数学考前冲刺模拟试卷(一)

一、单项选择题(本大题共 10 小题,每小题 3 分,共 30 分)

1. 函数 $f(x)=\sqrt{2^x-1}+\dfrac{1}{x-1}$ 的定义域是(　　).

A. $[0,1)$　　B. $(1,+\infty)$

C. $[0,1)\cup(1,+\infty)$　　D. $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$

2. 当 $x\to0$ 时,$\sec x-1$ 与 x^2 比较是(　　).

A. 高阶无穷小　　B. 低阶无穷小

C. 同阶无穷小　　D. 等价无穷小

3. 若函数 $f(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)}{x(x-1)}$,则点 $x=1$ 是(　　)间断点.

A. 可去　　B. 跳跃

C. 无穷　　D. 震荡

4. 若 $f(x)$在点 x_0 处不可导,则 $f(x)$在点 x_0 处(　　).

A. 无定义　　B. 不连续

C. 没有切线　　D. 不可微

5. 已知 $f'(x_0)=a$,则 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x_0-5h)-f(x_0)}{\sin h}=$(　　).

A. $\dfrac{a}{5}$　　B. $-\dfrac{a}{5}$

C. $5a$　　D. $-5a$

6. 设 $f(x)=\int_2^x e^{-t}dt$,则曲线 $y=f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内(　　).

A. 单调递减,曲线为凹的　　B. 单调递减,曲线为凸的

C. 单调递增,曲线为凹的　　D. 单调递增,曲线为凸的

7. e^{-x^2} 是 $f(x)$的一个原函数,则 $\int xf'(x)dx=$(　　).

A. $-(2x^2-1)e^{-x^2}+C$　　B. $(2x^2-1)e^{-x^2}+C$

C. $-(2x^2+1)e^{-x^2}+C$　　D. $(2x^2+1)e^{-x^2}+C$

8. 过 y 轴与点$(1,-2,3)$的平面方程是(　　).

A. $x-y-z=0$　　B. $3y+2z=0$

C. $2x+y=0$　　D. $3x-z=0$

9. 设 $abc\neq0$,则 $\begin{bmatrix}a&0&0\\0&0&b\\0&c&0\end{bmatrix}$ 的逆矩阵为(　　).

A. $\begin{bmatrix}a&0&0\\0&0&b\\0&c&0\end{bmatrix}$　　B. $\begin{bmatrix}a&0&0\\0&0&c\\0&b&0\end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix}\frac{1}{a}&0&0\\0&0&\frac{1}{b}\\0&\frac{1}{c}&0\end{bmatrix}$　　D. $\begin{bmatrix}\frac{1}{a}&0&0\\0&0&\frac{1}{c}\\0&\frac{1}{b}&0\end{bmatrix}$

10. 方程 $y''-6y'+5y=0$ 的通解为 $y=$(　　).

A. $y=C_1e^x+C_2e^{5x}$　　B. $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-5x}$

C. $y=C_1e^{-x}+C_2e^{5x}$　　D. $y=C_1e^x+C_2e^{-5x}$

二、填空题(本大题共 5 小题,每小题 4 分,共 20 分)

11. 若函数 $f(x)=\begin{cases}3x+a,x\geqslant1,\\x+1,x<1\end{cases}$ 在点 $x=1$ 处连续,则常数 $a=$________.

12. 设 $y=x^n+e^{2x-1}$,则 $y^{(n)}=$________.

13. 空间曲面 $x^2+2y^2+3z^3=6$ 在点$(1,1,1)$处的切平面方程为________.

14. 已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2-u_n)$ 收敛,则 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=$________.

15. 微分方程 $\cos y dy=\sin x dx$ 的通解为________.

三、计算题(本大题共 4 小题,每小题 10 分,共 40 分)

16. 求 $y=\sqrt{x}$曲线与直线 $x=1,x=4,y=0$ 所围成的图形的面积和该图形绕 y 轴旋转产生的旋转体的体积.

17. 求二重积分 $\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，区域 D 为 $2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$.

18. 设积分 $\int_L (x+xy\sin x)\mathrm{d}x+\dfrac{f(x)}{x}\mathrm{d}y$ 与路径无关，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$，且 $f(x)$ 可微，求 $f(x)$.

