第一章

集合与逻辑用语

考纲揭秘

1. 理解集合的概念，掌握集合的表示法，掌握集合之间的关系，掌握集合的交、并、补运算.
2. 能正确地区分充分、必要、充要条件.
3. 理解符号$\in$、$\notin$、$=$、$\subseteq$、$\supseteq$、$\nsubseteq$、$\nsupseteq$、$\subsetneqq$、$\supsetneqq$、$\cap$、$\cup$、$\complement_U A$、$\Rightarrow$、$\Leftarrow$、$\Leftrightarrow$的含义.
4. 了解命题的有关概念，能判断一个命题的真假.
5. 理解全称量词和存在量词，理解全称命题和存在性命题.
6. 理解逻辑联结词“且”“或”“非”的含义，能判断复合命题的真值.
7. 理解符号$\forall$、$\exists$、$\wedge$、$\vee$、$\neg$的含义.

命题趋势

本章内容在历年真题中多以选择题形式出现，要求不高，难度不大. 主要从四个方面考查：一是考查集合的概念、集合的基本关系及常用数集的符号表示；二是考查集合的基本运算. 命题常以两个集合的交集、并集和补集运算为主，多与绝对值、不等式等相结合；三是考查充分条件、必要条件和充要条件的判定，多与函数等相结合；四是考查命题与逻辑联结词的应用. 本章是考试的必考内容，也是比较容易拿分的知识，其中，集合的运算、逻辑用语和充要条件是每年必考的内容.

第一节 集合及其表示

知识清单

知识点一 集合的概念

1. 集合

一般地,我们把一些__________的对象看成一个整体,就说这个整体是由这些对象的全体构成的集合,常用大写的拉丁字母__________表示.

2. 元素

构成集合的每个对象都叫作集合的元素,常用小写的拉丁字母__________表示.

3. 元素与集合的关系及性质

如果 a 是集合 A 的元素,就说 a 属于 A,记作__________;如果 a 不是集合 A 的元素,就说 a 不属于 A,记作__________. 集合中的元素具有__________、__________的特征.

4. 集合的分类

(1)按元素个数分类:

①有限集. 含有元素的个数有限的集合叫作有限集.

②无限集. 含有元素的个数无限的集合叫作无限集.

③空集. 不含任何元素的集合叫作空集,记作______.

注意:$\varnothing$ 不是 $\{0\}$.

(2)按元素的特征分类:数集、点集等.

5. 常用的集合

(1)自然数集:非负整数全体构成的集合,记作______.

(2)正整数集:在自然数集内排除 0 的集合,记作______或______.

(3)整数集:整数全体构成的集合,记作______.

(4)有理数集:有理数全体构成的集合,记作______.

(5)实数集:实数全体构成的集合,记作______.

知识点二 集合的表示法

1. 列举法

把集合的元素__________出来,写在__________内,这种表示集合的方法叫作列举法.

注意：用列举法表示集合时，要注意以下几点：

(1)元素之间用逗号“,”隔开.

(2)元素不能重复(满足集合中元素的互异性).

(3)元素不能遗漏.

(4)当集合中的元素较少时，用列举法比较简单；当集合中的元素较多或无限，但存在一定的规律时，在不发生误解的情况下，也可以用列举法表示.

2. 性质描述法

用集合的__________表示集合的方法称为性质描述法.

性质描述法表示集合的一般形式是__________，其中“x”是集合中任一元素并标出元素的取舍范围 U，“p”是集合中元素的共同特征性质，两者之间的竖线不可省略.

注意：用性质描述法表示集合时，要注意以下几点：

(1)写清楚集合中元素的代表形式(一般用小写字母表示).

(2)写明集合中元素的特征或性质.

(3)用于描述元素特征的语句要力求简明、准确，不产生歧义；多层描述时，应当准确使用“且”“或”等关联词.

(4)所有描述的内容都要写在大括号内.

(5)在不引起混淆的情况下，用性质描述法表示集合有时也可以省去竖线和竖线左边的部分. 例如，正整数的集合可简记为{正整数}，但是，集合$\{x|x>1\}$就不能省略竖线及其左边的“x”.

知识清单答案

知识点一　集合的概念

1. 能够确定　$A,B,C,\cdots$

2. $a,b,c,\cdots$

3. $a\in A$　$a\notin A$　确定性　互异性

4. (1)③$\varnothing$

5. (1)$\mathbf{N}$　(2)$\mathbf{N}_+$　$\mathbf{N}^*$　(3)$\mathbf{Z}$　(4)$\mathbf{Q}$　(5)$\mathbf{R}$

知识点二　集合的表示法

1. 一一列举　大括号

2. 特征性质　$\{x\in U|p\}$

典例剖析

题型一　集合的概念

例 1　在下列每组对象中：

(1)我国著名的数学家；

(2)超过 10 的所有自然数；

(3)某校 2020 年新入学的高个子学生；

(4)方程 $x-1=0$ 的实数解；

(5)在直角坐标平面内，第二象限的所有点.

其中能构成集合的是(　　).

A.(1)(2)(3)　　B.(2)(3)(4)　　C.(2)(4)(5)　　D.(3)(4)(5)

解析　(1)"我国著名的数学家"不是一个明确的标准，不能构成一个集合；(3)"高个子学生"这一标准也不确定，无法判定某人是高还是矮，也不能构成集合；(2)(4)的对象是确定的；(5)的对象虽然有无限个，但它是确定的.因此选 C.

技巧点拨　判断某组对象能否构成集合，关键看对象是否为整体的和确定的.标准一定要是明确的，不能模糊，否则无法判断.

