数学考前冲刺模拟试卷(一)

一、单项选择题(本大题共 10 小题,每小题 3 分,共 30 分)

1. 函数 $f(x)=\sqrt{2^x-1}+\frac{1}{x-1}$ 的定义域是(　　).

A. $[0,1)$　　B. $(1,+\infty)$

C. $[0,1)\cup(1,+\infty)$　　D. $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$

2. $\lim\limits_{x\to0}2^{\frac{1}{x}}=$(　　).

A. 0　　B. $+\infty$　　C. ∞　　D. 不存在

3. 若函数 $f(x)=\frac{(x-1)(x-2)}{x(x-1)}$,则点 $x=1$ 是(　　)间断点.

A. 可去　　B. 跳跃　　C. 无穷　　D. 震荡

4. 若 $f(x)$ 在点 x_0 处不可导,则 $f(x)$ 在点 x_0 处(　　).

A. 无定义　　B. 不连续　　C. 没有切线　　D. 不可微

5. 已知 $f'(x_0)=a$,则 $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x_0-5h)-f(x_0)}{\sin h}=$(　　).

A. $\frac{a}{5}$　　B. $-\frac{a}{5}$　　C. $5a$　　D. $-5a$

6. 设 $f(x)=\int_2^x e^{-t}dt$,则曲线 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内(　　).

A. 单调递减,曲线为凹的　　B. 单调递减,曲线为凸的

C. 单调递增,曲线为凹的　　D. 单调递增,曲线为凸的

7. e^{-x^2} 是 $f(x)$ 的一个原函数,则 $\int xf'(x)dx=$(　　).

A. $-(2x^2-1)e^{-x^2}+C$　　B. $(2x^2-1)e^{-x^2}+C$

C. $-(2x^2+1)e^{-x^2}+C$　　D. $(2x^2+1)e^{-x^2}+C$

8. $z=e^{xy}$ 在 $(1,1)$ 处的全微分 $dz|_{(1,1)}=$(　　).

A. 0　　B. $edx+edy$

C. $edx-edy$　　D. $ye^{xy}dx+xe^{xy}dy$

9. 设 $abc\neq0$,则 $\begin{bmatrix}a&0&0\\0&0&b\\0&c&0\end{bmatrix}$ 的逆矩阵为(　　).

A. $\begin{bmatrix}a&0&0\\0&0&b\\0&c&0\end{bmatrix}$　　B. $\begin{bmatrix}a&0&0\\0&0&c\\0&b&0\end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix}\frac{1}{a}&0&0\\0&0&\frac{1}{b}\\0&\frac{1}{c}&0\end{bmatrix}$　　D. $\begin{bmatrix}\frac{1}{a}&0&0\\0&0&\frac{1}{c}\\0&\frac{1}{b}&0\end{bmatrix}$

10. 无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n}$(　　).

A. 发散　　B. 绝对收敛

C. 条件收敛　　D. 不能判断敛散性

二、填空题(本大题共 5 小题,每小题 4 分,共 20 分)

11. 若函数 $f(x)=\begin{cases}3x+a,x\geqslant1,\\x+1,x<1\end{cases}$ 在点 $x=1$ 处连续,则常数 $a=$________.

12. 设 $y=x^n+e^{2x-1}$,则 $y^{(n)}=$________.

13. 已知行列式 $\begin{vmatrix}1&0&2\\x&3&1\\4&x&5\end{vmatrix}$ 的代数余子式 $A_{12}=-1$,则 $A_{21}=$________.

14. 已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2-u_n)$ 收敛,则 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=$________.

15. 微分方程 $\cos ydy=\sin xdx$ 的通解为________.

三、计算题(本大题共 4 小题,每小题 10 分,共 40 分)

16. 计算定积分 $\int_{-1}^{1}(xe^x+x\sin x)dx$.

17. 已知线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2=\lambda, \\ 4x_1+x_2+2x_3=\lambda+2, \\ 7x_1+x_2+4x_3=2\lambda+3, \end{cases}$ 当 λ 为何值时，方程组有解？并求其通解.