19. 已知线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2=\lambda,\\4x_1+x_2+2x_3=\lambda+2,\\7x_1+x_2+4x_3=2\lambda+3,\end{cases}$ 当 λ 为何值时，方程组有解？并求其通解.

四、应用题(本题 10 分)

20. 一厂家生产某种产品，已知产品的销售量 q(单位：件)与销售价格 p(单位：元/件)满足 $p=420-\dfrac{1}{2}q$，产品的成本函数 $C(q)=30\ 000+100q$(元)，问该产品销售量 q 为何值时，生产该产品获得的利润最大？并求此时的销售价格.

数学考前冲刺模拟试卷(二)

一、单项选择题(本大题共 10 小题,每小题 3 分,共 30 分)

1. 函数 $f(x)=\sqrt{x-3}+\arctan\dfrac{1}{x}$ 的定义域是(　　).

A. $(-\infty,+\infty)$　　B. $[0,3]$

C. $(-\infty,0)\cup(0,3)$　　D. $[3,+\infty)$

2. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1+a)x^4+bx^3+2}{x^3+x^2-1}=-2$,则 a,b 的值分别为(　　).

A. $a=-3,b=0$　　B. $a=-1,b=-2$

C. $a=0,b=-2$　　D. $a=-1,b=0$

3. 若 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)}{x-2}=2$,则 $f'(2)=$(　　).

A. -4　　B. -2

C. 2　　D. 4

4. 下列说法正确的是(　　).

A. $\int_0^1 e^{x^2}dx\leqslant\int_0^1 e^{x^3}dx$　　B. $\int_1^2\ln(1+x^2)dx\leqslant\int_1^2\ln(1+x^3)dx$

C. $\int_{-\pi}^{\pi}x\sin^3x dx\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}x\cos^3x dx$　　D. $\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{1+\sin x}dx<\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{1+\cos x}dx$

5. $\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=m$,$\begin{vmatrix}b_1&a_{11}\\b_2&a_{21}\end{vmatrix}=n$,则 $\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}+b_1\\a_{21}&a_{22}+b_2\end{vmatrix}=$(　　).

A. $m-n$　　B. $m+n$

C. $-m+n$　　D. $-m-n$

6. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\tan\dfrac{\pi}{n^3}$(　　).

A. 绝对收敛　　B. 条件收敛

C. 发散　　D. 敛散性不能确定

7. 下列关系式不正确的是(　　).

A. $d\left[\int f(x)dx\right]=f(x)dx$　　B. $\int f'(x)dx=f(x)+C$

C. $\dfrac{d}{dx}\int f(x)dx=f'(x)$　　D. $\left[\int f(x)dx\right]'=f(x)$

8. 交换二次积分次序后,$\int_1^e dy\int_0^{\ln y}f(x,y)dx$ 为(　　).

A. $\int_0^1 dx\int_{e^x}^{e}f(x,y)dy$　　B. $\int_1^e dx\int_0^{\ln x}f(x,y)dy$

C. $\int_1^e dx\int_0^{e^x}f(x,y)dy$　　D. $\int_0^1 dx\int_0^{e^x}f(x,y)dy$

9. 设 $\boldsymbol{a}=(2,x,3)$,$\boldsymbol{b}=(4,-2,y)$,且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,则 x,y 的值分别为(　　).

A. 2,7　　B. 7,2

C. -1,2　　D. -2,1

10. 微分方程 $(y')^3+3y'(y'')^2+xy^4=0$ 的阶数是(　　).

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

二、填空题(本大题共 5 小题,每小题 4 分,共 20 分)

11. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x+e^{2ax}-1}{x},&x\neq0,\\a,&x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则 $a=$________.

12. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\int_{x^2}^{1}e^t dt}{x-1}=$________.

13. 曲线 $\begin{cases}x=t^3,\\y=e^t\end{cases}$ 在 $t=1$ 处的切线方程是________.

14. 设函数 $z=f(x+y,y^2)$,f 具有连续偏导数,则全微分 $dz=$________.

15. 微分方程 $y''-4y'+4y=0$ 的通解为________.