变式训练 1

下列语句中，能构成集合的是(　　).

A. 我班数学好的男生　　B. 与 0 接近的全体实数

C. 大于 π 的自然数　　D. 优秀的中等职业学校

题型二　集合与元素的关系及性质

例 2　已知集合 $A=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 3,x\in\mathbf{Z},y\in\mathbf{Z}\}$，则 A 中元素的个数为(　　).

A. 9　　B. 8　　C. 5　　D. 4

解析　由 $x^2+y^2\leqslant 3$ 可知，$-\sqrt{3}\leqslant x\leqslant\sqrt{3}$，$-\sqrt{3}\leqslant y\leqslant\sqrt{3}$.又因为 $x\in\mathbf{Z}$，$y\in\mathbf{Z}$，所以 $x\in\{-1,0,1\}$，$y\in\{-1,0,1\}$.所以 A 中元素的个数为 9.

技巧点拨　对于求解集合中元素个数的题目，首先求出集合，然后根据集合中元素的互异性求出集合中元素的个数，或利用数形结合的方法求出集合中元素的个数.

变式训练 2

已知集合 $A=\{1,2,4\}$，集合 $B=\{x|x=a+b,a\in A,b\in A\}$，则集合 B 中元素的个数为________.

题型三　集合的表示方法

例 3　用列举法表示下列集合.

(1)$A=\{x|-2<x<5,x\in\mathbf{Z}\}$；

(2)$B=\{(x,y)|2x+y=5,x\in\mathbf{N},y\in\mathbf{N}\}$.

解析 (1)$A=\{-1,0,1,2,3,4\}$;(2)$B=\{(0,5),(1,3),(2,1)\}$.

技巧点拨 掌握集合的两种表示方法.

变式训练 3

用合适的方法表示下列集合.

(1)$\{11,12,13,14,15,\cdots\}$;

(2)$\{1,4,9,16,25,36\}$.

实战训练

基础巩固

1. 下列命题所列对象中,能组成集合的是 ( )

A. 有趣的书　B. 非常小的数　C. 好听的歌　D. 小于 3 的数

2. 用列举法表示集合$\{x|x^2-3x+2=0\}$的结果是 ( )

A. $(1,2)$　B. $1,2$　C. $\{1,2\}$　D. 以上都不是

3. 用列举法表示"大于 2 且小于 9 的偶数的全体"构成的集合是 ( )

A. $\varnothing$　B. $\{4,6,8\}$　C. $\{3,5,7\}$　D. $\{3,4,5,6,7,8\}$

4. 用描述法表示"绝对值等于 1 的所有整数"组成的集合是 ( )

A. $\{-1,1\}$　B. $(-1,1)$　C. $\{x||x|=1,x\in \mathbf{Z}\}$　D. $\{x|x=1,x\in \mathbf{Z}\}$

5. 下列命题中,可以确定一个集合的是 ( )

A. 全体有理数　B. 无限趋近于 2 的实数

C. 由 1,2,3,3,4,4,5,6,8 构成的全体　D. 本班性格外向的同学

6. 不大于 3 的正整数的集合是 ( )

A. $\{0,1,2,3\}$　B. $\{1,2,3\}$　C. $\{x|0\leqslant x\leqslant 3\}$　D. $\{x|x\leqslant 3\}$

7. 用列举法表示"大于 2 且小于 5 的整数"构成的集合是 ( )

A. $\{x|2<x<5\}$　B. $\{x|2<x<5,x\in \mathbf{Z}\}$　C. $\{2,3,4,5\}$　D. $\{3,4\}$

8. 已知集合 $A=\{x|1<x<2\}$,$a=\sqrt{5}$,则下列关系中,正确的是 ( )

A. $a\in A$　B. $a\notin A$　C. $\{a\}\in A$　D. $\{a\}\notin A$

能力提升

1. 由坐标平面内不在坐标轴上的点组成的集合是 ( )

A. $\{(x,y)|x\neq 0\}$　B. $\{(x,y)|y\neq 0\}$　C. $\{(x,y)|xy\neq 0\}$　D. $\{(x,y)|xy=0\}$

2. 下列选项中,表述正确的是 ( )

A. 由 1,3,5,7,5,3 组成的集合中有 6 个元素

B. 周长为 16 cm 的三角形组成的集合是有限集合

C. 集合$\{0\}$是空集

D. 一年级(3)班的所有同学可以组成集合

3. 已知集合$A=\{x|ax^2+2x+1=0,x\in\mathbf{R}\}$.

(1)若A中只有一个元素,求a的值;

(2)若A中恰有两个元素,求a的取值范围;

(3)若A中至多只有一个元素,求a的取值范围.

第二节 集合之间的关系及运算

知识清单

知识点一 集合间的关系

1. 子集

一般地,对于两个集合A,B,如果集合A中任何一个元素都是集合B的元素,那么,集合A就叫作集合B的子集,记作________或________,读作"A包含于B"或"B包含A".

当集合A不包含于集合B或集合B不包含集合A时,记作________或________.

性质:任何一个集合是它本身的子集,即$A\subseteq A$;空集是任何集合的子集,即$\varnothing\subseteq A$;对集合A,B,C,若$A\subseteq B$,$B\subseteq C$,则$A\subseteq C$.

注意:不能把子集说成由原来集合中的部分元素组成的集合,因为A的子集包括它本身,而这个子集由A的全体元素组成;空集也是A的子集,但这个子集中不包括A中的任何元素.

