第一章 函数、极限与连续

第一节 函 数

思维导图

- 函数
  - 函数的概念及表示方法
    - 函数的定义
      - 定义域
      - 对应法则
    - 函数的表示方法
      - 解析法
      - 列表法
      - 图形法
  - 函数的性质
    - 有界性
    - 单调性
    - 奇偶性
    - 周期性
  - 基本初等函数
    - 幂函数
    - 指数函数
    - 对数函数
    - 三角函数
    - 反三角函数
  - 特殊函数
    - 分段函数
    - 反函数
    - 隐函数
  - 函数的四则运算与复合运算
  - 初等函数
  - 经济学中的几种常见函数

考纲要求

1. 理解函数的概念,会求函数的定义域、表达式及函数值,会建立应用问题的函数关系.
2. 掌握函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.
3. 理解分段函数、反函数和复合函数的概念.
4. 掌握函数的四则运算与复合运算.
5. 掌握基本初等函数的性质及其图形,理解初等函数的概念.
6. 理解经济学中的几种常见函数(成本函数、收益函数、利润函数、需求函数和供给函数).

知识清单

一、函数的概念及表示方法

1. 函数的定义

(1)**定义 1** 设 D 是一个实数集.如果存在一个对应法则 f,使得对 D 中的每一个数 x,在 $\mathbf{R}$ 中都有唯一确定的数 y 与之对应,那么称对应法则 f 为定义在 D 上的一个函数,记为

$$y=f(x),\quad x\in D.$$

其中 x 称为自变量,y 称为因变量,D 称为函数 f 的定义域.

注:函数的定义域通常由问题的实际背景确定,如果只给出解析式 $y=f(x)$,而没有指明它的定义域,那么函数的定义域就是指能使这个式子有意义的实数的集合.

例 1 求下列函数的定义域.

(1)$y=\sqrt{x+3}$; (2)$y=\dfrac{1}{x+2}$; (3)$y=\ln(x-1)$.

【解析】 (1)因为二次根式的被开方数不小于 0,所以 $x+3\geqslant0$,解得 $x\geqslant-3$.故 $y=\sqrt{x+3}$的定义域为 $[-3,+\infty)$.

(2)因为分式的分母不能为 0,所以 $x+2\neq0$,即 $x\neq-2$.故 $y=\dfrac{1}{x+2}$的定义域为 $(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)$.

(3)因为对数的真数大于 0,所以 $x-1>0$,解得 $x>1$.故 $y=\ln(x-1)$的定义域为 $(1,+\infty)$.

备考提示

历年专升本考试,求函数的定义域都是经常考查的题型.备考时,考生需要熟知基本初等函数的定义域与值域,并会解一些简单的不等式.

例 2 函数 $f(x)=\sqrt{x-3}+\arcsin\dfrac{1}{x}$ 的定义域是( ).

A. $(-\infty,+\infty)$ B. $[1,3]$ C. $(-\infty,0)\cup(0,3)$ D. $[3,+\infty)$

【答案】 D

【解析】 使根式$\sqrt{x-3}$有意义的实数 x 的集合是$\{x|x-3\geqslant0\}=\{x|x\geqslant3\}$，使 $\arcsin\frac{1}{x}$有意义的实数 x 的集合是$\left\{x\,\middle|\,-1\leqslant\frac{1}{x}\leqslant1\right\}=\{x|x\geqslant1$ 或 $x\leqslant-1\}$. 因此，函数 $f(x)$的定义域是$\{x|x\geqslant3\}\cap\{x|x\geqslant1$ 或 $x\leqslant-1\}=\{x|x\geqslant3\}$，即$[3,+\infty)$. 故本题选 D.

(2)函数定义中，对 D 中的每一个数 x，按照对应法则，总有唯一确定的值 y 与之对应，这个值称为函数在点 x 处的函数值，记作 $f(x)$. 当自变量 x 遍取 D 中所有数值时，对应的函数值 $f(x)$的全体构成的集合称为函数 f 的值域，记作 $f(D)$，即

$$f(D)=\{y|y=f(x),x\in D\}.$$

由函数的定义可以看出，函数的定义域与对应法则是确定函数的两个必不可少的要素. 也就是说，如果两个函数的对应法则和定义域都相同，那么这两个函数就是相同的函数.

例 3　下列各组函数中，表示同一函数的是(　　).

A. $f(x)=1$ 与 $g(x)=x^0$　　B. $f(x)=x$ 与 $g(x)=\sqrt{x^2}$

C. $f(x)=x$ 与 $g(x)=\sqrt[3]{x^3}$　　D. $f(x)=\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+1}$与 $g(x)=\sqrt{x^2-1}$

【答案】 C

【解析】 选项 A,D 的定义域不同，选项 B 的值域不同，故选 C.

2. 函数的表示方法

(1)解析法：用等式来表示两个变量间的函数关系.

(2)列表法：把两个变量之间的对应值列成表格来表示函数的关系.

(3)图形法：用图形来表示两个变量之间的函数关系.

例 4　某商品的进价为每件 50 元. 根据市场调查，如果商品售价为每件 50 元，每天可卖出 400 件；若商品的售价每上涨 1 元，则每天少卖 10 件，设每件商品的售价定为 x 元($x\geqslant50,x\in\mathbf{N}$). 求每天销售量与自变量 x 的函数关系式.

【解析】 设销售量为 y 件，则 $y=400-(x-50)\times10=900-10x,x\in[50,90]$.

二、函数的性质

1. 函数的有界性

定义 2　设函数 $f(x)$的定义域为 D，数集 $X\subset D$. 若存在一个正数 M，使得对任一 $x\in X$，恒有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$在 X 上有界，或称 $f(x)$是 X 上的有界函数. 若不存在这样的正数 M，则称 $f(x)$在 X 上无界.

例如，函数 $y=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$ 上有界，因为对任何实数 x，恒有$|\sin x|\leqslant1$. 又如，函数 $y=\frac{1}{x}$在区间$(0,1)$上无界，在$[1,+\infty)$上有界.

例 5　判断下列函数在给定区间上是否有界.

(1)$y=x,x\in(-\infty,+\infty)$；　　(2)$y=\frac{1}{x^2+1},x\in(-\infty,+\infty)$；

(3)$y=e^x,x\in(-\infty,0)$；　　(4)$y=\arctan x,x\in(-\infty,+\infty)$.

【解析】 (1)显然，函数 $y=x$ 在$(-\infty,+\infty)$上无界.

(2)因为当 $x\in(-\infty,+\infty)$时，$\left|\frac{1}{x^2+1}\right|\leqslant\frac{1}{1}=1$，所以函数 $y=\frac{1}{x^2+1}$在$(-\infty,+\infty)$上有界.

(3)因为当 $x\in(-\infty,0)$时，$|e^x|<e^0=1$，所以函数 $y=e^x$ 在$(-\infty,0)$上有界.

(4)因为当 $x\in(-\infty,+\infty)$时，$|\arctan x|<\frac{\pi}{2}$，所以函数 $y=\arctan x$ 在$(-\infty,+\infty)$上有界.

2. 函数的奇偶性

定义 3 设函数 $f(x)$的定义域为 D，且 D 关于原点对称，即对任一 $x\in D$，都有$-x\in D$. 若

$$f(-x)=f(x)$$

对一切 $x\in D$ 成立，则称 $f(x)$为偶函数；若

$$f(-x)=-f(x)$$

对一切 $x\in D$ 成立，则称 $f(x)$为奇函数.

从函数图像上看，偶函数的图像关于 y 轴对称，奇函数的图像关于原点对称.

例 6 判断下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=x^2(1+x^2)$；

(2) $f(x)=x(x+1)(x-1)$.

【解析】 (1)因为函数 $f(x)=x^2(1+x^2)$的定义域为 $\mathbf{R}$，且

$$f(-x)=(-x)^2[1+(-x)^2]=x^2(1+x^2)=f(x),$$

所以 $f(x)=x^2(1+x^2)$是偶函数.

(2)因为函数 $f(x)=x(x+1)(x-1)$的定义域为 $\mathbf{R}$，且

$$f(-x)=(-x)[(-x)+1][(-x)-1]=-x(x+1)(x-1)=-f(x),$$

所以 $f(x)=x(x+1)(x-1)$是奇函数.

备考提示

在判断函数的奇偶性时，一定要先判断函数的定义域是否关于原点对称，再判断 $f(x)$与 $f(-x)$的关系.

3. 函数的单调性

定义 4 设函数 $f(x)$定义域为 D，区间 $I\subset D$. 若对于 I 上任意两点 x_1, x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称 $f(x)$在 I 上是单调增加的；若对于区间 I 上任意两点 x_1, x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)>f(x_2),$$

则称 $f(x)$在 I 上是单调减少的.

例 7 判断下列函数的单调性.

(1) $f(x)=\frac{1}{1-x}, x\in(-\infty,1)$；

(2) $f(x)=x^2-2x, x\in(1,+\infty)$.