三、计算题(本大题共 4 小题,每小题 10 分,共 40 分)

16. 设函数 $\begin{cases}e^x,&x<0,\\1+\sin x,&x\geqslant0,\end{cases}$ 计算定积分 $\int_{\frac{1}{2}}^{2}f(1-x)dx$.

17. 计算$\iint\limits_{D}\frac{3x}{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由 $xy=1$，$y=x$ 及 $x=2$ 围成的闭区域.

18. 计算曲线积分$\int_L(x^3-3y)\mathrm{d}x+(4y^3-2x)\mathrm{d}y$，曲线 L 为曲线 $y=\sqrt{4-x^2}$ 上从点 $A(-2,0)$到点 $B(2,0)$的一段弧.

19. λ 为何值时，线性方程组$\begin{cases}x_1+x_2+4x_3=4,\\4x_1+3x_2+4x_3=12,\\7x_1+5x_2+4x_3=\lambda\end{cases}$有解，并求其通解.

四、应用题(本题 10 分)

20. 某企业生产某种产品，其固定成本为 3 万元，每多生产一百件产品，成本增加 2 万元；总收入 R(单位：万元)是产量 q(单位：百件)的函数，$R(q)=5q-\frac{1}{2}q^2$，问：当产量为何值时，利润最大？最大利润是多少？

数学考前冲刺模拟试卷(三)

一、单项选择题(本大题共 10 小题,每小题 3 分,共 30 分)

1. 函数 $f(x)=\sqrt{1-\log_3 x}$的定义域是(　　).

A. $(0,3)$　　B. $(0,3]$　　C. $(3,+\infty)$　　D. $[3,+\infty)$

2. 极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x}\right)^{2x}=$(　　).

A. e^4　　B. e^{-2}　　C. 1　　D. e^2

3. 曲线方程为$\begin{cases}x=\cos t,\\ y=\sin 2t,\end{cases}$则曲线在 $t=\dfrac{\pi}{4}$处的切线方程为(　　).

A. $y=1$　　B. $y=x$　　C. $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $y=0$

4. 已知 $f(x)=x^3+ax^2+bx$ 在 $x=1$ 处取得极小值-2,则必有(　　).

A. $a=1,b=2$　　B. $a=0,b=-3$

C. $a=2,b=2$　　D. $a=-3,b=0$

5. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 皆为 n 阶矩阵,以下结论正确的是(　　).

A. $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{BA}|$　　B. $|-\boldsymbol{A}|=-|\boldsymbol{A}|$

C. $|2\boldsymbol{A}|=2|\boldsymbol{A}|$　　D. $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$

6. 已知$\int f(x)dx=F(x)+C$,则$\int e^{-x}f(e^{-x})dx=$(　　).

A. $F(x)+C$　　B. $-F(x)+C$

C. $F(e^{-x})+C$　　D. $-F(e^{-x})+C$

7. 设 $f(x)=e^{-x}$,则$\int\dfrac{f'(\ln x)}{x}dx=$(　　).

A. $-\dfrac{1}{x}+C$　　B. $\dfrac{1}{x}$

C. $\dfrac{1}{x}+C$　　D. $\ln x+C$

8. 以下广义积分收敛的是(　　).

A. $\int_1^{+\infty}x^{-2}dx$　　B. $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x}dx$

C. $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}dx$　　D. $\int_0^{+\infty}x\,dx$

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n\cdot 2^n}$ 的收敛半径为(　　).

A. 3　　B. 2　　C. 4　　D. $\dfrac{1}{4}$

10. 下列微分方程中,属于一阶可分离变量微分方程的是(　　).

A. $y^2dx+(x+y)dy=0$　　B. $dx+(x^2+y)dy=0$

C. $\dfrac{dy}{dx}=xy^2+x$　　D. $\dfrac{d^2y}{dx^2}=xy$

二、填空题(本大题共 5 小题,每小题 4 分,共 20 分)

11. 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\sin 2x+x\sin\dfrac{1}{x}\right)=$________.

12. 方程 $y^5+2y-x-7x^3=0$ 所确定的曲线 $y=y(x)$在 $x=0$ 处的切线方程为________.