2. 真子集

如果A是B的子集,并且B中至少有一个元素不属于A,则A是B的真子集(A包含于B但不等于B),记作________或________.

性质:空集是任何非空集合的真子集;对于集合A,B,C,若$A\subsetneqq B$,$B\subsetneqq C$,则$A\subsetneqq C$.

注意:元素与集合之间是属于关系,集合与集合之间是包含关系.

3. 集合相等

如果两个集合的元素完全相同,那么我们就说这两个集合相等. 集合A等于集合B,记作______.

注意:要判断两个集合是否相等,对于元素较少的有限集,主要看它们的元素是否完全相同;若是无限集,则从"互为子集"入手进行判断.

知识点二 集合的运算

1. 交集

一般地,给定两个集合A,B,由属于集合A且属于集合B的所有元素构成的集合,叫作A与B的

交集，记作 $A\cap B$，读作"A 交 B"，即 $A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$.

性质：

(1)$A\cap B=B\cap A$.

(2)$A\cap A=$____.

(3)$A\cap\varnothing=$____.

(4)$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

(5)若 $A\subseteq B$，则 $A\cap B=$____.

2. 并集

一般地，给定两个集合 A,B，由属于集合 A 或属于集合 B 的元素构成的集合，叫作 A 与 B 的并集，记作 $A\cup B$，读作"A 并 B"，即 $A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$.

性质：

(1)$A\cup B=B\cup A$.

(2)$A\cup A=$____.

(3)$A\cup\varnothing=$____.

(4)$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$.

(5)若 $A\subseteq B$，则 $A\cup B=$____.

3. 图示两个集合的交集、并集

(1)用 Venn 图表示两个集合的交集、并集(见图 1-1).

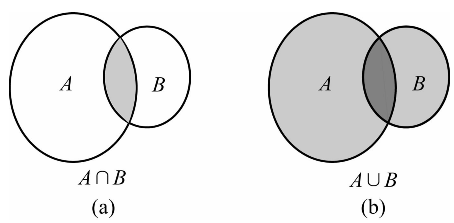

图 1-1

(2)借助数轴表示数集的交集、并集(见图 1-2).

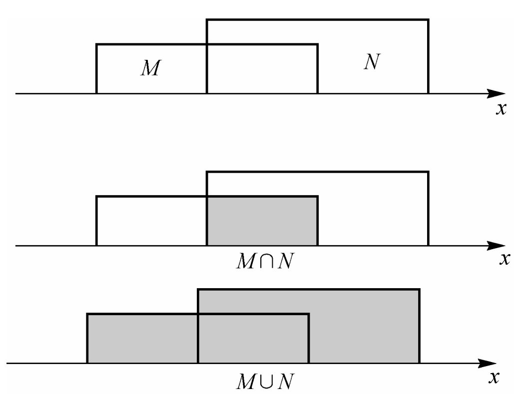

图 1-2

4. 全集

一般地，如果在讨论的问题中，每一个集合都是某一给定集合 U 的子集，那么称 U 为这些集合的全集.

注意：全集是一个相对的概念，在不同的情况下全集的概念也不同.

5. 补集

如果 A 是全集 U 的一个子集，由全集 U 中的所有不属于 A 的元素构成的集合，叫作 A 在 U 中的

补集,记作$\complement_U A$,读作"A 在 U 中的补集".

性质:

(1)$A\cup(\complement_U A)=$____.

(2)$A\cap(\complement_U A)=$____.

(3)$\complement_U(\complement_U A)=$____.

(4)$\complement_U\varnothing=$____,$\complement_U U=$____.

知识清单答案

知识点一 集合间的关系

1. $A\subseteq B$ $B\supseteq A$ $A\not\subseteq B$ $B\not\supseteq A$

2. $A\subsetneqq B$ $B\supsetneqq A$

3. $A=B$

知识点二 集合的运算

1. (2)A (3)$\varnothing$ (5)A

2. (2)A (3)A (5)B

5. (1)U (2)$\varnothing$ (3)A (4)U $\varnothing$

典例剖析

题型一 元素与集合、集合与集合之间的关系

例 1 设集合 $A=\{0\}$,下列结论正确的是( ).

A. $A=0$ B. $A\subseteq\varnothing$ C. $0\in A$ D. $\varnothing\in A$

解析 本题考查了元素与集合、集合与集合之间的关系.答案选 C.

技巧点拨 正确理解符号$\in,\notin,\subseteq,\subsetneqq$的意义,是正确处理此类问题的关键.

变式训练 1

下列说法中,正确的有( ).

①空集没有子集;②任何集合至少有两个子集;③空集是任何集合的真子集;④若$\varnothing\subsetneqq A$,则 $A\neq\varnothing$.

A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

题型二 由集合之间的关系求未知数的值或范围

例 2 已知集合 $A=\{x\mid x^2-x-2=0\}$,$B=\{x\mid x^2-4x+p=0\}$,若 $B\subseteq A$,求实数 p 的取值范围.

解析 由题意得:$A=\{-1,2\}$,因为 $B\subseteq A$,所以 $B=\varnothing$ 或 $B=\{-1\}$ 或 $B=\{2\}$ 或 $B=\{-1,2\}$.

又因为 $B=\{x|x^2-4x+p=0\}$，所以 $B=\{-1,2\}$ 不成立.

当 $B=\varnothing$ 时，$\Delta=(-4)^2-4p=16-4p<0$，解得 $p>4$；

当 $B=\{-1\}$ 时，$\begin{cases}\Delta=16-4p=0,\\(-1)^2-4\times(-1)+p=0,\end{cases}$ 无解；

当 $B=\{2\}$ 时，$\Delta=16-4p=0$，$2^2-4\times2+p=0$，解得 $p=4$.