【解析】 (1)任取 $x_1,x_2\in(-\infty,1)$,且 $x_1<x_2$,则

$$1-x_1>1-x_2>0,$$

从而

$$\frac{1}{1-x_1}<\frac{1}{1-x_2},$$

即得

$$f(x_1)<f(x_2).$$

故 $f(x)=\frac{1}{1-x}$在$(-\infty,1)$上单调增加.

(2)任取 $x_1,x_2\in(1,+\infty)$,且 $x_1<x_2$,则

$$x_1+x_2>2,x_2-x_1>0,$$

从而

$$f(x_2)-f(x_1)=x_2^2-x_1^2-2(x_2-x_1)=(x_2+x_1-2)(x_2-x_1)>0,$$

即得

$$f(x_1)<f(x_2).$$

故 $f(x)=x^2-2x$ 在$(1,+\infty)$上单调增加.

备考提示

作差与作商是判断函数单调性常用的方法,需要注意的是,作商判断单调性时,要考虑函数值的正负.

4. 函数的周期性

定义 5 设函数 $f(x)$的定义域为 D. 若存在一个正数 T,使得对任一 $x\in D$,有$(x+T)\in D$,且

$$f(x+T)=f(x)$$

恒成立,则称 $f(x)$为周期函数,同时称 T 为 $f(x)$的一个周期. 如果函数 $f(x)$的所有周期中,存在一个最小的周期 T_0,那么称 T_0 为 $f(x)$的最小正周期.

注:并非所有的周期函数都有最小正周期.例如,对狄利克雷函数 $D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 是有理数},\\ 0, & x\text{ 是无理数},\end{cases}$ 任何正有理数都是它的周期,由于不存在最小的正有理数,所以它没有最小正周期.

例 8 判断下列函数的周期性,如果是周期函数,写出它们的最小正周期.

(1) $f(x)=\tan 2x$;

(2) $f(x)=x\tan x$;

(3) $f(x)=|\sin 2x|$.

【解析】 (1)函数 $f(x)=\tan 2x$ 是周期函数,它的最小正周期是$\frac{\pi}{2}$.

(2)函数 $f(x)=x\tan x$ 不是周期函数.

(3)函数 $f(x)=|\sin 2x|$ 是周期函数，它的最小正周期是 $\frac{\pi}{2}$.

备考提示

如果函数 $f(x)$ 的周期是 T，那么函数 $f(\omega x)(\omega>0)$ 的周期是 $\frac{T}{\omega}$.

三、基本初等函数

1. 幂函数

(1)形如 $y=x^{\alpha}$(α 为常数)的函数称为幂函数. $\alpha=1,2,3,\frac{1}{2},-1$ 时，幂函数 $y=x^{\alpha}$ 的图像如图 1.1.1 所示.

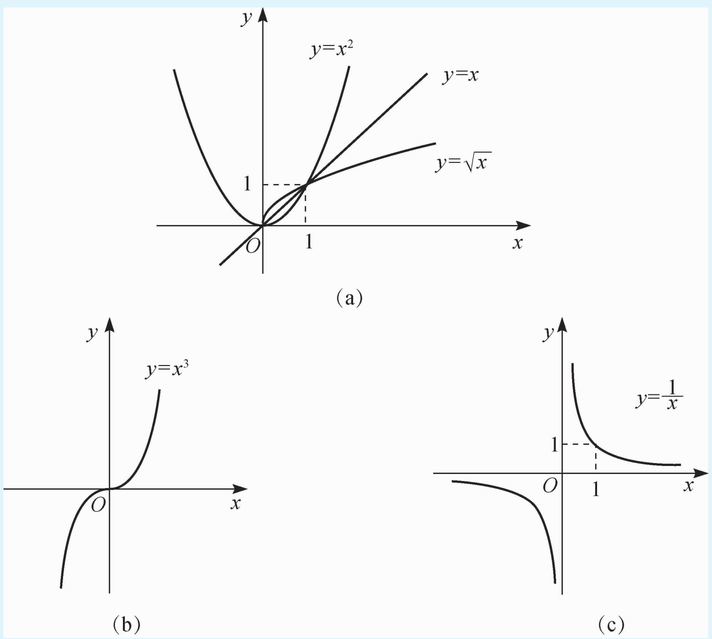

图 1.1.1

(2)幂函数 $y=x^{\alpha}$ 的图像恒过点(1,1).

当 $\alpha>0$ 时，幂函数 $y=x^{\alpha}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调增加；当 $\alpha<0$ 时，幂函数 $y=x^{\alpha}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调减少.

当 $\alpha\neq0$ 时，函数 $y=x^{\alpha}$ 是无界函数.

当 $\alpha=2n,n\in\mathbf{Z}$ 时，函数 $y=x^{\alpha}$ 是偶函数；当 $\alpha=2n+1,n\in\mathbf{Z}$ 时，函数 $y=x^{\alpha}$ 是奇函数.

2. 指数函数

(1)形如 $y=a^{x}(a>0,a\neq1)$ 的函数称为指数函数. 指数函数的定义域为 $\mathbf{R}$，值域为 $(0,+\infty)$，它的图像如图 1.1.2 所示.

(2)指数函数 $y=a^{x}$ 的图像恒过点(0,1). 当 $a>1$ 时，指数函数 $y=a^{x}$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调增加；当 $0<a<1$ 时，指数函数 $y=a^{x}$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调减少.

不论 a 为何值，指数函数 $y=a^x$ 是无界函数，且为非奇非偶函数.

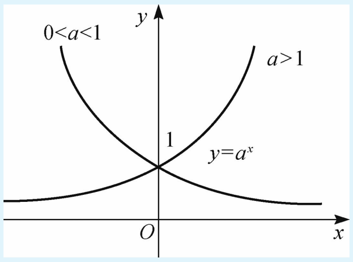

图 1.1.2

备考提示

指数幂及其运算性质：

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m};\ a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}};\ a^m a^n=a^{m+n};\ (a^m)^n=a^{mn};\ (ab)^m=a^m b^m.$$

其中 $a>0, b>0, m\in\mathbf{R}, n\in\mathbf{R}$.

3. 对数函数

(1)形如 $y=\log_a x\,(a>0, a\neq1)$ 的函数称为对数函数. 对数函数的定义域为 $(0,+\infty)$，值域为 $\mathbf{R}$，它的图像如图 1.1.3 所示.

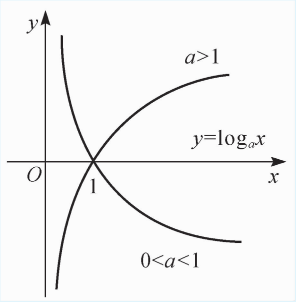

图 1.1.3

特别地，以 10 为底的对数函数称为常用对数函数，简记为 $y=\lg x$；以 e(e=2.718 28…是一个无理数)为底的对数函数称为自然对数函数，简记为 $y=\ln x$.

(2)对数函数 $y=\log_a x$ 的图像恒过点 $(1,0)$. 当 $a>1$ 时，对数函数 $y=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调增加；当 $0<a<1$ 时，对数函数 $y=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调减少.

不论 a 为何值，对数函数 $y=\log_a x$ 是无界函数，且为非奇非偶函数.

注：对于确定的实数 $a\,(a>0, a\neq1)$，指数函数 $y=a^x$ 与对数函数 $y=\log_a x$ 互为反函数，它们的图像关于直线 $y=x$ 对称.

备考提示

对数的运算性质：

$\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$； $\log_a \dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$；

$\log_a M^n=n\log_a M$； $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$（换底公式）.

其中 $a>0$，且 $a\neq1$；$b>0$；$c>0$，且 $c\neq1$；$M>0$，$N>0$；$n\in\mathbf{R}$.

4. 三角函数

（1）正弦函数 $y=\sin x$、余弦函数 $y=\cos x$、正切函数 $y=\tan x$、余切函数 $y=\cot x$ 统称为三角函数，它们的图像如图 1.1.4 所示.