18. 设函数 $f(x,y,z)=xy^2+yz^2+zx^2$，求 $f_{xz}(1,2,3)$.

19. 求 $y=\sqrt{x}$ 曲线与直线 $x=1$，$x=4$，$y=0$ 所围成的图形的面积和该图形绕 y 轴旋转产生的旋转体的体积.

四、应用题(本题 10 分)

20. 一厂家生产某种产品，已知产品的销售量 q(单位：件)与销售价格 p(单位：元/件)满足 $p=420-\frac{1}{2}q$，产品的成本函数 $C(q)=30\ 000+100q$(元)，问该产品销售量 q 为何值时，生产该产品获得的利润最大？并求此时的销售价格.

数学考前冲刺模拟试卷(二)

一、单项选择题(本大题共 10 小题,每小题 3 分,共 30 分)

1. 函数 $f(x)=\sqrt{x-3}+\arctan\dfrac{1}{x}$ 的定义域是(　　).

A. $(-\infty,+\infty)$　　B. $[0,3]$

C. $(-\infty,0)\cup(0,3)$　　D. $[3,+\infty)$

2. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1+a)x^4+bx^3+2}{x^3+x^2-1}=-2$,则 a,b 的值分别为(　　).

A. $a=-3,b=0$　　B. $a=-1,b=-2$

C. $a=0,b=-2$　　D. $a=-1,b=0$

3. 若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续,且 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2}=2$,则 $f'(2)=$(　　).

A. -4　　B. -2　　C. 2　　D. 4

4. 下列说法正确的是(　　).

A. $\int_0^1 e^{x^2}dx\leqslant\int_0^1 e^{x^3}dx$　　B. $\int_1^2\ln(1+x^2)dx\leqslant\int_1^2\ln(1+x^3)dx$

C. $\int_{-\pi}^{\pi}x\sin^3 x dx\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}x\cos^3 x dx$　　D. $\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{1+\sin x}dx<\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{1+\cos x}dx$

5. $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=m$,$\begin{vmatrix}b_1 & a_{11}\\ b_2 & a_{21}\end{vmatrix}=n$,则 $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}+b_1\\ a_{21} & a_{22}+b_2\end{vmatrix}=$(　　).

A. $m-n$　　B. $m+n$

C. $-m+n$　　D. $-m-n$

6. 微分方程 $(y')^3+3y'(y'')^2+xy^4=0$ 的阶数是(　　).

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

7. 下列关系式不正确的是(　　).

A. $d\left[\int f(x)dx\right]=f(x)dx$　　B. $\int f'(x)dx=f(x)+C$

C. $\dfrac{d}{dx}\int f(x)dx=f'(x)$　　D. $\left[\int f(x)dx\right]'=f(x)$

8. 广义积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{1+x^2}dx$ 的值为(　　).

A. 发散　　B. 0　　C. 1　　D. $\dfrac{\pi}{2}$

9. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\tan\dfrac{\pi}{n^3}$(　　).

A. 绝对收敛　　B. 条件收敛

C. 发散　　D. 敛散性不能确定

10. 行列式 $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{vmatrix}$ 的值为(　　).

A. 6　　B. -6

C. 18　　D. -18

二、填空题(本大题共 5 小题,每小题 4 分,共 20 分)

11. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x+e^{2ax}-1}{x}, & x\neq 0,\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则 $a=$________.

12. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\int_{x^2}^{1}e^t dt}{x-1}=$________.

13. 曲线 $\begin{cases}x=t^3\\ y=e^t\end{cases}$ 在 $t=1$ 处的切线方程是________.

14. 设函数 $z=f(x+y,y^2)$,f 具有连续偏导数,则全微分 $dz=$________.

15. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n\cdot 2^n}$ 的收敛域为________.

三、计算题(本大题共 4 小题,每小题 10 分,共 40 分)

16. 设函数 $\begin{cases}e^x, & x<0,\\ 1+\sin x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 计算定积分 $\int_{\frac{1}{2}}^{2}f(1-x)dx$.

17. λ 为何值时，线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+4x_3=4, \\ 4x_1+3x_2+4x_3=12, \\ 7x_1+5x_2+4x_3=\lambda \end{cases}$ 有解？并求其通解.

