.\end{aligned}$$

例题 29(2022 年·山东·数Ⅱ) 求不定积分 $\int (x\cos x+\sec^2 x)\,dx$.

【解析】 $\int (x\cos x+\sec^2 x)\,dx=\int x\cos x\,dx+\int \sec^2 x dx$

$$=\int x\mathrm{d}\sin x+\tan x$$

$$=x\sin x-\int \sin x\,\mathrm{d}x+\tan x$$

$$=x\sin x+\cos x+\tan x+C.$$

例题 30(2022 年 · 山东 · 数Ⅰ) 求不定积分$\int(2x\ln x+\sin x)\mathrm{d}x$.

【解析】 $\int(2x\ln x+\sin x)\mathrm{d}x=\int 2x\ln x\mathrm{d}x+\int\sin x\mathrm{d}x.$

$$=x^2\ln x-\int x^2\mathrm{d}(\ln x)-\cos x$$

$$=x^2\ln x-\int x\mathrm{d}x-\cos x$$

$$=x^2\ln x-\frac{1}{2}x^2-\cos x+C.$$

例题 31(2017 年 · 山东 · 电气工程) 求不定积分$\int x^2\arctan x\mathrm{d}x$.

【解析】 $\int x^2\arctan x\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int\arctan x\mathrm{d}(x^3)=\frac{1}{3}\left(x^3\arctan x-\int x^3\cdot\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x\right)$

$$=\frac{1}{3}x^3\arctan x-\frac{1}{6}\int\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}(x^2)$$

$$=\frac{1}{3}x^3\arctan x-\frac{1}{6}\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}(x^2)$$

$$=\frac{1}{3}x^3\arctan x-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{6}\ln(1+x^2)+C.$$

例题 32(2017 年 · 山东 · 交通运输) 求$\int\frac{x^2\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

【解析】 $\int\frac{x^2\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int\arctan x\mathrm{d}x-\int\frac{\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x$

$$=x\arctan x-\int\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x-\int\arctan x\mathrm{d}(\arctan x)$$

$$=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}\arctan^2 x+C.$$

例题 33(2017 年 · 山东 · 机械设计制造) 求不定积分$\int\frac{\ln\cos x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

【解析】 $\int\frac{\ln\cos x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int\ln\cos x\mathrm{d}(\tan x)=\tan x\ln\cos x+\int\tan x\frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x$

$$=\tan x\ln\cos x+\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

$$=\tan x\ln\cos x+\int\sec^2 x\mathrm{d}x-\int\mathrm{d}x$$

$$=\tan x\ln\cos x+\tan x-x+C.$$