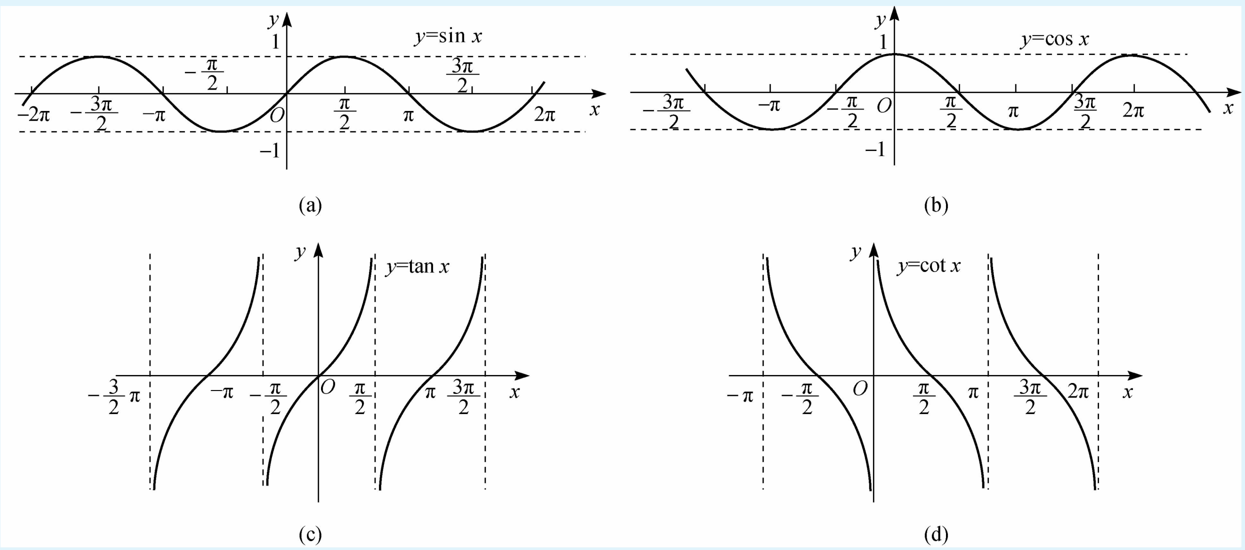

图 1.1.4

（2）正弦函数 $y=\sin x$ 和余弦函数 $y=\cos x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，值域为 $[-1,1]$；正切函数 $y=\tan x$ 的定义域为 $\left\{x\,\middle|\,x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$，值域为 $\mathbf{R}$；余切函数 $y=\cot x$ 的定义域为 $\{x\,|\,x\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$，值域为 $\mathbf{R}$.

（3）拓展：正割函数 $y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$，其定义域为 $\left\{x\,\middle|\,x\in\mathbf{R}\text{，且 }x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$；余割函数 $y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$，其定义域为 $\{x\,|\,x\in\mathbf{R}\text{，且 }x\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$.

备考提示

三角函数的常用公式：

$\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$； $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$；

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$； $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$；

$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$； $\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$；

$1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha$； $1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha$.

5. 反三角函数

(1)正弦函数 $y=\sin x$ 在区间$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上的反函数,称为反正弦函数,记作 $y=\arcsin x$,其定义域为$[-1,1]$,值域为$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,图像如图 1.1.5(a)所示.

(2)余弦函数 $y=\cos x$ 在区间$[0,\pi]$上的反函数,称为反余弦函数,记作 $y=\arccos x$,其定义域为$[-1,1]$,值域为$[0,\pi]$,图像如图 1.1.5(b)所示.

(3)正切函数 $y=\tan x$ 在区间$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$上的反函数,称为反正切函数,记作 $y=\arctan x$,其定义域为 $\mathbf{R}$,值域为$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,图像如图 1.1.5(c)所示.

(4)余切函数 $y=\cot x$ 在区间$(0,\pi)$上的反函数,称为反余切函数,记作 $y=\operatorname{arccot} x$,其定义域为 $\mathbf{R}$,值域为$(0,\pi)$,图像如图 1.1.5(d)所示.

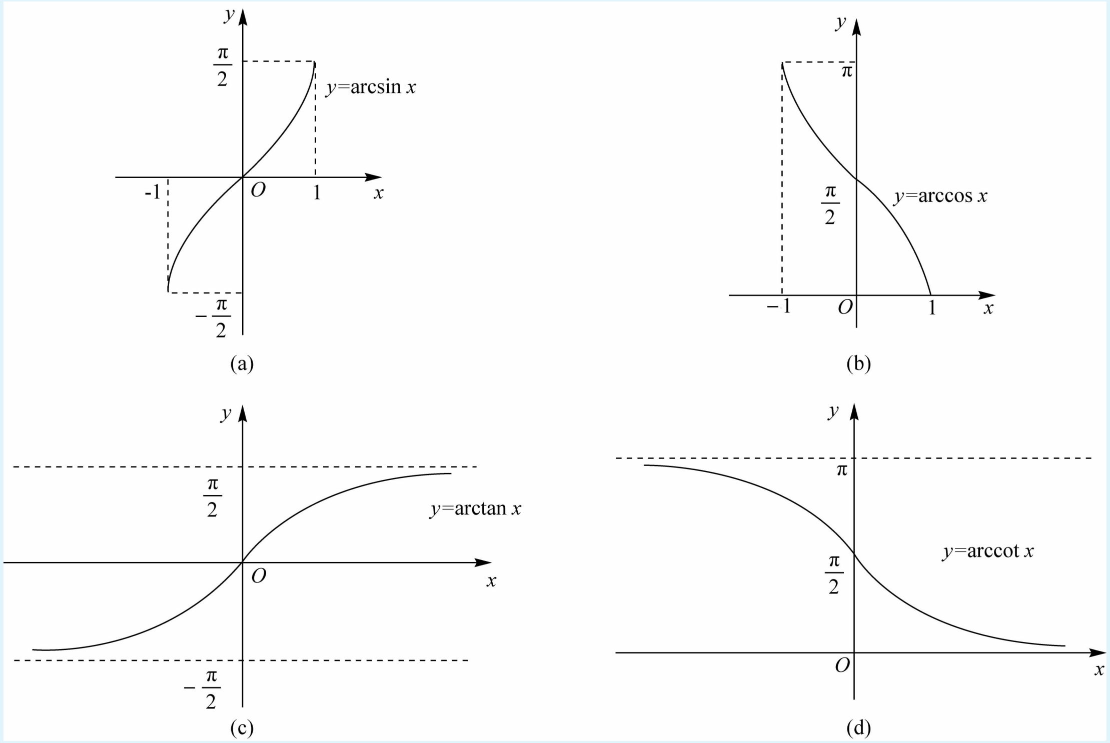

图 1.1.5

(5)性质.

反正弦函数 $y=\arcsin x$ 在定义域内单调增加,是有界函数,且在其定义域内是奇函数.

反余弦函数 $y=\arccos x$ 在定义域内单调减少,是有界函数,且在其定义域内是非奇非偶函数.

反正切函数 $y=\arctan x$ 在定义域内单调增加,是有界函数,且在其定义域内是奇函数.

反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$ 在定义域内单调减少,是有界函数,且在其定义域内是非奇非偶函数.

四、特殊函数

1. 分段函数

定义 6 在自变量的不同变化范围中,对应法则用不同式子来表示的函数,称为分段函数.

例如,分段函数 $f(x)=\begin{cases} x, & x\geqslant 0, \\ -x, & x<0, \end{cases}$ 它的定义域为 **R**. 当 $x\in(-\infty,0)$时,对应的函数值 $f(x)=-x$;当 $x\in[0,+\infty)$时,对应的函数值 $f(x)=x$.

例 9 设函数 $f(x)=\begin{cases} 1+\log_2(1-x), & x<1, \\ 2^{x-2}, & x\geqslant 1, \end{cases}$ 则 $f(-1)+f(\log_2 4)=$ ________.

【答案】 3

【解析】 由题意,得 $f(-1)=1+\log_2 2=2$,$f(\log_2 4)=f(2)=2^{2-2}=1$,所以 $f(-1)+f(\log_2 4)=3$.

2. 反函数

定义 7 设函数 $y=f(x)$的定义域为 D,值域为 $f(D)$. 如果对任一 $y\in f(D)$,都存在唯一的 $x\in D$,使得 $f(x)=y$,即确定了一个以 y 为自变量,x 为因变量的函数,那么称这个新确定的函数为 $y=f(x)$的反函数,记为 $x=f^{-1}(y)$. 由于习惯上用 x 表示自变量,用 y 表示因变量,所以将反函数中的 x 与 y 互换位置,即记为 $y=f^{-1}(x)$,$x\in f(D)$.

注:从函数图像上来看,两个互为反函数的函数,它们的图像关于直线 $y=x$ 对称.

备考提示

求函数 $y=f(x)$的反函数,通常是把解析式 $y=f(x)$变形为 x 关于 y 的等式 $x=g(y)$,然后互换 x 与 y 的位置,得到 $y=g(x)$,函数 $y=g(x)$即为函数 $y=f(x)$的反函数.

例 10 求函数 $y=\dfrac{3x-5}{2x+1}$的反函数.

【解析】 在 $y=\dfrac{3x-5}{2x+1}$两边同时乘 $2x+1$,移项整理得

$$x(3-2y)=5+y,$$

等号两边同时除以 $3-2y$,得

$$x=\frac{5+y}{3-2y}.$$

故函数 $y=\dfrac{3x-5}{2x+1}$的反函数为 $y=\dfrac{5+x}{3-2x}$.

例 11 求函数 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$的反函数.

【解析】 分别以 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$的两边为指数,e 为底数,得

$$e^y=x+\sqrt{x^2+1},$$

移项整理得

$$\sqrt{x^2+1}=e^y-x,$$

等号两边同时平方，整理得

$$x=\frac{e^y-e^{-y}}{2}.$$

故函数 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 的反函数为 $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$.

3. 隐函数

定义 8　如果变量 x,y 满足方程 $F(x,y)=0$，且在一定条件下，当 x 取某区间内的任一值时，相应地总有满足这方程的唯一的 y 值存在，那么就说方程 $F(x,y)=0$ 在该区间确定了一个隐函数 $y=f(x)$.