18. 设函数 $z=f\left(x+y,\dfrac{y}{x}\right)$，其中 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

19. 求微分方程 $xy'=2y+x^2$ 的通解.

四、应用题(本题 10 分)

20. 设某产品每月产量为 x 吨时，总成本函数为 $C(x)=x^2+20x+900$(元)，问当月产量为多少时，平均成本最低？

数学考前冲刺模拟试卷(三)

一、单项选择题(本大题共10小题,每小题3分,共30分)

1. 函数 $f(x)=\sqrt{1-\log_3 x}$的定义域是(　　).

A. $(0,3)$　　B. $(0,3]$

C. $(3,+\infty)$　　D. $[3,+\infty)$

2. 极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x}\right)^{2x}=$(　　).

A. e^4　　B. e^{-2}

C. 1　　D. e^2

3. 曲线方程为$\begin{cases}x=\cos t,\\ y=\sin 2t,\end{cases}$ 则曲线在 $t=\dfrac{\pi}{4}$处的切线方程为(　　).

A. $y=1$　　B. $y=x$

C. $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $y=0$

4. $y=e^{2x}$,则 $dy=$(　　).

A. $e^{2x}dx$　　B. $2e^{2x}dx$

C. e^{2x}　　D. $2e^{2x}$

5. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 皆为 n 阶矩阵,以下结论正确的是(　　).

A. $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{BA}|$　　B. $|-\boldsymbol{A}|=-|\boldsymbol{A}|$

C. $|2\boldsymbol{A}|=2|\boldsymbol{A}|$　　D. $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$

6. 已知 $\int f(x)dx=F(x)+C$,则$\int e^{-x}f(e^{-x})dx=$(　　).

A. $F(x)+C$　　B. $-F(x)+C$

C. $F(e^{-x})+C$　　D. $-F(e^{-x})+C$

7. 设 $f(x)=e^{-x}$,则 $\int\dfrac{f'(\ln x)}{x}dx=$(　　).

A. $-\dfrac{1}{x}+C$　　B. $\dfrac{1}{x}$

C. $\dfrac{1}{x}+C$　　D. $\ln x+C$

8. 以下广义积分收敛的是(　　).

A. $\int_1^{+\infty}x^{-2}dx$　　B. $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x}dx$

C. $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}dx$　　D. $\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{x^2}dx$

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n\cdot 2^n}$ 的收敛半径为(　　).

A. 3　　B. 2

C. 4　　D. $\dfrac{1}{4}$

10. 下列微分方程中,属于一阶可分离变量微分方程的是(　　).

A. $y^2dx+(x+y)dy=0$　　B. $dx+(x^2+y)dy=0$

C. $\dfrac{dy}{dx}=xy^2+x$　　D. $\dfrac{d^2y}{dx^2}=xy$

二、填空题(本大题共5小题,每小题4分,共20分)

11. 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\sin 2x+x\sin\dfrac{1}{x}\right)=$________.

12. 方程 $y^5+2y-x-7x^3=0$ 所确定的曲线 $y=y(x)$在 $x=0$ 处的切线方程为________.

13. $u=f\left(xy,\dfrac{xz}{y}\right)$,其中 f 具有一阶连续偏导数,则$\dfrac{\partial u}{\partial y}=$________.

14. 行列式$\begin{vmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&n-1\\n&0&0&\cdots&0\end{vmatrix}=$________.

15. 已知幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-1)^n}{n\cdot 3^n}$,其收敛半径是________;收敛区间是________.

三、计算题(本大题共4小题,每小题10分,共40分)

16. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+\cos x},-\pi<x<0,\\ xe^{-x^2},x\geqslant 0,\end{cases}$计算定积分$\int_{-2}^{2}f(x)dx$.

17. 设 $z=x^4+y^4-4x^2y^2$，求$\frac{\partial z}{\partial y}$及$\frac{\partial z}{\partial x}$.

18. 求微分方程 $y'+\frac{2x}{1+x^2}y=\frac{1}{1+x^2}$的通解.