13. $u=f\left(xy,\dfrac{xz}{y}\right)$,其中 f 具有一阶连续偏导数,则$\dfrac{\partial u}{\partial y}=$________.

14. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n\\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n\end{bmatrix}$,$a_i\neq 0,b_i\neq 0,i=1,2,\cdots,n$,则 $R(\boldsymbol{A})=$________.

15. 已知幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-1)^n}{n\cdot 3^n}$,其收敛半径是________;收敛区间是________.

三、计算题(本大题共 4 小题,每小题 10 分,共 40 分)

16. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+\cos x}, & -\pi<x<0,\\ xe^{-x^2}, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 计算定积分$\int_{-2}^{2}f(x)dx$.

17. 计算$\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，区域$D$为圆$x^2+(y-1)^2=1$所围成的图形在$y$轴右边的部分.

18. $I=\oint_L y^3\mathrm{d}x+(3x-x^3)\mathrm{d}y$，其中$L$为圆域$x^2+y^2\leqslant a^2(a>0)$的正向边界曲线，求$a$为多少时$I$值最大？

19. 求线性方程组$\begin{cases}2x_1-5x_2+2x_3=-3, \\ x_1+2x_2-x_3=3, \\ -2x_1+14x_2-6x_3=12\end{cases}$的通解.

四、应用题(本题 10 分)

20. 设某产品每月产量为x吨时，总成本函数为$C(x)=x^2+20x+900$(元)，问当月产量为多少时，平均成本最低？

数学考前冲刺模拟试卷(一)参考答案及解析

一、单项选择题

1.**【答案】**C

【解析】使根式$\sqrt{2^x-1}$有意义的实数x的集合是$\{x\mid 2^x-1\geqslant 0\}=\{x\mid x\geqslant 0\}$,使分式$\frac{1}{x-1}$有意义的实数$x$的集合是$\{x\mid x\neq 1\}$.因此,函数$f(x)$的定义域为$\{x\mid x\geqslant 0$,且$x\neq 1\}$,即$[0,1)\cup(1,+\infty]$.故本题选C.

2.**【答案】**C

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sec x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\cos x\cdot x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{\cos x\cdot x^2}=\frac{1}{2}$,所以$\sec x-1$与$x^2$是同阶但不等价无穷小.

3.**【答案】**A

【解析】函数$f(x)=\frac{(x-1)(x-2)}{x(x-1)}$在点$x=1$处无定义,且$\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)}{x(x-1)}=-1$,所以点$x=1$是函数的可去间断点.

4.**【答案】**D

【解析】根据可微与可导之间的关系知可微必可导.

5.**【答案】**D

【解析】$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0-5h)-f(x_0)}{\sin h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0-5h)-f(x_0)}{h}\cdot\frac{h}{\sin h}=(-5)\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0-5h)-f(x_0)}{-5h}\cdot\lim\limits_{h\to 0}\frac{h}{\sin h}=-5f'(x_0)\times 1=-5a$.

6.**【答案】**D

【解析】$f'(x)=\mathrm{e}^{-x}$在$(-\infty,+\infty)$内恒大于0,所以曲线单调递增;$f''(x)=-\mathrm{e}^{-x}$在$(-\infty,+\infty)$内恒小于0,所以曲线是凸的.

7.**【答案】**C

【解析】由原函数的定义可知$f(x)=(\mathrm{e}^{-x^2})'=\mathrm{e}^{-x^2}(-x^2)'=-2x\mathrm{e}^{-x^2}$.所以$\int x f'(x)\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}(f(x))=xf(x)-\int f(x)\mathrm{d}x=-2x^2\mathrm{e}^{-x^2}-\mathrm{e}^{-x^2}+C=-(2x^2+1)\mathrm{e}^{-x^2}+C$.

8.**【答案】**D

【解析】平面过y轴,因此设方程为$Ax+Cz=0$,将$x=1,z=3$代入得$A+3C=0$,取$A=3,C=-1$,可得所求平面方程为$3x-z=0$.