综上所述，实数 p 的取值范围是 $p\in[4,+\infty)$.

技巧点拨 两个集合包含或相等关系的问题，通过建立方程(组)，然后解出未知数，最后利用集合元素的特征进行检验即可.

变式训练 2

已知集合 $A=\{1,1+m,1+2m\}$，$B=\{1,n,n^2\}$，其中 $m,n\in\mathbf{R}$，若 $A=B$，求 m,n 的值.

题型三 集合的运算

例 3 设全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x|0\leqslant x<2\}$，集合 $B=\{x|x^2-2x-3<0\}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$，$\complement_U A\cap B$.

解析 $B=\{x|x^2-2x-3<0\}=\{x|-1<x<3\}$，$\complement_U A=\{x|x<0$ 或 $x\geqslant2\}$，所以 $A\cap B=\{x|0\leqslant x<2\}$，$A\cup B=\{x|-1<x<3\}$，$\complement_U A\cap B=\{x|-1<x<0$ 或 $2\leqslant x<3\}$.

技巧点拨 考查对集合运算的理解及性质的运用.

变式训练 3

设全集 $U=\{0,1,2,3,4\}$，集合 $A=\{0,1,2,3\}$，集合 $B=\{2,3,4\}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$，$\complement_U A\cup\complement_U B$.

题型四 由交、并、补确定未知量的范围

例 4 已知集合 $M=\{x|a\leqslant x\leqslant a+3\}$，$N=\{x|x<-1$ 或 $x>5\}$，若 $M\cap N=\varnothing$，求实数 a 的取值范围.

解析 如图 1-3 所示，要使 $M\cap N=\varnothing$，必须满足 $\begin{cases}a+3\leqslant5,\\a\geqslant-1,\end{cases}$ 解得 $-1\leqslant a\leqslant2$，所以实数 a 的取值范围为 $\{a|-1\leqslant a\leqslant2\}$.

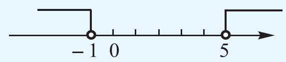

图 1-3

技巧点拨 解题时利用数轴表示集合，便于寻求满足条件的实数 a. 特别需要注意的是"端点值"的问题，判断能取"＝"还是不能取"＝".

变式训练 4

已知 $A=\{x|a\leqslant x\leqslant a+3\}$，$B=\{x|x>1$ 或 $x<-6\}$.

(1)若 $A\cap B=\varnothing$，求 a 的取值范围；

(2)若 $A\cup B=B$，求 a 的取值范围.

题型五 Venn 图的应用

例 5 U 为全集，集合 $M\subsetneqq U$，$N\subsetneqq U$，且 $N\subseteq M$，则(　　).

A. $(\complement_U M)\supseteq(\complement_U N)$　B. $(\complement_U M)\supseteq N$　C. $(\complement_U M)\subseteq(\complement_U N)$　D. $M\supseteq(\complement_U N)$

解析 根据各集合之间的关系作图(见图 1-4)，这样就很容易做出判断，故选 C.

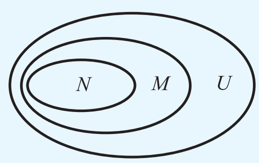

图 1-4

技巧点拨 (1)考虑集合之间的关系，用图形解答比较方便.

(2)在数学中利用"数形结合"的思想，往往能使问题简单化.

变式训练 5

U 为全集，M，N 为两个非空集合，且满足 $M\cap N=M$，则下列正确的是(　　).

A. $M\subsetneqq N$　B. $N\subsetneqq M$　C. $M=N$　D. $M\cap(\complement_U N)=\varnothing$

实战训练

基础巩固

一、选择题

1. 下面四个关系中，正确的个数为　(　　)

①$0\in\mathbf{Q}$； ②$\sqrt{2}\notin\mathbf{Q}$； ③$\mathbf{Z}\subseteq\mathbf{Q}$； ④$\varnothing\subsetneqq\{0\}$.

A. 4个　　B. 3个　　C. 2个　　D. 1个

2. 集合$\{1,2,3,4\}$所有子集的个数是　　(　　)

A. 8　　B. 14　　C. 15　　D. 16

3. 设集合$A=\{1,2,3\}$，$B=\{4,5,6\}$，则$A\cap B=$　　(　　)

A. $\varnothing$　　B. $\{3\}$　　C. $\{1,2\}$　　D. $\{1,2,3,4,5,6\}$

4. 设集合$A=\{0,1,2,3\}$，$B=\{-1,0,1\}$，则$A\cap B=$　　(　　)

A. $\varnothing$　　B. $\{0,1\}$　　C. $\{-1,0,1\}$　　D. $\{0,1,2,3\}$

5. 设集合$A=\{0,1\}$，$B=\{-1,0\}$，则$A\cup B=$　　(　　)

A. $\varnothing$　　B. $\{0\}$　　C. $\{-1,0,1\}$　　D. $\{0,1\}$

6. 设集合$A=\{x|-4<x<6,x\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{1,3,5\}$，则$A\cap B=$　　(　　)

A. $\varnothing$　　B. $\{1,3,5\}$　　C. $\{4,5\}$　　D. $\{1,2,3,4,5\}$

7. 设集合$A=\{-2,2\}$，$B=\{-1,2\}$，则$A\cup B=$　　(　　)

A. $\{2\}$　　B. $\{-2,-1\}$　　C. $\{-2,2\}$　　D. $\{-2,-1,2\}$

8. 设全集$U=\{1,2,3,4\}$，集合$A=\{2,3\}$，$B=\{1,4\}$，则$\complement_U B\cap A=$　　(　　)

A. $\varnothing$　　B. $\{1,4\}$　　C. $\{2,3\}$　　D. $\{1,2,3,4\}$

二、填空题

1. 用适当的符号($\in,\notin,\subseteq,\supseteq,=$)填空.