19. 求线性方程组$\begin{cases}2x_1-5x_2+2x_3=-3,\\ x_1+2x_2-x_3=3,\\ -2x_1+14x_2-6x_3=12\end{cases}$的通解.

四、应用题(本题 10 分)

20. 某工厂生产某种产品需两种原料 A、B，且产品的产量 z 与所需 A 原料数 x 及 B 原料数 y 的关系式为 $z=x^2+8xy+7y^2$. 已知 A 原料的单价为 1 万元/吨，B 原料的单价为 2 万元/吨，现有 100 万元，如何购置原料才能使该产品的产量最大？

数学考前冲刺模拟试卷(一)参考答案及解析

一、单项选择题

1.【答案】C

【解析】使根式 $\sqrt{2^x-1}$ 有意义的实数 x 的集合是 $\{x \mid 2^x-1\geqslant 0\}=\{x \mid x\geqslant 0\}$，使分式 $\dfrac{1}{x-1}$ 有意义的实数 x 的集合是 $\{x \mid x\neq 1\}$. 因此，函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x \mid x\geqslant 0, 且\ x\neq 1\}$，即 $[0,1)\cup(1,+\infty]$. 故本题选 C.

2.【答案】D

【解析】因为 $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$，所以 $\lim\limits_{x\to 0^-}2^{\frac{1}{x}}=0$, $\lim\limits_{x\to 0^+}2^{\frac{1}{x}}=+\infty$，故 $\lim\limits_{x\to 0}2^{\frac{1}{x}}$ 不存在.

3.【答案】A

【解析】函数 $f(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)}{x(x-1)}$ 在点 $x=1$ 处无定义，且 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x-2)}{x(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-2}{x}=-1$，所以点 $x=1$ 是函数的可去间断点.

4.【答案】D

【解析】根据可微与可导之间的关系可知可微必可导.

5.【答案】D

【解析】$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-5h)-f(x_0)}{\sin h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-5h)-f(x_0)}{h}\cdot\dfrac{h}{\sin h}=(-5)\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-5h)-f(x_0)}{-5h}\cdot\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h}{\sin h}=-5f'(x_0)\times 1=-5a$.

6.【答案】D

【解析】$f'(x)=e^{-x}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内恒大于 0，所以曲线单调递增；$f''(x)=-e^{-x}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内恒小于 0，所以曲线是凸的.

7.【答案】C

【解析】由原函数的定义可知 $f(x)=(e^{-x^2})'=e^{-x^2}(-x^2)'=-2xe^{-x^2}$. 所以 $\int xf'(x)dx=\int xd(f(x))=xf(x)-\int f(x)\,dx=-2x^2e^{-x^2}-e^{-x^2}+C=-(2x^2+1)e^{-x^2}+C$.

8.【答案】B

【解析】$\dfrac{\partial z}{\partial x}=e^{xy}\cdot y=ye^{xy}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=e^{xy}\cdot x=xe^{xy}$，则 $z=e^{xy}$ 在 $(1,1)$ 处的全微分 $dz\Big|_{(1,1)}=\dfrac{\partial z}{\partial x}dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(1,1)}dy=edx+edy$.

9.【答案】D

【解析】记 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a&0&0\\0&0&b\\0&c&0\end{bmatrix}$, $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})=\left[\begin{array}{ccc:ccc}a&0&0&1&0&0\\0&0&b&0&1&0\\0&c&0&0&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}a&0&0&1&0&0\\0&c&0&0&0&1\\0&0&b&0&1&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&\frac{1}{a}&0&0\\0&1&0&0&0&\frac{1}{c}\\0&0&1&0&\frac{1}{b}&0\end{array}\right]=$

$(\boldsymbol{E},\boldsymbol{A}^{-1})$，所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{a}&0&0\\0&0&\frac{1}{c}\\0&\frac{1}{b}&0\end{bmatrix}$.

10.【答案】B

【解析】级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 是公比为 $q=\frac{1}{2}<1$ 的等比级数，收敛，故原级数绝对收敛.