9.**【答案】**D

【解析】记$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a&0&0\\0&0&b\\0&c&0\end{bmatrix}$,$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})=\left[\begin{array}{ccc:ccc}a&0&0&1&0&0\\0&0&b&0&1&0\\0&c&0&0&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}a&0&0&1&0&0\\0&c&0&0&0&1\\0&0&b&0&1&0\end{array}\right]\to$

$\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&\frac{1}{a}&0&0\\0&1&0&0&0&\frac{1}{c}\\0&0&1&0&\frac{1}{b}&0\end{array}\right]=(\boldsymbol{E},\boldsymbol{A}^{-1})$,所以矩阵$\boldsymbol{A}$的逆矩阵$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{a}&0&0\\0&0&\frac{1}{c}\\0&\frac{1}{b}&0\end{bmatrix}$.

10.【答案】A

【解析】微分方程对应的特征方程为 $r^2-6y+5=0$,求得其特征根为 $r_1=1,r_2=5$,所以其通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{5x}$.

二、填空题

11.【答案】-1

【解析】若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续,则 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$. 而 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x+1)=2$, $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(3x+a)=3+a$, $f(1)=3+a$,故 $3+a=2$,解得 $a=-1$.

12.【答案】$n!+2^ne^{2x-1}$

【解析】$y'=nx^{n-1}+2e^{2x-1}$, $y''=n(n-1)x^{n-2}+4e^{2x-1}$, $y'''=n(n-1)(n-2)x^{n-3}+8e^{2x-1}$, $\cdots$ $y^{(n)}=n(n-1)(n-2)\cdots\cdot 1x^{n-n}+2^ne^{2x-1}=n!\ +2^ne^{2x-1}$.

13.【答案】$2x+4y+9z-15=0$

【解析】设 $F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^3-6$,则 $F_x=2x,F_y=4y,F_z=9z^2$,故 $F_x(1,1,1)=2,F_y(1,1,1)=4,F_z(1,1,1)=9$,所以曲面在点$(1,1,1)$处的切平面方程为 $2(x-1)+4(y-1)+9(z-1)=0$,即 $2x+4y+9z-15=0$.

14.【答案】2

【解析】因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2-u_n)$ 收敛,由级数收敛的必要条件知 $\lim\limits_{n\to\infty}(2-u_n)=0$,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=2$.

15.【答案】$\sin y=-\cos x+C$

【解析】方程两边积分 $\sin y=-\cos x+C$.

三、计算题

16.【解析】交点为 $\begin{cases}x=1,\\y=1\end{cases}$ 和 $\begin{cases}x=4,\\y=2.\end{cases}$

面积 $S=\int_1^4\sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_1^4=\frac{2}{3}\times(8-1)=\frac{14}{3}$.

体积 $V=V_1+V_2=\pi(4^2-1^2)\cdot 1+\int_1^2(4-y^2)\,dy=15\pi+\left(4y-\frac{1}{3}y^3\right)\Big|_1^2$

$$=15\pi+\left[\left(8-\frac{8}{3}\right)-\left(4-\frac{1}{3}\right)\right]=15\pi+\frac{5}{3}.$$

17.【解析】积分区域 D 在极坐标系下可表示为$\{(\theta,r)\mid 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\sqrt{2}\leqslant r\leqslant 2\}$.

所以二重积分 $\iint\limits_D x^2\,dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\sqrt{2}}^2 r^2\cos^2\theta\cdot r\,dr=\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,\frac{r^4}{4}\Big|_{\sqrt{2}}^2 d\theta=\frac{3}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2\theta)\,d\theta=\frac{3}{2}\left(\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\Big|_0^{2\pi}=3\pi$.

18.【解析】因为积分与路径无关,所以由格林公式知,$\frac{\partial(x+xy\sin x)}{\partial y}=\frac{\partial\left(\frac{f(x)}{x}\right)}{\partial x}$,即 $x\sin x=\frac{f'(x)x-f(x)}{x^2}$,

整理得 $f'(x)-\frac{1}{x}f(x)=x^2\sin x$. 此方程为一阶非齐次线性微分方程,代入通解公式可得

$$f(x)=e^{\int\frac{1}{x}dx}\left(\int x^2\sin x\cdot e^{\int-\frac{1}{x}dx}dx+C\right)=x\left(\int x\sin x dx+C\right)=x\left(-\int x d\cos x+C\right)$$

$$=x\left(-x\cos x+\int\cos x dx+C\right)=-x^2\cos x+x\sin x+Cx,$$

又 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$,即$\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}C=0$,解得 $C=-1$,故 $f(x)=-x^2\cos x+x\sin x-x$.