例如，方程 $x^2+y^2=1$ 在 $[-1,1]$ 上确定了两个隐函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 和 $y=-\sqrt{1-x^2}$.

五、函数的四则运算与复合运算

1. 函数的四则运算

给定两个函数 $f(x)(x\in D_1)$ 和 $g(x)(x\in D_2)$，记 $D=D_1\cap D_2$，并设 $D\neq\varnothing$. 我们定义 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 D 上的和、差、积运算如下：

$F(x)=f(x)+g(x),x\in D,$

$G(x)=f(x)-g(x),x\in D,$

$H(x)=f(x)g(x),x\in D.$

若在 D 中剔除使 $g(x)=0$ 的 x 的值，即令 $D^*=D_1\cap\{x\mid g(x)\neq 0,x\in D_2\}\neq\varnothing$，可在 D^* 上定义 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的商的运算如下：$L(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)},x\in D^*$.

注：若 $D=D_1\cap D_2=\varnothing$，则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不能进行四则运算. 例如设 $f(x)=\sqrt{4-x^2}$，$x\in D_1=\{x\mid |x|\leqslant 1\}$，$g(x)=\sqrt{x^2-9}$，$x\in D_2=\{x\mid |x|\geqslant 3\}$，由于 $D=D_1\cap D_2=\varnothing$，故表达式 $f(x)+g(x)=\sqrt{4-x^2}+\sqrt{x^2-9}$ 是没有意义的.

2. 函数的复合运算

定义 9　设 $y=f(x)$ 和 $u=g(x)$ 是两个函数. 如果 $y=f(x)$ 的定义域包含函数 $u=g(x)$ 的值域，那么定义在 $u=g(x)$ 定义域上的函数 $y=f(g(x))$ 称为由 $u=g(x)$ 与 $y=f(x)$ 构成的复合函数，u 称为中间变量.

函数 g 与函数 f 构成的复合函数，即按"先 g 后 f"的次序复合的函数，通常记为 $f\circ g$，即

$$(f\circ g)(x)=f(g(x)).$$

例如，取 $f(x)=\sin x$，$g(x)=x^2$，则 $g(x)$ 与 $f(x)$ 构成的复合函数为 $f(g(x))=\sin x^2$，$f(x)$ 与 $g(x)$ 构成的复合函数为 $g(f(x))=\sin^2 x$.

注：(1) 不是任何两个函数都可以构成复合函数，函数 $g(x)$ 与 $f(x)$ 能构成复合函数的条件是函数 $g(x)$ 的值域与函数 $f(x)$ 的定义域要有非空交集. 例如，函数 $y=\arcsin u$ 与函数 $u=2+x^2$ 就不能构成复合函数，因为函数 $y=\arcsin u$ 的定义域为 $[-1,1]$，而 $u=2+x^2\geqslant 2$，所以两个函数不满足复合函数的条件.

(2)复合函数可以由多个函数复合而成,即可以有多个中间变量,如 $y=e^u$,$u=\sqrt{v}$,$v=x+1$ 复合成函数 $y=e^{\sqrt{x+1}}$,这里 u,v 都是中间变量.

例 12 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|\leqslant 1,\\ 2, & |x|>1,\end{cases}$ 求 $f[g(x)]$,$g[f(x)]$.

【解析】 $f[g(x)]=\begin{cases}1, & |g(x)|\leqslant 1,\\ 0, & |g(x)|>1\end{cases}=\begin{cases}1, & |x|=1,\\ 0, & |x|\neq 1.\end{cases}$

$g[f(x)]=\begin{cases}2-[f(x)]^2, & |f(x)|\leqslant 1,\\ 2, & |f(x)|>1\end{cases}=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 2, & |x|>1.\end{cases}$

例 13 下列函数是由哪些较简单的函数复合而成的?

(1)$y=e^{-x}$;

(2)$y=\sin^2(1+2x)$;

(3)$y=\arccos\sqrt{\tan(a^2+x^2)}$.

【解析】 (1)$y=e^{-x}$是由 $y=e^u$ 与 $u=-x$ 复合而成的.

(2)$y=\sin^2(1+2x)$是由 $y=\sin^2 u$ 与 $u=1+2x$ 复合而成的.

(3)$y=\arccos\sqrt{\tan(a^2+x^2)}$是由 $y=\arccos u$,$u=\sqrt{v}$,$v=\tan w$,$w=a^2+x^2$ 复合而成的.

六、初等函数

定义 10 由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合所构成的函数,称为初等函数.

七、经济学中的几种常见函数

1. 需求函数

需求量受很多因素的影响,如商品本身价格、相关商品价格、消费者收入水平等等,在这里只考虑商品本身价格对其的影响,其他因素暂时看作定值.

设 Q 表示商品的需求量,P 表示商品的价格,则 $Q=Q(P)$,称为需求函数.

一般地,需求量随着价格的上涨而减少. 因此,通常需求函数是价格的递减函数,如图 1.1.6 所示的图形为一条需求函数曲线.

需求函数 $Q=Q(P)$的反函数反映了商品价格随商品需求量变化的依赖关系,我们称其为价格函数,记为 $P=P(Q)$.

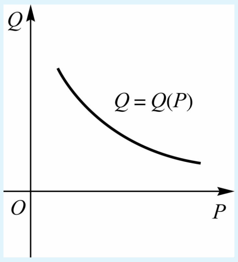

图 1.1.6

2. 供给函数

商品的供应者向社会提供的商品量称为商品供给量. 在经济活动中,影响商品供给量的重要因素之一是商品价格. 记商品供给量为 S,商品价格为 P,则在假定其他影响供给量的因素不变的前提下,反映供给量和商品价格存在的一一对应关系 $S=S(P)$称为供给函数.

一般地,商品的供给量随着商品价格的上涨而增加,因此,商品供给函数是价格的递增函数.

产销平衡:理想状态下供给与需求处于平衡状态,即市场上的需求量等于供给量,生产的产品刚好全部卖出去.

3. 成本函数

(1)总成本函数:指生产一定储量的产品所需的全部支出,由固定成本和可变成本组成. 设 C 是总成本,C_1 是固定成本,C_2 是可变成本,则成本函数 $C=C(Q)=C_1+C_2(Q)$.

(2)平均成本函数:$\bar{C}=\dfrac{C(Q)}{Q}=\dfrac{C_1+C_2(Q)}{Q}$.

4. 收益函数

(1)总收益函数:总收益表示生产者出售一定量的产品得到的全部收入. 设 Q 为商品销售量,$P=P(Q)$为商品价格,则总收益函数 $R=R(Q)=PQ=P(Q)Q$.

(2)平均收益函数:$\bar{R}=\dfrac{R(Q)}{Q}=\dfrac{P(Q)Q}{Q}=P(Q)$.

5. 利润函数

总利润函数:总利润是指生产者出售一定量的产品所得到的总收益与生产这一定量的产品所投入的总成本之差,即总利润函数 $L=L(Q)=R(Q)-C(Q)$.

例 14　为提高产品的销售量,某厂商拟投入适当的广告费,对网上所销售的某种产品进行促销. 经调查测算,该促销产品的销售量 Q 万件与促销费用 P 万元的关系为 $Q=3-\dfrac{2}{P+1}$. 已知生产 Q 万件该产品的成本为$(10+2Q)$万元(不含促销费),产品的销售价格为$\left(4+\dfrac{20}{Q}\right)$元/件. 假定厂家的生产能力完全能满足市场的销售需求,请用促销费 P 万元表示出该产品的利润 R 万元.

【解析】　易得销售总成本为$(P+10+2Q)$万元,总收入为 $Q\left(4+\dfrac{20}{Q}\right)$万元,

则利润函数为

$$\begin{aligned}R&=Q\left(4+\frac{20}{Q}\right)-(P+10+2Q)\\&=4\left(3-\frac{2}{P+1}\right)+20-P-10-2\left(3-\frac{2}{P+1}\right)\\&=16-P-\frac{4}{P+1}.\end{aligned}$$

巩固练习

1. 下列函数 $f(x)$与 $g(x)$相等的是(　　).

A. $f(x)=x^2, g(x)=\sqrt{x^4}$　　　　B. $f(x)=x, g(x)=(\sqrt{x})^2$

C. $f(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}, g(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$　　D. $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}, g(x)=x+1$

2. 函数 $f(x)=\sin\frac{1}{\sqrt{x}}$ 的定义域为(　　).

A. $(-\infty,0)$　　B. $(-\infty,0]$

C. $(0,+\infty)$　　D. $[0,+\infty)$

3. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\leqslant 1, \\ x+\frac{6}{x}-6, & x>1, \end{cases}$ 则 $f[f(-3)]=$(　　).

A. $\frac{11}{3}$　　B. 9

C. $\frac{2}{3}$　　D. 6

4. 设函数 $y=1+\ln(x+3)$，则此函数的反函数是(　　).