二、填空题

11.【答案】-1

【解析】若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，则 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$. 而 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x+1)=2$，$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(3x+a)=3+a$，$f(1)=3+a$. 故 $3+a=2$，解得 $a=-1$.

12.【答案】$n!+2^n\mathrm{e}^{2x-1}$

【解析】$y'=nx^{n-1}+2\mathrm{e}^{2x-1}$，$y''=n(n-1)x^{n-2}+4\mathrm{e}^{2x-1}$，$y'''=n(n-1)(n-2)x^{n-3}+8\mathrm{e}^{2x-1}$，$\cdots$ $y^{(n)}=n(n-1)(n-2)\cdots\cdot 1x^{n-n}+2^n\mathrm{e}^{2x-1}=n!+2^n\mathrm{e}^{2x-1}$.

13.【答案】2

【解析】由 $A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}x&1\\4&5\end{vmatrix}=4-5x=-1$，得 $x=1$，从而 $A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}0&2\\x&5\end{vmatrix}=2x=2$.

14.【答案】2

【解析】因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(2-u_n)$ 收敛，由级数收敛的必要条件知 $\lim\limits_{n\to\infty}(2-u_n)=0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=2$.

15.【答案】$\sin y=-\cos x+C$

【解析】方程两边积分，$\sin y=-\cos x+C$.

三、计算题

16.【解析】$\int_{-1}^{1}x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}x\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)=x\mathrm{e}^x\Big|_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=x\mathrm{e}^x\Big|_{-1}^{1}-\mathrm{e}^x\Big|_{-1}^{1}=(\mathrm{e}+\mathrm{e}^{-1})-(\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1})=2\mathrm{e}^{-1}$，

$\int_{-1}^{1}x\sin x\mathrm{d}x=-\int_{-1}^{1}x\mathrm{d}(\cos x)=-x\cos x\Big|_{-1}^{1}+\int_{-1}^{1}\cos x\mathrm{d}x=-2\cos1+\sin x\Big|_{-1}^{1}=-2\cos 1+2\sin 1$，则

$\int_{-1}^{1}(x\mathrm{e}^x+x\sin x)\mathrm{d}x=2\mathrm{e}^{-1}-2\cos 1+2\sin 1=2(\mathrm{e}^{-1}-\cos 1+\sin 1)$.

17.【解析】方程组的增广矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&0&\lambda\\4&1&2&\lambda+2\\7&1&4&2\lambda+3\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&0&\lambda\\3&0&2&2\\6&0&4&\lambda+3\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&0&\lambda\\3&0&2&2\\0&0&0&\lambda-1\end{array}\right]$，故当

$\lambda=1$ 时，$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$，方程组有解，此时 $\boldsymbol{B}\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&0&1\\3&0&2&2\\0&0&0&0\end{array}\right]$，同解方程组为 $\begin{cases}x_1+x_2=1,\\3x_1+2x_3=2,\end{cases}$ 令 $x_1=k$，故

通解为 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}1\\-1\\-\frac{3}{2}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$（$k$ 为任意常数）.

18.【解析】$f_x(x,y,z)=y^2+2xz$，$f_{xz}(x,y,z)=2x$，所以 $f_{xz}(1,2,3)=2$.

19.【解析】交点为 $\begin{cases}x=1,\\y=1\end{cases}$ 和 $\begin{cases}x=4,\\y=2.\end{cases}$

面积 $S=\int_1^4\sqrt{x}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_1^4=\frac{2}{3}\times(8-1)=\frac{14}{3}$.

$$\begin{aligned}体积\ V&=V_1+V_2=\pi(4^2-1^2)\cdot 1+\int_1^2(4-y^2)\mathrm{d}y\\&=15\pi+\left(4y-\frac{1}{3}y^3\right)\Big|_1^2=15\pi+\left[\left(8-\frac{8}{3}\right)-\left(4-\frac{1}{3}\right)\right]\\&=15\pi+\frac{5}{3}.\end{aligned}$$

四、应用题

20.【解析】设总利润为 $L(q)$，由题意得

$$L(q)=q\cdot p(x)-C(q)=q\left(420-\frac{q}{2}\right)-(30\ 000+100q)=320q-\frac{q^2}{2}-30\ 000,q\in(0,+\infty).$$

令 $L'(q)=320-q=0$，得 $q=320$.