3__________$\{2,3\}$；　　π__________$\mathbf{Q}$；　　$\{1,2,3\}$__________$\mathbf{Z}$；

$\mathbf{N}_+$__________$\mathbf{Z}$；　　$\{-3,3\}$__________$\{x|x^2=9\}$.

2. 已知集合$P=\{x|2<x<a,x\in\mathbf{N}\}$，且集合$P$中恰有3个元素，则整数$a=$__________.

3. 关系式①$\{a,b\}\subseteq\{b,a\}$；②$\{a,b\}=\{b,a\}$；③$0=\varnothing$；④$0\in\{0\}$；⑤$\varnothing\in\{0\}$；⑥$\varnothing\subseteq\{0\}$中正确的是__________.

4. 设全集$U=\mathbf{R}$，集合$A=\{x\mid x^2-x-2=0\}$，$B=\{x\mid |x|=y+1,y\in A\}$，则$\complement_U B=$__________.

5. 已知集合$A=\{1,2,3\}$，$B=\{1,a\}$，$A\cap B=\{1,3\}$，则$A\cup B=$__________.

三、解答题

1. 已知集合$A=\{0,1,2\}$，集合$B=\{x|x=ab,a\in A,b\in A\}$，判断集合$B$和集合$A$的关系.

2. 写出集合$\{-3,-1,1,3\}$的所有子集，并指出哪些是真子集.

3. 已知集合 $A=\{x|x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x|ax+2=0\}$，且 $B\subsetneqq A$，求实数 a 的值组成的集合.

能力提升

1. 已知集合 $\{1,a,b\}$ 与 $\{-1,-b,1\}$ 是同一集合，求实数 a,b 的值.

2. 已知集合 $A=\{x|x^2-px+16=0\}$，$B=\{x|x^2-5x+q=0\}$，且 $A\cap B=\{2\}$，求 $A\cup B$.

真题链接

1. (2022 山东春考)已知集合 $M=\{1,2\}$，$N=\{2,3,x\}$，若 $M\subseteq N$，则实数 x 的值是 ( )

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

【答案】A　**解析：**因为 $M\subseteq N$，故 $x=1$.

2. (2021 山东春考)已知集合 $U=\{0,1,2,3,4\}$，集合 $M=\{1,2,3\}$，$N=\{2,4\}$，则 $M\cap(\complement_U N)$ 等于 ( )

A. $\{2\}$　　B. $\{1,3\}$

C. $\{0,1,3\}$　　D. $\{0,1,2,3\}$

【答案】B　**解析：**因为 $\complement_U N=\{0,1,3\}$，所以 $M\cap(\complement_U N)=\{1,3\}$.

3. (2020 山东春考)已知全集 $U=\{a,b,c,d\}$，集合 $M=\{a,c\}$，则 $\complement_U M$ 等于 ( )

A. $\varnothing$　　B. $\{a,c\}$

C. $\{b,d\}$　　D. $\{a,b,c,d\}$

【答案】C　**解析：**根据集合交、并、补的定义运算可得.

4. (2019 山东春考)已知集合 $M=\{0,1\}$，$N=\{1,2\}$，则 $M\cup N$ 等于 ( )

A. $\{1\}$　　B. $\{0,2\}$

C. $\{0,1,2\}$　　D. $\varnothing$

【答案】C　**解析：**根据集合交、并、补的定义运算可得.

5. (2018 山东春考)已知集合 $M=\{a,b\}$，$N=\{b,c\}$，则 $M\cap N$ 等于 ( )

A. $\varnothing$　　B. $\{b\}$

C. $\{a,c\}$　　D. $\{a,b,c\}$

【答案】B 解析：因为 $M=\{a,b\}$，$N=\{b,c\}$，所以 $M\cap N=\{b\}$. 故选 B.

第三节 逻辑用语

知识清单

知识点一 命题

1. 命题的概念

能够判断______的语句称为命题.

2. 命题的真值

(1)当命题给出的判断正确或符合客观实际时，该命题为______，否则称该命题为______."真""假"常被称为命题的真值.

(2)没有真假意义的语句都不是命题. 如：感叹句，疑问句，祈使句等.

(3)有的语句尽管现在或将来也未必能判断真假，但它们所作判断是否符合客观实际这一点是确定的，也把它们算作命题.

知识点二 量词

常用的量词有__________和__________，用符号表示为____和____. 含有全称量词的命题称为__________；含有存在量词的命题称为__________.

知识点三 逻辑联结词

1. 逻辑联结词

常用的逻辑联结词有"且""或""非"，符号分别为"$\wedge$""$\vee$""$\neg$".

2. 常见的四种复合命题真值表

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p\wedge q$	$p\vee q$
真	真				
真	假				
假	真				
假	假				

知识清单答案

知识点一 命题

1. 真假 2. (1)真命题 假命题

知识点二 量词

全称量词 存在量词 $\forall$ $\exists$ 全称命题 存在性命题

知识点三　逻辑联结词

2.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p\wedge q$	$p\vee q$
真	真	假	假	真	真
真	假	假	真	假	真
假	真	真	假	假	真
假	假	真	真	假	假

典例剖析

题型一　正确理解命题的定义

例 1　下列语句是命题的是(　　).