A. $y=e^{x+3}-3$　　B. $y=e^{x-1}-3$

C. $x=\ln(y-1)-3$　　D. $y=\ln(x-1)-3$

5. 函数 $y=\sqrt{x-2}+1(x\geqslant 2)$ 的反函数是(　　).

A. $y=2-(x-1)^2(x\geqslant 2)$　　B. $y=2+(x-1)^2(x\geqslant 2)$

C. $y=2-(x-1)^2(x\geqslant 1)$　　D. $y=2+(x-1)^2(x\geqslant 1)$

6. 函数 $f(x)=\frac{1}{1+x}$ 在其定义域内是(　　).

A. 有界函数　　B. 无界函数

C. 奇函数　　D. 偶函数

7. 下列函数中为奇函数的是(　　).

A. $f(x)=\frac{\sin x}{x^2}$　　B. $f(x)=xe^{-\frac{2}{x}}$

C. $f(x)=\frac{2^x-2^{-x}}{2}\sin x$　　D. $f(x)=x^2\cos x+x\sin x$

8. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数. 若 $f(x)$ 的最小正周期为 4，且 $f(1)>0$，$f(3)=\frac{m-3}{m+1}$，则 m 的取值范围是(　　).

A. $-3<m<1$　　B. $m>1$ 或 $m<-3$

C. $-1<m<3$　　D. $m>3$ 或 $m<-1$

9. 求下列函数的定义域.

(1) $f(x)=\sqrt{3-x}+\ln(x-2)$；

(2) $f(x)=\arcsin\frac{x+1}{2}+\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$；

(3) $y=\arcsin|x-2|+\frac{1}{\sqrt{e^x-1}}$；

(4) $f(x)=\dfrac{x-1}{\ln x}+\sqrt{16-x^2}$.

10. 设函数 $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$, $g(x)=\sqrt{x+2}$, 求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$.

11. 设函数 $f(x)=\sqrt{1+\ln x}$, 求 $f(x)$ 及 $f(x+3)$ 的定义域.

真题链接

1. (2022 年 · 山东 · 数Ⅱ)已知 $f(x)=\begin{cases}|x-2|, & x\leqslant 2,\\ 0, & x>2,\end{cases}$ 则 $f[f(3)]=$__________.

【答案】 2

【解析】 根据题意, $f(3)=0$, 所以 $f[f(3)]=f(0)=|0-2|=2$.

2.(2020年·山东·数Ⅱ)函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x-3}}$的定义域是________.

【答案】 $(3,+\infty)$

【解析】 要使函数 y 有意义,只需 $x-3>0$,即 $x>3$,故函数的定义域为 $(3,+\infty)$.

3.(2020年·山东·数Ⅱ)已知函数 $f(x)=x^3+3x-2$,$g(x)=\tan x$,则 $f\left[g\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right]=$________.

【答案】 2

【解析】 由题知 $g\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\tan\dfrac{\pi}{4}=1$,则 $f\left[g\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right]=f(1)=1^3+3\times1-2=2$.

4.(2019年·山东)函数 $f(x)=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{1}{\ln\cos x}$的定义域为________.

【答案】 $\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$

【解析】 由题意得$\begin{cases}4-x^2\geqslant0,\\ \cos x>0,\\ \cos x\neq1,\end{cases}$解得$\begin{cases}-2\leqslant x\leqslant2,\\ 2k\pi-\dfrac{\pi}{2}<x<2k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z},\\ x\neq2k\pi,k\in\mathbf{Z},\end{cases}$得 $-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$ 且 $x\neq0$,故定义域为 $\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

5.(2018年·山东)函数 $y=\arcsin(1-x)+\dfrac{1}{2}\lg\dfrac{1+x}{1-x}$的定义域是(   ).

A. $(0,1)$　　B. $[0,1)$　　C. $(0,1]$　　D. $[0,1]$

【答案】 B

【解析】 联立$\begin{cases}-1\leqslant1-x\leqslant1,\\ \dfrac{1+x}{1-x}>0,\\ 1-x\neq0,\end{cases}$ 可解得$\begin{cases}0\leqslant x\leqslant2,\\ -1<x<1,\\ x\neq1,\end{cases}$取交集得函数定义域为 $[0,1)$.

6.(2018年·山东)函数 $f(x)=x\dfrac{a^x-1}{a^x+1}$的图像关于________对称.

【答案】 直线 $x=0$(或 y 轴)

【解析】 因为 $f(-x)=-x\dfrac{a^{-x}-1}{a^{-x}+1}=-x\dfrac{1-a^x}{1+a^x}=x\dfrac{a^x-1}{a^x+1}=f(x)$,所以函数 $f(x)$ 为偶函数,故函数关于直线 $x=0$ 或 y 轴对称.

7.(2018年·山东·财经类)函数 $y=\sqrt{2x-x^2}-\arcsin\dfrac{2x-1}{7}$的定义域为(   ).

A. $[-3,4]$　　B. $(-3,4)$

C. $[0,2]$　　D. $(0,2)$

【答案】 C

【解析】 由$\begin{cases}2x-x^2\geqslant0,\\ -1\leqslant\dfrac{2x-1}{7}\leqslant1\end{cases}$ 可得$\begin{cases}0\leqslant x\leqslant2,\\ -3\leqslant x\leqslant4,\end{cases}$ 取二者交集可得函数的定义域为 $0\leqslant x\leqslant2$,故选 C.

8.(2017年·山东)函数 $y=\sqrt{2-x^2}+\arcsin\dfrac{x-2}{3}$ 的定义域是(　　).

A. $(-1,\sqrt{2})$　　B. $[-1,\sqrt{2}]$　　C. $(-1,\sqrt{2}]$　　D. $[-1,\sqrt{2})$

【答案】 B

【解析】 要使函数有意义,则 $\begin{cases}2-x^2\geqslant 0,\\ -1\leqslant\dfrac{x-2}{3}\leqslant 1,\end{cases}$ 解得 $-1\leqslant x\leqslant\sqrt{2}$.

9.(2017年·山东)函数 $f(x)=\ln\sin(\cos^2 x)$ 的图像关于________对称.

【答案】 直线 $x=0$(或 y 轴)

【解析】 由于函数 $f(x)$ 的定义域为 $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$,关于原点对称,且 $f(-x)=\ln\sin[\cos^2(-x)]=\ln\sin(\cos^2 x)=f(x)$,故函数 $f(x)$ 为偶函数,图像关于直线 $x=0$(或 y 轴)对称.

10.(2017年·山东·国际经济与贸易)设 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$,则 $f(9x^2)$ 的定义域是________.

【答案】 $\left[-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right]$

【解析】 由题意知 $0\leqslant 9x^2\leqslant 1$,即 $0\leqslant x^2\leqslant\dfrac{1}{9}$,则 $-\dfrac{1}{3}\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{3}$.

本章题型总结

一、函数

题型一　相同函数的判断

方法突破

判断两个函数是否相同,要看函数的定义域、对应法则是否均相同.其中对应法则不能仅仅从解析式上考虑,要分析其对应法则的本质.

例 1　与 $y=x$ 表示相同函数的是(　　).

A. $y=\sqrt{x^2}$　　B. $y=\frac{x^2}{x}$　　C. $y=\begin{cases}x,x\geqslant 0\\-x,x<0\end{cases}$　　D. $y=\begin{cases}x,x\geqslant 0\\x,x<0\end{cases}$

【答案】 D

【解析】 因为 $y=\sqrt{x^2}=|x|$ 与 $y=x$ 对应法则不同,排除 A;$y=\frac{x^2}{x}=x\ (x\neq 0)$ 与 $y=x$ 的定义域不同,排除 B;$y=\begin{cases}x,x\geqslant 0\\-x,x<0\end{cases}$ 的实质是 $y=|x|$,与 $y=x$ 的对应法则不同,排除 C;$y=\begin{cases}x,x\geqslant 0\\x,x<0\end{cases}$ 与 $y=x$ 的定义域、对应法则均相同,故选 D.

题型二　求函数的定义域

1. 初等函数的定义域

方法突破

求函数的定义域时,应注意以下几个方面:

(1)函数式是整式时,定义域为 $\mathbf{R}$.

(2)函数式含分式时,分母不等于零.

(3)函数式含偶次根式时,被开方数大于等于零.

(4)函数式含对数式时,真数大于零,底数大于零且不等于 1.

(5)函数式含零指数式时,底数不等于零,如 $y=(x-1)^0$,则 $x-1\neq 0$,即 $x\neq 1$.

(6)函数中含三角函数和反三角函数时,如 $y=\sin x$ 或 $\cos x$,定义域为$(-\infty,+\infty)$;$y=\tan x$,则 $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$;$y=\cot x$,则 $x\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}$;$y=\arcsin x$ 或 $\arccos x$,定义域为$[-1,1]$;$y=\arctan x$ 或 $y=\operatorname{arccot} x$,定义域为$(-\infty,+\infty)$.

(7)分段函数的定义域是各分段区域内自变量取值范围的并集.

(8)若所给函数是几个函数的四则混合式,则取各部分定义域的交集.