依题意，最大利润存在，且驻点唯一，所以当销售量 $q=320$ 件时，获得的利润最大，此时产品的销售价格 $p=260$ 元.

数学考前冲刺模拟试卷(二)参考答案及解析

一、单项选择题

1.【答案】D

【解析】使根式 $\sqrt{x-3}$ 有意义的实数 x 的集合是 $\{x\mid x-3\geqslant 0\}=\{x\mid x\geqslant 3\}$，使 $\arctan\frac{1}{x}$ 有意义的实数 x 的集合是 $\{x\mid x\neq 0\}$. 因此，函数 $f(x)$ 的定义域是 $\{x\mid x-3\geqslant 0,且\ x\neq 0\}$，即 $[3,+\infty)$. 故本题选 D.

2.【答案】B

【解析】根据题意得 $\begin{cases}1+a=0,\\b=-2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-1,\\b=-2.\end{cases}$

3.【答案】C

【解析】因为 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，所以 $f(2)=\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}\cdot\lim\limits_{x\to 2}(x-2)=0$，于是 $f'(2)=\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=2$.

4.【答案】B

【解析】当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$x^2\geqslant x^3$，$e^{x^2}\geqslant e^{x^3}$，故 $\int_0^1 e^{x^2}\mathrm{d}x\geqslant\int_0^1 e^{x^3}\mathrm{d}x$，A 项错误；当 $1\leqslant x\leqslant 2$ 时，$1+x^2\leqslant 1+x^3$，则 $\ln(1+x^2)\leqslant\ln(1+x^2)$，故 $\int_1^2\ln(1+x^2)\mathrm{d}x\leqslant\int_1^2\ln(1+x^3)\mathrm{d}x$，B 项正确；在 $[-\pi,\pi]$ 上，$x\cos^3x$ 是奇函

数，$x\sin^3 x\geqslant 0$，故$\int_{-\pi}^{\pi}x\cos^3 x\mathrm{d}x=0$，$\int_{-\pi}^{\pi}x\sin^3 x\mathrm{d}x\geqslant 0$，C 项错误；$\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{1+\sin x}\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right|\mathrm{d}x=$

$\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{2}\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x=4\sqrt{2}$，$\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{1+\cos x}\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}\right|\mathrm{d}x=4\sqrt{2}$，D 项错误.

5.【答案】A

【解析】$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+b_1 \\ a_{21} & a_{22}+b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} b_1 & a_{11} \\ b_2 & a_{21} \end{vmatrix}=m-n.$

6.【答案】B

【解析】根据微分方程阶数定义可知该微分方程的最高阶导数的阶数为 2，故答案选 B.

7.【答案】C

【解析】注意区分原函数与函数之间的关系.

8.【答案】D

【解析】$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2}.$

9.【答案】A

【解析】$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\tan\frac{\pi}{n^3}}{\frac{\pi}{n^3}}=1$，因为级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{n^3}$收敛，所以由比较判别法的极限形式知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{n^3}$收敛，从而级数

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\tan\frac{\pi}{n^3}$绝对收敛.

10.【答案】D

【解析】$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}=6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}=6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix}=-18.$

二、填空题

11.【答案】-1

【解析】$f(x)$在 $x=0$ 处连续，则$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=a$，又$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+\mathrm{e}^{2ax}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}+$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{2ax}-1}{x}=1+2a=a$，故 $a=-1$.

12.【答案】$-2\mathrm{e}$

【解析】$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\int_{x^2}^{1}\mathrm{e}^t\mathrm{d}t}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-2x\mathrm{e}^{x^2}}{1}=-2\mathrm{e}.$

13.【答案】$y=\frac{\mathrm{e}}{3}x+\frac{2\mathrm{e}}{3}$

【解析】曲线在 $t=1$ 处的切点为$(1,\mathrm{e})$. $y'=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\dfrac{\mathrm{e}^t}{3t^2}$，曲线在切点处的切线斜率为$y'|_{t=1}=\dfrac{\mathrm{e}}{3}$，

所求切线方程为 $y-\mathrm{e}=\frac{\mathrm{e}}{3}(x-1)$，即 $y=\frac{\mathrm{e}}{3}x+\frac{2\mathrm{e}}{3}$.