A. 他真高!　　B. 今天天气怎么样?　　C. $2+1=3$　　D. 两直线平行

解析　感叹句和疑问句不是命题，A，B 错；D 无法判断真假，不是命题，故选 C.

技巧点拨　命题是能判断真假的语句，疑问句、祈使句等不是命题.

变式训练 1

下列语句中哪个不是命题(　　).

A. 地球绕着太阳转　　B. $3+4=7$　　C. $2x$　　D. 矩形的对角线相等

题型二　量词的应用

例 2　命题"$\exists x\in\mathbf{R},x^2+x\leqslant0$"的非命题是(　　).

A. $\forall x\in\mathbf{R},x^2+x\geqslant0$　　B. $\exists x\in\mathbf{R},x^2+x\geqslant0$

C. $\forall x\in\mathbf{R},x^2+x>0$　　D. $\exists x\in\mathbf{R},x^2+x>0$

解析　根据两个量词的关系可知选 C.

技巧点拨　全称命题的"非"是存在性命题，量词也要替换.

变式训练 2

写出下列命题的非.

(1) p: $\exists x\in\mathbf{R},x>0$;　　(2) q: $\forall x\in\mathbf{R},x^2\neq0$.

题型三 “且”“或”“非”命题真假的判断

例 3 如果 p 是假命题,q 是真命题,则下列命题是真命题的是( ).

A. $\neg q$　　B. $\neg(p\vee q)$　　C. $\neg p\wedge q$　　D. $p\wedge q$

解析 因为 p 是假命题,q 是真命题,所以 $\neg p$ 是真命题,$\neg q$ 是假命题,所以 $p\wedge q$ 是假命题,$p\vee q$ 是真命题,$\neg p\wedge q$ 是真命题,$\neg(p\vee q)$ 是假命题. 故选 C.

技巧点拨 $p\wedge q$:一假即假,都真才真;$p\vee q$:一真即真,都假才假;p 与 $\neg p$:真假相反.

变式训练 3

设命题 p:$\varnothing=0$;q:$2\geqslant 3$,则( ).

A. $p\vee q$ 为真　　B. $p\wedge q$ 为真　　C. p 为假　　D. $\neg p$ 为假

实战训练

基础巩固

一、选择题

1. 下列语句中,是命题的是 ( )

A. π 是无限不循环小数　　B. $3x\leqslant 5$

C. 什么是“绩效工资”　　D. 今天的天气真好呀!

2. 下列命题为真命题的是 ( )

A. 若 $\frac{1}{x}=\frac{1}{y}$,则 $x=y$　　B. 若 $x^2=1$,则 $x=1$

C. 若 $x=y$,则 $\sqrt{x}=\sqrt{y}$　　D. 若 $x<y$,则 $x^2<y^2$

3. 若命题“$\neg p$”与命题“$p\vee q$”都是真命题,那么 ( )

A. 命题 p 与命题 q 的真假相同　　B. 命题 p 一定是真命题

C. 命题 q 不一定是真命题　　D. 命题 q 一定是真命题

4. 如果命题“$\neg(p\vee q)$”为真命题,则 ( )

A. p,q 均为真命题　　B. p,q 均为假命题

C. p,q 中至少有一个为真命题　　D. p,q 中一个为真命题,一个为假命题

5. 已知命题 p:$\forall x\in\mathbf{R}$,$x^2+2x+2>0$,则 $\neg p$ 是 ( )

A. $\exists x_0\in\mathbf{R}$,$x_0^2+2x_0+2<0$　　B. $\forall x\in\mathbf{R}$,$x^2+2x+2<0$

C. $\exists x_0\in\mathbf{R}$,$x_0^2+2x_0+2\leqslant 0$　　D. $\forall x\in\mathbf{R}$,$x^2+2x+2\leqslant 0$

6. 由命题 p:“$8+2>10$”与 q:“ $1>2$”构成的命题,下列判断正确的是 ( )

A. $p\vee q$ 为真,$p\wedge q$ 为假　　B. $p\vee q$ 为假,$p\wedge q$ 为假

C. $p\vee q$ 为真,$p\wedge q$ 为假　　D. $p\vee q$ 为假,$p\wedge q$ 为真

7. 下列命题是真命题的是 ( )

A. $\forall x\in\mathbf{R}$,$(x-\sqrt{2})^2>0$　　B. $\forall x\in\mathbf{Q}$,$x^2>0$

C. $\exists x_0\in\mathbf{Z}$,$3x_0=812$　　D. $\exists x_0\in\mathbf{R}$,$3x_0-4=2$

8. 已知命题 p:2 是偶数,命题 q:$\forall x\in\mathbf{R}$,$x-1=2$,则下列命题为真命题的是 ( )

A. $p\wedge q$

B. $p\vee q$

C. $\neg p$

D. $(\neg p)\wedge(\neg q)$

二、填空题

1. 给出下列命题,

①若 $ac=bc$,则 $a=b$;

②方程 $x^2=0$ 无实数根;

③对于实数 x,若 $x-2=0$,则 $(x-2)(x+1)=0$;

④若 $p>0$,则 $p^2>p$;

⑤正方形不是菱形.

其中真命题是__________,假命题是__________.

2. 已知命题 p:π 是有理数,命题 q:$x^2\geqslant 0$. 给出下列结论:

(1)命题 $p\wedge q$ 是真命题;

(2)命题 $p\wedge(\neg q)$是假命题;

(3)命题$(\neg p)\vee q$ 是真命题;

(4)命题$(\neg p)\vee(\neg q)$是假命题,其中正确的是__________.