19.【解析】方程组的增广矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&0&\lambda\\4&1&2&\lambda+2\\7&1&4&2\lambda+3\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&0&\lambda\\3&0&2&2\\6&0&4&\lambda+3\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&0&\lambda\\3&0&2&2\\0&0&0&\lambda-1\end{array}\right]$,故当 $\lambda=1$ 时,$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$,方程组有解,此时$\boldsymbol{B}\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&0&1\\3&0&2&2\\0&0&0&0\end{array}\right]$,同解方程组为$\begin{cases}x_1+x_2=1,\\3x_1+2x_3=2,\end{cases}$令 $x_1=k$,故

通解为$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}1\\-1\\-\frac{3}{2}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$ (k 为任意常数).

四、应用题

20.【解析】设总利润为 $L(q)$,由题意得

$$L(q)=q\cdot p(x)-C(q)=q\left(420-\frac{q}{2}\right)-(30\ 000+100q)=320q-\frac{q^2}{2}-30\ 000,q\in(0,+\infty),$$

$$L'(q)=320-q,$$

令 $L'(q)=0$,得 $q=320$.

依题意,最大利润存在,且驻点唯一. 所以,当销售量为 320 件时,获得的利润最大,此时产品的销售价格为 260 元.

数学考前冲刺模拟试卷(二)参考答案及解析

一、单项选择题

1.【答案】D

【解析】使根式 $\sqrt{x-3}$有意义的实数 x 的集合是$\{x|x-3\geqslant0\}=\{x|x\geqslant3\}$,使 $\arctan\frac{1}{x}$有意义的实数 x 的集合是$\{x|x\neq0\}$. 因此,函数 $f(x)$的定义域是$\{x|x-3\geqslant0$,且 $x\neq0\}$,即$[3,+\infty)$. 故本题选 D.

2.【答案】B

【解析】根据题意得$\begin{cases}1+a=0\\b=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-1,\\b=-2.\end{cases}$

3.【答案】C

【解析】根据函数在点 $x=2$ 处可导,且$\lim\limits_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=2$,则 $f'(2)=2$.

4.【答案】B

【解析】当 $0\leqslant x\leqslant1$ 时,$x^2\geqslant x^3$,$e^{x^2}\geqslant e^{x^3}$,故$\int_0^1 e^{x^2}dx\geqslant\int_0^1 e^{x^3}dx$,A 项错误;当 $1\leqslant x\leqslant2$ 时,$1+x^2\leqslant$

$1+x^3$,则 $\ln(1+x^2)\leqslant\ln(1+x^3)$,故$\int_1^2\ln(1+x^2)\mathrm{d}x\leqslant\int_1^2\ln(1+x^3)\mathrm{d}x$,B项正确;在$[-\pi,\pi]$上,$x\cos^3x$是奇函数,$x\sin^3x\geqslant0$,故$\int_{-\pi}^{\pi}x\cos^3x\mathrm{d}x=0$,$\int_{-\pi}^{\pi}x\sin^3x\mathrm{d}x\geqslant0$,C项错误;$\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{1+\sin x}\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right|\mathrm{d}x=$ $\int_{-\frac{3}{2}\pi}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\sin(x+\frac{\pi}{2})}\mathrm{d}x=\int_{-\frac{3}{2}\pi}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos x}=\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos x}\mathrm{d}x+\int_{-\frac{3}{2}\pi}^{-\pi}\sqrt{1+\cos x}\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos x}\mathrm{d}x+$ $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sqrt{1+\cos x}\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{1+\cos x}\mathrm{d}x$,D项错误.

5.【答案】A

【解析】$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}+b_1\\a_{21}&a_{22}+b_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11}&b_1\\a_{21}&b_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}b_1&a_{11}\\b_2&a_{21}\end{vmatrix}=m-n.$

6.【答案】A

【解析】$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\tan\frac{\pi}{n^3}}{\frac{\pi}{n^3}}=1$,因为级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\pi}{n^3}$收敛,所以由比较判别法的极限形式知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\pi}{n^3}$收敛,从而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\tan\dfrac{\pi}{n^3}$绝对收敛.