14.【答案】$f'_1\mathrm{d}x+(f'_1+2yf'_2)\mathrm{d}y$

【解析】$\frac{\partial z}{\partial x}=f'_1$，$\frac{\partial z}{\partial y}=f'_1\cdot(x+y)'_y+f'_2\cdot(y^2)'_y=f'_1+2yf'_2$，故 $\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y=f'_1\mathrm{d}x+(f'_1+2yf'_2)\mathrm{d}y$.

15.【答案】$[-2,2)$

【解析】$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{n\cdot 2^n}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}\right|=\frac{1}{2}$，故收敛半径 $R=2$，当 $x=2$ 时，级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，发散，当 $x=-2$ 时，级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛，所以原级数的收敛域为 $[-2,2)$.

三、计算题

16.【解析】令 $1-x=t$，当 $x=\frac{1}{2}$ 时，$t=\frac{1}{2}$；当 $x=2$ 时，$t=-1$，则 $\int_{\frac{1}{2}}^{2}f(1-x)\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{2}}^{-1}f(t)\mathrm{d}(1-t)=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}f(t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^{0}f(t)\mathrm{d}t+\int_{0}^{\frac{1}{2}}f(t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^{0}\mathrm{e}^t\mathrm{d}t+\int_{0}^{\frac{1}{2}}(1+\sin t)\mathrm{d}t=\mathrm{e}^t\Big|_{-1}^{0}+(t-\cos t)\Big|_{0}^{\frac{1}{2}}=\frac{5}{2}-\mathrm{e}^{-1}-\cos\frac{1}{2}$.

17.【解析】方程组的增广矩阵为

$$\boldsymbol{B}=\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&4&4\\4&3&4&12\\7&5&4&\lambda\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&4&4\\0&-1&-12&-4\\0&-2&-24&\lambda-28\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&4&4\\0&-1&-12&-4\\0&0&0&\lambda-20\end{array}\right],$$

当 $\lambda=20$ 时，方程组有解，此时

$$\boldsymbol{B}\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&4&4\\0&-1&-12&-4\\0&0&0&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&0&-8&0\\0&1&12&4\\0&0&0&0\end{array}\right],$$

则同解方程组为 $\begin{cases}x_1-8x_3=0,\\x_2+12x_3=4.\end{cases}$ 令 $x_3=k$，得方程组的通解 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}8\\-12\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\4\\0\end{bmatrix}$（$k$ 为任意常数）.

18.【解析】$\frac{\partial z}{\partial x}=f'_1-\frac{y}{x^2}f'_2$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(f''_{11}+f''_{12}\cdot\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x^2}f'_2-\frac{y}{x^2}\left(f''_{21}+f''_{22}\cdot\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{x^2}f'_2+f''_{11}+\frac{x-y}{x^2}f''_{12}-\frac{y}{x^3}f''_{22}$.

19.【解析】原方程可化为 $y'-\frac{2}{x}y=x$，其中 $P(x)=-\frac{2}{x}$，$Q(x)=x$，由通解公式可得 $y=\mathrm{e}^{\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x}\left(\int x\mathrm{e}^{-\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=x^2\left(\int x\cdot\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x+C\right)=x^2\left(\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x+C\right)=x^2(\ln|x|+C)$.

四、应用题

20.【解析】由题意可知平均成本为 $\overline{C}(x)=x+20+\frac{900}{x}$.

故 $\overline{C}'(x)=1-\frac{900}{x^2}$，令 $\overline{C}'(x)=0$，得 $x_1=30$，$x_2=-30$（舍去）.

又 $\overline{C}''(x)=\frac{1800}{x^3}$，且 $\overline{C}''(30)>0$，所以 $x=30$ 为 $\overline{C}(x)$ 的极小值点，也是最小值点，即月产量为 30 吨时的平均成本最低.