三、解答题

分别指出由下列各组命题构成的“$p\wedge q$”“$p\vee q$”“$\neg p$”形式的命题的真假:

(1)p:$6<6$,q:$6=6$;

(2)p:梯形的对角线相等,q:梯形的对角线互相平分.

能力提升

1.“红豆生南国,春来发几枝?愿君多采撷,此物最相思.”这是唐代诗人王维的《相思》,在这几句诗中,可作为命题的是 ( )

A. 红豆生南国　B. 春来发几枝　C. 愿君多采撷　D. 此物最相思

2. 已知命题 p:$\forall x\in\mathbf{R}$,$x-2>0$,命题 q:$\exists x_0\in\mathbf{N}$,$x_0-2>0$,则 ( )

A. p 假 q 真　B. p 真 q 假　C. p 假 q 假　D. p 真 q 真

真题链接

1. (2021 山东春考)已知命题 p:甲、乙、丙三名同学都是共青团员,则$\neg p$: ( )

A. 甲、乙、丙三名同学都不是共青团员

B. 甲、乙、丙三名同学中至少有一名不是共青团员

C. 甲、乙、丙三名同学中至少有两名不是共青团员

D. 甲、乙、丙三名同学中至多有一名不是共青团员

【答案】B　**解析:**$\neg p$:甲、乙、丙三名同学不都是共青团员,即至少有一名不是共青团员.

2. (2020 山东春考)下列命题为真命题的是 ( )

A. $1>0$ 且 $3>4$

B. $1>2$ 或 $4>5$

C. $\exists x\in\mathbf{R}$,$\cos x>1$

D. $\forall x\in\mathbf{R}$,$x^2\geqslant 0$

【答案】D　解析：A 中 $3<4$，故为假命题；B 中 $1<2,4<5$，故为假命题；C 中 $\cos x\leqslant1$，故为假命题，故选 D.

3.(2019 山东春考)设集合 $M=\{-2,0,2,4\}$，则下列命题为真命题的是　（　　）

A. $\forall a\in M$，a 是正数　　B. $\forall b\in M$，b 是自然数

C. $\exists c\in M$，c 是奇数　　D. $\exists d\in M$，d 是有理数

【答案】D　解析：-2 不是正数，故 A 错. -2 不是自然数，故 B 错. M 中都是偶数，故 C 错. 故选 D.

4.(2018 山东春考)设命题 p：$5\geqslant3$，命题 q：$\{1\}\subseteq\{0,1,2\}$，则下列命题中为真命题的是　（　　）

A. $p\wedge q$　　B. $\neg p\wedge q$　　C. $p\wedge\neg q$　　D. $\neg p\wedge\neg q$

【答案】A　解析：因为命题 p：$5\geqslant3$ 为真，命题 p：$\{1\}\subseteq\{0,1,2\}$ 为真，所以 $p\wedge q$ 为真，$\neg p\wedge q$，$p\wedge\neg q$，$\neg p\wedge\neg q$ 为假，故选 A.

第四节　充要条件

知识清单

知识点一　充分、必要、充要条件的概念

1. 推出

“如果 p，那么 q”是真命题，则称 p 推出 q，记作“________”.

2. 充分条件、必要条件

对于两个命题 p，q，如果有 $p\Rightarrow q$，则称 p 是 q 的__________，q 是 p 的__________.

注意：p 是 q 的充分条件是指只要具备了条件 p，那么 q 就一定成立，即命题中的条件是充分的；q 是 p 的必要条件是指如果不具备条件 q，则 p 就不能成立，即 q 是 p 成立的必不可少的条件.

3. 充要条件

如果 $p\Rightarrow q$ 且 $q\Rightarrow p$，则 p 是 q 的__________，记作________，读作“p 与 q 等价”或“p 与 q 互为充要条件”.

知识点二　充分、必要、充要条件的判断方法

1. 从逻辑推理关系上判断(定义法)

(1)若 $p\Rightarrow q$ 但 $q\nRightarrow p$，则 p 是 q 的充分不必要条件.

(2)若 $p\nRightarrow q$ 但 $q\Rightarrow p$，则 p 是 q 的必要不充分条件.

(3)若 $p\Rightarrow q$ 且 $q\Rightarrow p$，则 p 是 q 的充要条件.

(4)若 $p\nRightarrow q$ 且 $q\nRightarrow p$，则 p 是 q 的既不充分也不必要条件.

2. 从命题所对应的集合与集合之间的关系上判断(集合法)

设命题 p 对应的集合为 A，命题 q 对应的集合为 B.

(1)若 $A\subseteq B$，则 p 是 q 的充分不必要条件.

(2)若 $A\supseteq B$，则 p 是 q 的必要不充分条件.

(3)若 $A\subseteq B$ 且 $A\supseteq B$，即 $A=B$，则 p 是 q 的充要条件.

(4)若 $A\nsubseteq B$ 且 $A\nsupseteq B$,则 p 是 q 的既不充分也不必要条件.

知识清单答案

知识点一　充分、必要、充要条件的概念

1. $p\Rightarrow q$　2. 充分条件　必要条件　3. 充要条件　$p\Leftrightarrow q$

典例剖析

题型一　充要条件的判断

例 1　已知 p:$|3x-5|<4$,q:$(x-1)(x-2)<0$,则 p 是 q 的(　　).