例 2　(1)函数 $f(x)=\sqrt{x-1}+\frac{1}{2-x}$的定义域是(　　).

A. $[1,2)\cup(2,+\infty)$　　B. $[-1,+\infty)$

C. $(1,2)\cup(2,+\infty)$　　D. $(2,+\infty)$

(2)函数 $f(x)=\sqrt{2-x}+\arcsin(x+2)$的定义域是____________.

(1)【答案】 A

【解析】 要使$\sqrt{x-1}$有意义,则 $x-1\geqslant 0$,解得 $x\geqslant 1$;

要使$\frac{1}{2-x}$有意义,则 $2-x\neq 0$,解得 $x\neq 2$.

故函数的定义域为$[1,2)\cup(2,+\infty)$.

(2)【答案】 $[-3,-1]$

【解析】 要使$\sqrt{2-x}$有意义,则 $2-x\geqslant 0$,解得 $x\leqslant 2$;

要使 $\arcsin(x+2)$有意义,则$-1\leqslant x+2\leqslant 1$,解得$-3\leqslant x\leqslant -1$.

故函数的定义域为$[-3,-1]$.

2. 抽象函数的定义域

方法突破

(1)若已知函数 $f(x)$的定义域是$[a,b]$,求 $f[g(x)]$的定义域的具体做法:由 $f(x)$中的 $a\leqslant x\leqslant b$,得 $a\leqslant g(x)\leqslant b$,此时 x 的取值范围即为 $f[g(x)]$的定义域.

(2)若已知函数 $f[g(x)]$的定义域是$[a,b]$,求 $f(x)$的定义域的具体做法:由 $f[g(x)]$中的 $a\leqslant x\leqslant b$,求出 $g(x)$在$[a,b]$的值域,即为 $f(x)$的定义域.

例 3　(1)若函数 $f(x)$的定义域是$[0,1]$,则函数 $f(4x^2)$的定义域是____________.

(2)若函数 $f(x+1)$的定义域是$[-1,1]$,则函数 $f(x)$的定义域是(　　).

A. $[0,2]$　　B. $[-1,1]$　　C. $[-2,0]$　　D. $[-2,2]$

(1)【答案】 $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$

【解析】 令 $0\leqslant 4x^2\leqslant 1$,解得$-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant \frac{1}{2}$.

(2)【答案】 A

【解析】 设 $u=x+1$,则$-1+1\leqslant u\leqslant 1+1\Rightarrow 0\leqslant u\leqslant 2$.所以函数 $f(u)=f(x)$的定义域是$[0,2]$.

题型三　求函数的解析式和函数值

1. 已知函数 $f(x)$和 $g(x)$的解析式,求复合函数 $f[g(x)]$的解析式

方法突破

直接把 $g(x)$看作 $f(x)$中 x 的自变量,即得到函数 $f[g(x)]$的表达式.

例 4　已知 $f(x)=x^2-1$,则 $f(x+1)=$ ____________.

【答案】　x^2+2x

【解析】$f(x+1)=(x+1)^2-1=x^2+2x$.

2. 已知复合函数 $f[g(x)]$和内函数 $g(x)$的解析式,求外函数 $f(x)$的解析式

方法突破

(1)换元法:已知复合函数 $f[g(x)]$和内函数 $g(x)$的解析式,求外函数 $f(x)$的解析式,通常令 $g(x)=t$,由此能解出 $x=(t)$,将 $x=(t)$代入 $f[g(x)]$中,求得 $f(t)$的解析式,再用 x 替换 t,便得到 $f(x)$的解析式.

(2)凑配法:首先将复合函数 $f[g(x)]$的表达式通过恒等变形,写成以 $g(x)$为自变量的表达式,然后将 $g(x)$用自变量 x 替换,即得 $f(x)$的解析式.

例 5　已知 $f(x+1)=x^2-2x$,求 $f(x)$的解析式.

【解析】　令 $t=x+1$,则 $x=t-1$,

原式可化为:

$$f(t)=(t-1)^2-2(t-1)=t^2-2t+1-(2t-2)=t^2-4t+3,$$

综上所述,$f(x)=x^2-4x+3$.

例 6　已知 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$,求 $f(x)$的解析式.

【解析】　因为 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$,所以 $f(x)=x^2-2$.

3. 求函数值

方法突破

求当 $x=x_0$ 时,复合函数 $f[g(x)]$的函数值时,先求出 $g(x_0)$的值,再把所求的结果代入 $f(x)$计算即可.

例 7　已知函数 $f(x)=(x-1)^2+2$,则 $f[f(2)]=$ ____________.

【答案】　6

【解析】　$f(2)=(2-1)^2+2=3$. $f[f(2)]=f(3)=(3-1)^2+2=6$.

题型四　函数的性质的应用

1. 奇偶性和周期性（主要考查三角函数）

方法突破

（1）判断函数奇偶性的方法：

①定义法：若 $f(-x)=-f(x)$ 或 $f(-x)+f(x)=0$，则 $f(x)$ 为奇函数；

若 $f(-x)=f(x)$ 或 $f(-x)-f(x)=0$，则 $f(x)$ 为偶函数.

②图像法：若函数 $f(x)$ 的图像关于原点成中心对称图形，则 $f(x)$ 为奇函数；若函数 $f(x)$ 的图像关于 y 轴成轴对称图形，则 $f(x)$ 为偶函数.

（2）三角函数的周期：

$y=A\sin(\omega x+b)$，周期公式 $T=\frac{2\pi}{|\omega|}$，有界且 $-|A|\leqslant y\leqslant|A|$；

$y=A\cos(\omega x+b)$，周期公式 $T=\frac{2\pi}{|\omega|}$，有界且 $-|A|\leqslant y\leqslant|A|$；

$y=A\tan(\omega x+b)$，周期公式 $T=\frac{\pi}{|\omega|}$，无界.

例 8　（1）下列函数中，周期是 $\frac{\pi}{2}$ 的偶函数是（　　）.

A. $y=\sin 4x$　　B. $y=\cos 4x$　　C. $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$　　D. $y=\cos 2x$

（2）函数 $f(x)=\sin x e^{x^2}$ 的图形关于________对称.

（1）【答案】　B

【解析】　A 选项是奇函数；B 选项是偶函数且周期为 $\frac{\pi}{2}$；C 选项是非奇非偶函数；D 选项是偶函数且周期为 π.

（2）【答案】　原点

【解析】　因为 $f(-x)=\sin(-x)e^{(-x)^2}=-\sin x e^{x^2}=-f(x)$，所以 $f(x)$ 为奇函数，图形关于原点对称.

2. 正弦型函数的单调区间

方法突破

正弦型函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$，$x\in\mathbf{R}\left(其中 A>0,\omega>0,0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$中，

增区间求法：$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant\omega x+\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$；

减区间求法：$\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant\omega x+\varphi\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.

例 9　函数 $y=3\sin\frac{x}{2}$ 的递增区间是（　　）.

A. $[2k\pi,2k\pi+\pi](k\in\mathbf{Z})$　　B. $[2k\pi-\pi,2k\pi+\pi](k\in\mathbf{Z})$

C. $[4k\pi-\pi,4k\pi+\pi](k\in\mathbf{Z})$　　D. $[4k\pi,4k\pi+\pi](k\in\mathbf{Z})$

【答案】 C

【解析】 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{1}{2}x\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}$,即 $4k\pi-\pi\leqslant x\leqslant 4k\pi+\pi,k\in\mathbf{Z}$.

题型五 求反函数

方法突破

求函数反函数的步骤:

(1)由 $y=f(x)$,解出 $x=f^{-1}(y)$,即用 y 表示 x;

(2)将 x,y 的位置互换,得到 $y=f^{-1}(x)$;

(3)注明反函数的定义域,即原函数的值域.

例 10 函数 $y=3^{x+1}$ 的反函数为__________.

【答案】 $y=\log_3 x-1$

【解析】 由 $y=3^{x+1}$ 得 $x=\log_3 y-1$,自变量用 x 表示,因变量用 y 表示,得 $y=\log_3 x-1$.

二、极限

题型一 极限的计算

方法突破

求极限的解题思路:

(1)当 $f(x)$ 在所在点处连续,函数值等于极限值.

(2)当 $f(x)$ 为"分式±分式"或"$\frac{\text{分式}}{\text{分式}}$"$\left(\frac{0}{0}\text{型}\right)$时,先通分、约分.

(3)当 $f(x)$ 为"$\frac{\infty}{\infty}$型"时,利用抓大头思想,分子分母同除以最高次幂求极限.

一般地,设 $a_n\neq 0,b_m\neq 0,m,n$ 为非负整数,分子分母同除以 x 的最高次幂有如下规律:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0}=\begin{cases}0, & m>n,\\ \infty, & m<n,\\ \frac{a_n}{b_n}, & m=n.\end{cases}$$

(4)当 $f(x)$ 含有根式时,先分子、分母有理化.

(5)当 $f(x)$ 为两个重要极限时,转化成重要极限套公式.

(6)当 $f(x)$ 为"$\frac{0}{0}$型"时,可采用等价无穷小代换.