7.【答案】C

【解析】注意区分原函数与函数之间的关系.

8.【答案】A

【解析】由题意可知积分区域为:$1\leqslant y\leqslant \mathrm{e},0\leqslant x\leqslant\ln y$,还可以表示为:$0\leqslant x\leqslant1,\mathrm{e}^x\leqslant y\leqslant\mathrm{e}$,故交换积分次序后$\int_0^1\mathrm{d}x\int_{\mathrm{e}^x}^{\mathrm{e}}f(x,y)\mathrm{d}y$.

9.【答案】B

【解析】因为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=8-2x+3y=0$,即 $x=4+\dfrac{3}{2}y$,将四个选项代入,只有B项符合.

10.【答案】B

【解析】根据微分方程阶数定义可知该微分方程的阶数为2,故答案选B.

二、填空题

11.【答案】-1

【解析】$f(x)$在 $x=0$ 处连续,则 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)=a$,又 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x+\mathrm{e}^{2ax}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^{2ax}-1}{x}=1+2a=a$,故 $a=-1$.

12.【答案】$-2\mathrm{e}$

【解析】$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\int_{x^2}^{1}\mathrm{e}^t\mathrm{d}t}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-2x\mathrm{e}^{x^2}}{1}=-2\mathrm{e}.$

13.【答案】$y=\dfrac{\mathrm{e}}{3}x+\dfrac{2\mathrm{e}}{3}$

【解析】曲线在 $t=1$ 处的切点为$(1,\mathrm{e})$. $y'=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\dfrac{\mathrm{e}^t}{3t^2}$,曲线在切点处的切线斜率为 $y'|_{t=1}=\dfrac{\mathrm{e}}{3}$,所求

切线方程为 $y-\mathrm{e}=\frac{\mathrm{e}}{3}(x-1)$,即 $y=\frac{\mathrm{e}}{3}x+\frac{2\mathrm{e}}{3}$.

14.【答案】$f'_1\mathrm{d}x+(f'_1+2yf'_2)\mathrm{d}y$

【解析】$\frac{\partial z}{\partial x}=f'_1$,$\frac{\partial z}{\partial y}=f'_1\cdot(x+y)'_y+f'_2\cdot(y^2)'_y=f'_1+2yf'_2$,故 $\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y=f'_1\mathrm{d}x+(f'_1+2yf'_2)\mathrm{d}y$.

15.【答案】$y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{2x}$

【解析】方程对应的特征方程为 $r^2-4r+4=0$,解得特征根 $r_{1,2}=2$,为二重根,故方程的通解为 $y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{2x}$.

三、计算题

16.【解析】令 $1-x=t$,当 $x=\frac{1}{2}$ 时,$t=\frac{1}{2}$;当 $x=2$ 时,$t=-1$,则 $\int_{\frac{1}{2}}^{2}f(1-x)\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{2}}^{-1}f(t)\mathrm{d}(1-t)=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}f(t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^{0}f(t)\mathrm{d}t+\int_{0}^{\frac{1}{2}}f(t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^{0}\mathrm{e}^t\mathrm{d}t+\int_{0}^{\frac{1}{2}}(1+\sin t)\mathrm{d}t=\mathrm{e}^t\Big|_{-1}^{0}+(t-\cos t)\Big|_{0}^{\frac{1}{2}}=\frac{5}{2}-\mathrm{e}^{-1}-\cos\frac{1}{2}$.

17.【解析】$\iint\limits_D\frac{3x}{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_1^2\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{3x}{y^2}\mathrm{d}y=\int_1^2 3x\left(-\frac{1}{y}\right)\Big|_{\frac{1}{x}}^{x}\mathrm{d}x=\int_1^2 3x\left(x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\int_1^2(3x^2-3)\mathrm{d}x=(x^3-3x)\Big|_1^2=4$.