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

解析　p:$|3x-5|<4\Rightarrow p$:$\frac{1}{3}<x<3$,q:$(x-1)(x-2)<0\Rightarrow q$:$1<x<2$. 所以 $p\nRightarrow q$ 但 $q\Rightarrow p$,所以 p 是 q 的必要不充分条件. 故选 B.

技巧点拨　判断充分必要条件时,先要分清条件和结论,进而找到条件与结论之间的逻辑推理关系.

变式训练 1

设命题甲为 $0<x<5$,命题乙为 $|x-2|<3$,那么甲是乙的(　　).

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

题型二　应用充要条件求未知数

例 2　已知集合 $A=\left\{y\,\middle|\,y=x^2-\frac{3}{2}x+1,x\in\left[\frac{3}{4},2\right]\right\}$,$B=\{x|x+m^2\geqslant 1\}$,$p$:$x\in A$,$q$:$x\in B$,并且 p 是 q 的充分条件,求实数 m 的取值范围.

解析　由题意得 $A=\left[\frac{7}{16},2\right]$,$B=[1-m^2,+\infty)$,由于 p 是 q 的充分条件,所以 $A\subseteq B$,所以 $1-m^2\leqslant\frac{7}{16}$,解得 $m\geqslant\frac{3}{4}$ 或 $m\leqslant-\frac{3}{4}$,即实数 m 的取值范围是 $\left(-\infty,-\frac{3}{4}\right]\cup\left[\frac{3}{4},+\infty\right)$.

技巧点拨　本题主要考查集合的运算以及充要条件的判断,解题的关键是不等式之间的关系.

变式训练 2

已知 p:$x^2-2x-3<0$,q:$-a<x-1<a$. 若 q 是 p 的一个必要不充分条件,求实数 a 的取值范围.

实战训练

基础巩固

一、选择题

1. “$x<-2$”是“$x^2-4>0$”的 ( )

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件

C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

2. “$A\cap B=A$”是“$A\subseteq B$”的 ( )

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件

C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

3. 设甲是乙的充分不必要条件,乙是丙的充要条件,丁是丙的必要不充分条件,则甲是丁的 ( )

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件

C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

4. “$|x|\geqslant 1$”是“$x\geqslant 1$”的 ( )

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件

C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

5. “$\alpha=\frac{\pi}{4}$”是“$\tan\alpha=1$”的 ( )

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件

C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

6. “$x<2$”是“$x^2-x-2<0$”的 ( )

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件

C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

7. “$x>0$”是“$x>1$”的 ( )

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件

C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

8. 设 $a,b,c\in\mathbf{R}$,则“$a>b$”是“$ac^2>bc^2$”的 ( )

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件

C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

二、解答题

1. 判断下列问题中,p 是 q 的什么条件?

(1)p:$x^2\geqslant y^2$,q:$x\geqslant y$.

(2)p:$x\in A\cup B$,q:$x\in A\cap B$.

(3)p:$x>3$,q:$x>2$.

(4)p:a 是有理数,q:$a+2$ 是有理数.

2. 求一个对于一切实数 x 都有 $ax^2-ax+1>0$ 成立的充要条件.

能力提升

已知 p:$-2\leqslant x\leqslant 10$,$q$:$x^2-2x+1-m^2\leqslant 0(m>0)$,若 p 是 q 的充分不必要条件,求实数 m 的取值范围.

真题链接

1. (2021 山东春考)"角 α 是第一象限角"是"$\sin\alpha>0$"的 ( )

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

【答案】A　**解析:**若角 α 是第一象限角,则 $\sin\alpha>0$,即"角 α 是第一象限角"是"$\sin\alpha>0$"的充分条件;反之,若 $\sin\alpha>0$,则角 α 可能为第一象限角或第二象限角,即"角 α 是第一象限角"是"$\sin\alpha>0$"的不必要条件,综上选 A.

2. (2020 山东春考)已知 $a\in\mathbf{R}$,若集合 $M=\{1,a\}$,$N=\{-1,0,1\}$,则"$a=0$"是"$M\subseteq N$"的 ( )

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

【答案】A　**解析:**当 $a=0$ 时,$M=\{1,0\}$,$M\subseteq N$;若 $M\subseteq N$,则 $M=\{1,0\}$或$\{1,-1\}$,即 $a=0$ 或 -1,故是充分不必要条件. 故选 A.

3. (2019 山东春考)对于任意角 α,β,"$\alpha=\beta$"是"$\sin\alpha=\sin\beta$"的 ( )

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

【答案】A　**解析:**若"$\alpha=\beta$",则"$\sin\alpha=\sin\beta$";而若"$\sin\alpha=\sin\beta$"不一定得"$\alpha=\beta$",故为充分不必要条件. 故选 A.

4. (2018 山东春考)已知 a,$b\in\mathbf{R}$,则"$a>b$"是"$2^a>2^b$"的 ( )

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

【答案】C　**解析:**因为 $y=2^x$ 为单调递增函数,所以 $a>b\Leftrightarrow 2^a>2^b$,因此"$a>b$"是"$2^a>2^b$"的充要条件,选 C.

5. (2017 山东春考)对于命题 p,q,"$p\vee q$ 是真命题"是"p 是真命题"的 ( )

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

【答案】B　**解析:**"$p\vee q$ 是真命题",则 p 或 q 为真命题,所以"$p\vee q$ 是真命题"推不出"p 为真",但"p 是真命题"一定能推出"$p\vee q$ 是真命题",故"$p\vee q$ 是真命题"是"p 是真命题"的必要不充分条件,故选 B.