(7)当 $f(x)$ 为幂指数形式时,一般用指对恒等式变换,再判断指数项类型求极限.

(8)当 $f(x)$ 为分段函数形式时,依据极限存在的充要条件判断.

1. 初等函数在所求点处连续,直接代入数值求极限

例 1　求极限$\lim\limits_{x\to1}(2x-1)$.

【解析】　$\lim\limits_{x\to1}(2x-1)=2\times1-1=1$.

2. 约去不能代入的零因子求极限

例 2　求极限$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4-1}{x-1}$.

【解析】　$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}(x+1)(x^2+1)=4$.

3. 分子分母同除以最高次幂求极限(抓大头)

例 3　求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-x^2}{3x^3+1}$.

【解析】　$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-x^2}{3x^3+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{3+\dfrac{1}{x^3}}=\dfrac{1}{3}$.

4. 分子(母)有理化求极限

例 4　求极限$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2+1})$.

【解析】　$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2+1})=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2+1})(\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x^2+1}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x^2+1}}=0$.

例 5　求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sqrt{x+1}-1}$.

【解析】　$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sqrt{x+1}-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x(\sqrt{x+1}+1)}{x+1-1}=\lim\limits_{x\to0}(\sqrt{x+1}+1)=2$.

5. 应用两个重要极限的公式求极限

两个重要极限是$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$和$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=\mathrm{e}$.

例 6　求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{3}\sin\dfrac{1}{x}$.

【解析】　$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{3}\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sin\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}}=\dfrac{1}{3}$.

例 7　求极限$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$.

【解析】　$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{2}{x-1}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{\dfrac{x-1}{2}}\right)^{\frac{x-1}{2}}\left(1+\dfrac{2}{x-1}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2=\mathrm{e}^2$.

6. 用等价无穷小量的代换求极限

这可以称之为求极限最简便的方法. 常见的等价无穷小有:

当 $x\to 0$ 时，$\sin x\sim x,\tan x\sim x,\arcsin x\sim x,\arctan x\sim x$，$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$，$\ln(1+x)\sim x,e^x-1\sim x$，$\sqrt[n]{x+1}-1\sim\frac{x}{n}$.

例 8　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}$.

【解析】 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot x}{\frac{1}{2}x^2}=2$.

7. 用对数恒等式 $a^b=e^{b\ln a}$ 求极限

例 9　求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sin\frac{2}{x}+1\right)^{2x}$.

【解析】 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sin\frac{2}{x}+1\right)^{2x}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}2x\ln\left(\sin\frac{2}{x}+1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}2x\cdot\sin\frac{2}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}2x\cdot\frac{2}{x}}=e^4$.

8. 分段函数在分段点处的极限

例 10　设函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-1}{x-1},x>1,\\ 2,x\leqslant 1,\end{cases}$ 试求 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$.

【解析】 $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}(x+1)=2$，$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=2$，即 $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=2$，

故 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=2$.

题型二　极限式中参数的确定

方法突破

在求解极限式中的参数问题时，在所求极限存在的前提下，可利用极限的四则运算法则、等价无穷小代换和重要极限等方法求解.

例 11　已知极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}=3$，则 k 的值为(　　).

A. 1　　　　B. 3　　　　C. -1　　　　D. $\frac{1}{3}$

【答案】 B

【解析】 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin kx}{kx}\cdot k=k=3$.

例 12　已知极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{2x}=e^2$，则 $a=$________.

【答案】 1

【解析】 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a}\cdot\frac{a}{x}\cdot 2x}=e^{2a}=e^2$，故 $a=1$.

例 13　设 a,b 为常数，若 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(bx+\frac{ax^2}{x+1}\right)=2$，则 $a+b=$________.

【答案】 0

【解析】 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(bx+\dfrac{ax^2}{x+1}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(a+b)x^2+bx}{x+1}=2$，故 $a+b=0$.

题型三 无穷小的比较

方法突破

当 $x\to x_0$ 时，$f(x)\to 0$，$g(x)\to 0$，则：

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$ 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的高阶无穷小.

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$ 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的等价无穷小.

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=k$（$k$ 是常数，且 $k\neq 1$）时，$f(x)$ 与 $g(x)$ 是同阶非等价无穷小.

(4) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty$ 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的低阶无穷小.

例 14　当 $x\to 0$ 时，$\ln(1+x^2)$ 是 $1-\cos x$ 的（　　）.

A. 低阶无穷小　　　　B. 高阶无穷小

C. 同阶但不等价无穷小　　　　D. 等价无穷小

【答案】 C

【解析】 当 $x\to 0$ 时，$\ln(1+x^2)\sim x^2$，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{1-\cos x}=\dfrac{x^2}{\dfrac{1}{2}x^2}=2$，故选 C.

例 15　当 $x\to 1$ 时，将下列各量与无穷小量 $x-1$ 进行比较.

(1) x^3-3x+2；　(2) $\lg x$；　(3) $(x-1)\sin\dfrac{1}{x-1}$.

【解析】 (1) 因为 $\lim\limits_{x\to 1}(x^3-3x+2)=0$，所以 $x\to 1$ 时，x^3-3x+2 是无穷小量，又因为

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)}=0,$$

所以 x^3-3x+2 是比 $x-1$ 较高阶的无穷小量.

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to 1}\lg x=0$，所以当 $x\to 1$ 时，$\lg x$ 是无穷小量，又

$$\lim_{x\to 1}\frac{\lg x}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln[1+(x-1)]}{(x-1)\cdot\ln 10}=\frac{1}{\ln 10},$$

所以 $\lg x$ 是关于 $x-1$ 的同阶无穷小量.

(3) 由 $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\sin\dfrac{1}{x-1}=0$，知当 $x\to 1$ 时，$(x-1)\sin\dfrac{1}{x-1}$ 是无穷小量，但是

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\cdot\sin\dfrac{1}{x-1}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\sin\dfrac{1}{x-1}$ 不存在. 所以，$(x-1)\sin\dfrac{1}{x-1}$ 与 $x-1$ 不能比较.

三、连续

题型一　函数的连续性

方法突破

讨论分段函数在分断点处的连续性时，我们需要知道判断函数在某点连续的三个条件：①$f(x)$在$x=x_0$处有定义；②$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在；③$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$. 在讨论②时，常常通过讨论$x_0$处的左极限和右极限，按极限存在的充要条件讨论极限的存在性.

例 1　若函数$f(x)$在点$x=0$处连续，则$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=($　　$)$.

A. 0　　　　B. $f(0)$

C. ∞　　　　D. 不存在

【答案】 B

【解析】 由连续性的定义可知，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$.

例 2　设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x^2}, & x\neq 0,\\ a, & x=0,\end{cases}$ 如果$f(x)$在$x=0$处连续，则$a=$________.

【答案】 $\dfrac{1}{2}$

【解析】 因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$，如果$f(x)$在$x=0$处连续，则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}=f(0)=a$.

题型二　函数的间断点及其类型的判断

方法突破

1. 间断点的判断

设函数$f(x)$在点x_0的某去心邻域内有定义. 在此前提下，如果函数$f(x)$有下列三种情形之一：

(1)在$x=x_0$没有定义；

(2)虽在$x=x_0$有定义，但$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在；

(3)虽在$x=x_0$有定义，且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，但$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$；

则函数$f(x)$在点x_0处不连续，而点x_0称为函数$f(x)$的不连续点或间断点.

2. 间断点类型的判断

x_0是$f(x)$的间断点，$f(x)$在x_0点处的左右极限都存在，则称x_0为第一类间断点.

$f(x)$在 x_0 点处的左右极限至少有一个不存在，则 x_0 是 $f(x)$的第二类间断点.

第一类间断点中：$\begin{cases}\text{可去间断点：左右极限相等；}\\ \text{跳跃间断点：左右极限不相等.}\end{cases}$

第二类间断点：无穷间断点，振荡间断点等.

例 3　设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x+1, & x>1,\end{cases}$ 讨论 $f(x)$在 $x=1$ 处的连续性.

【解析】　函数 $f(x)$的图像如图 1.1 所示.

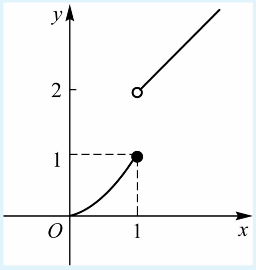

图 1.1

因为 $f(1)=1$，而 $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(x+1)=2$，$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}x^2=1$，得$\lim\limits_{x\to1}f(x)$不存在，所以 $x=1$ 是间断点.

由于左右极限存在但不相等，因此它是第一类间断点，且为跳跃间断点.

例 4　设 $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$，则 $x=2$ 是 $f(x)$的(　　).

A. 可去间断点　　B. 跳跃间断点

C. 无穷间断点　　D. 连续点

【答案】　A

【解析】　因为 $f(x)$在 $x=2$ 处无定义，所以 $x=2$ 是 $f(x)$的间断点. 又$\lim\limits_{x\to2}f(x)=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x+2)(x-2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}(x+2)=4$，故 $x=2$ 是 $f(x)$的可去间断点.

例 5　$x=1$ 为函数 $y=\dfrac{x^4-1}{x^3-1}$的________间断点.

【答案】　可去

【解析】　$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4-1}{x^3-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\dfrac{4}{3}$，故 $x=1$ 是函数的可去间断点.

题型三　证明方程根的存在性

方法突破

方程的根的存在性的判定步骤：

(1)构造一个闭区间$[a,b]$，且函数 $f(x)$在该闭区间上连续；

(2)计算 $f(a)$，$f(b)$，说明 $f(a)\ f(b)<0$；

(3)由零点定理可得方程 $f(x)=0$ 在(a,b)内至少有一个实根.

例 6　证明方程 $x^3-4x^2+1=0$ 在$(0,1)$内至少有一个实数根.

【证明】 设 $f(x)=x^3-4x^2+1$，因为 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续，所以，它在$[0,1]$上连续，且 $f(0)=1>0$，$f(1)=-2<0$，由零点定理知，至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=0$，即方程 $x^3-4x^2+1=0$ 在区间$(0,1)$内至少有一个实数根.

第一章复习题

一、选择题

1. 函数 $f(x)=\sqrt{2^x-1}+\arctan\frac{1}{x-1}$ 的定义域为(　　).

A. $[0,1)$　　B. $(1,+\infty)$

C. $[0,1)\cup(1,+\infty)$　　D. $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$

2. 已知函数 $f(x+1)$ 的定义域为 $[2,5]$，则函数 $y=\frac{f(3x)}{\sqrt{\log_2(4-x^2)}}$ 的定义域为(　　).

A. $[1,+\infty)$　　B. $[1,\sqrt{3})$

C. $(1,+\infty)$　　D. $\left[\frac{1}{3},\sqrt{3}\right)$

3. 下列命题中为真命题的是(　　).

①函数 $y=\frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$ 与 $y=\ln\tan\frac{x}{2}$ 是同一函数；

②若函数 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称，则函数 $y=f(2x)$ 与 $y=\frac{1}{2}g(x)$ 的图像也关于直线 $y=x$ 对称；

③若奇函数 $f(x)$ 对定义域内任意 x 都有 $f(x)=f(2-x)$，则 $f(x)$ 为周期函数.

A. ①②　　B. ①③

C. ②③　　D. ②

4. 下列函数中既是偶函数又在 $(0,+\infty)$ 上单调递减的是(　　).

A. $f(x)=e^x-1$　　B. $f(x)=x+\frac{1}{x}$

C. $f(x)=\frac{1}{x^4}$　　D. $f(x)=\lg|x|$

5. 设函数 $y=2+\ln(x+3)$，则此函数的反函数是(　　).

A. $y=e^{2x+3}-3$　　B. $y=e^{x-2}-3$

C. $x=\ln(y-2)-3$　　D. $y=\ln(x-2)-3$

6. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\log_a x, & 0<x<1,\\ (4a-1)x+2a, & x\geqslant 1,\end{cases}$ 满足对任意 $x_1\neq x_2$，都有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$ 成立，则实数 a 的取值范围是(　　).

A. $\left(0,\frac{1}{6}\right)$　　B. $\left(0,\frac{1}{6}\right]$

C. $\left(0,\frac{1}{4}\right)$　　D. $(1,+\infty)$

7. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{8^x}{8^x-5^x}=($　　$)$.

A. 1　　B. $\dfrac{5}{8}$

C. $\dfrac{8}{5}$　　D. 0

8. 函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有意义是极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在的(　　).

A. 充分条件　　B. 必要条件

C. 充要条件　　D. 无关条件

9. 函数 $f(x)=\begin{cases}2x-1, & 0<x\leqslant 1,\\ 2-x, & 1<x\leqslant 3\end{cases}$ 在(　　)时极限为 1.

A. $x\to\dfrac{1}{2}$　　B. $x\to 1$

C. $x\to\dfrac{3}{2}$　　D. $x\to 2$

10. 设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$,则下列正确的是(　　).

A. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]=\infty$　　B. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)]=\infty$

C. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)}=0$　　D. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)+g(x)}=0$

11. 当 $x\to 0$ 时下列变量中与 x 是等价无穷小的是(　　).

A. $\sin^{\frac{1}{2}}x$　　B. $\ln(1+x)$

C. $\cos x$　　D. $2x^2-x$

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ 的值是(　　).

A. 0　　B. $\dfrac{1}{2}$

C. 1　　D. 2

13. 下列式子中正确的是(　　).

A. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=1$　　B. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\sin x=1$

C. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}=1$　　D. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}=1$

14. $\lim\limits_{x\to 0}(1+2\sin x)^{\frac{2}{\sin x}}=($　　$)$.

A. e　　B. e^2

C. e^4　　D. 1

15. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}a+\ln x, & x\geqslant 1,\\ 2ax-1, & x<1\end{cases}$ 在 $x=1$ 处连续,则 $a=($　　$)$.

A. 1　　B. -1

C. 0　　D. 3

16. 函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x>0, \\ a+x^2, & x\leqslant 0, \end{cases}$ 要使 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，则 $a=$(　　).

A. 1　　B. 0

C. 任意实数　　D. 不存在

17. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(a)f(b)<0$ 是方程 $f(x)=0$ 在 (a,b) 上至少有一根的(　　).

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

18. 关于函数 $f(x)$，下列说法错误的是(　　).

A. 若 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是无穷小量，则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$

B. 若函数在 $x=0$ 处存在极限，则函数在 $x=0$ 处连续

C. 若 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=f(0)$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续

D. 若 $f(x)=\dfrac{5}{x-3}$，则 $\lim\limits_{x\to 3}f(x)=\infty$

19. 函数 $f(x)=\dfrac{x-4}{x^2-3x-4}$ 间断点的个数为(　　).

A. 0　　B. 1

C. 2　　D. 3

20. $x=0$ 是函数 $f(x)=\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ 的(　　).

A. 连续点　　B. 可去间断点

C. 跳跃间断点　　D. 第二类间断点

二、填空题

1. 函数 $f(x)=\arcsin\dfrac{x-1}{3}-\dfrac{1}{\sqrt{16-x^2}}$ 的定义域为________.

2. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=\log_2(x+1)+m+1$，则 $f(-3)=$________.

3. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，且在 $[0,+\infty)$ 上是增函数，$f\left(\dfrac{1}{3}\right)=0$，则不等式 $f(\log_{\frac{1}{8}}x)>0$ 的解集为________.

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+e^x)}{x}=$________.

5. 已知极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x-\sqrt{ax^2-x+1})$ 存在，则 a 的值为________.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x-x}{\sin 3x+x}=$________.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^2-x\sin 2x+4}=$________.

8. 若函数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin 3x}{x}, & x<0, \\ k, & x=0, \\ 3x^2+x+3, & x>0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $k=$________.

9. 设 $f(x)$ 处处连续，且 $f(2)=3$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{x}f\left(\frac{e^{2x}-1}{x}\right)=$________.

10. 设函数 $f(x)=\frac{x^2-1}{|x|(x-1)}$，则 $f(x)$ 的第一类间断点为________.

三、判断题

1. 函数 $f(x)=x^2+x+1$ 与函数 $g(x)=\frac{x^3-1}{x-1}$ 相同. (　　)

2. 如果 $|f(x)|>M$（M 为一个常数），则 $f(x)$ 为无穷大. (　　)

3. 如果数列有界，则极限存在. (　　)

4. $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. (　　)

5. 如果 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$，则 $f(x)=A+\alpha$（当 $x\to\infty$ 时，α 为无穷小）. (　　)

6. 如果 $\alpha\sim\beta$，则 $\alpha-\beta=o(\alpha)$. (　　)

7. 当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x$ 与 x^2 是同阶无穷小. (　　)

8. $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}=0$. (　　)

9. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$. (　　)

10. 点 $x=0$ 是函数 $y=\frac{|x|}{x}$ 的无穷间断点. (　　)

11. 函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 必在闭区间 $[a,b]$ 内取得最大值、最小值. (　　)

四、解答题

1. 求函数 $y=\sqrt{x-2}+1$ 的反函数.

2. 判断函数 $f(x)=\frac{2x}{x-1}$ 在区间 $(0,1)$ 上的单调性.

3. 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+6}\right)^{\frac{x-1}{2}}$.

4. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{(e^x-1)\sin x}$.

5. 求极限$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1-\cos \pi x}{x^2-4x+4}$.

6. 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n-1}+\dfrac{1}{n^2+n-2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n-n}\right)$.

7. 设$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{f(x)}{x}}-1}{x^2}=A(A\neq 0)$,试确定常数$a,b$,使$x\to 0$时,$f(x)$与$ax^b$等价.

8. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$，求 $f(x)$ 的间断点并分类.

五、证明题

1. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$c,d\in(a,b)$，$t_1>0$，$t_2>0$. 证明：在 $[a,b]$ 内存在点 ξ，使得 $(t_1+t_2)f(\xi)=t_1f(c)+t_2f(d)$.