18.【解析】连接 A、B 两点,方向从 A 到 B,记这个方向的直线段为 L',则 $-L$ 与 L' 构成一个半圆形闭区域 D,$-L+L'$,是 D 的边界,方向为正向,又 $\frac{\partial P}{\partial y}=-3$,$\frac{\partial Q}{\partial x}=-2$,故由格林公式知

$$\oint_{-L+L'}(x^3-3y)\mathrm{d}x+(4y^3-2x)\mathrm{d}y=\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D[-2-(-3)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\pi.$$

在 L' 上:$y=0$,x 从 -2 到 2,则有 $\int_{L'}(x^3-3y)\mathrm{d}x+(4y^3-2x)\mathrm{d}y=0$,所以 $\int_{-L}(x^3-3y)\mathrm{d}x+(4y^3-2x)\mathrm{d}y=2\pi$. 故 $\int_L(x^3-3y)\mathrm{d}x+(4y^3-2x)\mathrm{d}y=-2\pi$.

19.【解析】方程组的增广矩阵为 $\boldsymbol{B}=\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&4&4\\4&3&4&12\\7&5&4&\lambda\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&4&4\\0&-1&-12&-4\\0&-2&-24&\lambda-28\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&4&4\\0&-1&-12&-4\\0&0&0&\lambda-20\end{array}\right]$,

当 $\lambda=20$ 时,方程组有解,此时 $\boldsymbol{B}\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&4&4\\0&-1&-12&-4\\0&0&0&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&0&-8&0\\0&1&12&4\\0&0&0&0\end{array}\right]$,所以同解方程组为

$\begin{cases}x_1-8x_3=0,\\x_2+12x_3=4,\end{cases}$ 令 $x_3=k$,则方程组的通解为 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}8\\-12\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\4\\0\end{bmatrix}$($k$ 为任意常数).

四、应用题

20.【解析】总成本函数为 $C(q)=3+2q$，利润函数 $L(q)=R(q)-C(q)=\left(5q-\frac{1}{2}q^2\right)-(3+2q)=-\frac{1}{2}q^2+3q-3$，$L'(q)=-q+3$，令 $L'(q)=0$，得 $q=3$，因为 $L''(3)=-1<0$（或：因为所求驻点唯一，由实际问题可得），所以当产量为 3 百件时，利润最大；最大利润为 $L(3)=-\frac{1}{2}\times 3^2+3\times 3-3=1.5$ 万元.

数学考前冲刺模拟试卷(三)参考答案及解析

一、单项选择题

1.【答案】B

【解析】使 $\sqrt{1-\log_3 x}$ 有意义的实数 x 的集合是 $\{x\mid x>0，且\ 1-\log_3 x\geqslant 0\}=\{x\mid 0<x\leqslant 3\}$，即 $(0,3]$. 故本题选 B.

2.【答案】A

【解析】$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}\cdot 4}=e^4$.

3.【答案】A

【解析】当 $t=\frac{\pi}{4}$ 时，$x=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$y=1$. 又 $\frac{dx}{dt}=-\sin t$，$\frac{dy}{dt}=2\cos 2t$，所以曲线在 $t=\frac{\pi}{4}$ 处的切线斜率为 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\left.\frac{2\cos 2t}{-\sin t}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=0$，所以曲线在 $t=\frac{\pi}{4}$ 处的切线方程为 $y=1$.

4.【答案】B

【解析】因为 $f(x)=x^3+ax^2+bx$ 在 $x=1$ 处取得极小值 -2，且 $f'(x)=3x^2+2ax+b$，故 $f(1)=1+a+b=-2$，$f'(1)=3+2a+b=0$，解得 $a=0$，$b=-3$.

5.【答案】A

【解析】由矩阵的性质可知，$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{B}||\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{BA}|$，A 项正确. $|-\boldsymbol{A}|=(-1)^n|\boldsymbol{A}|$，B 项错误. $|2\boldsymbol{A}|=2^n|\boldsymbol{A}|$，C 项错误. 只有矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 满足乘积可交换时才有 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，题中没有这个条件，D 项错误.

6.【答案】D

【解析】$\int e^{-x}f(e^{-x})dx=-\int f(e^{-x})de^{-x}=-F(e^{-x})+C$.

7.【答案】C

【解析】$\int\frac{f'(\ln x)}{x}dx=\int f'(\ln x)d(\ln x)=f(\ln x)+C=e^{-\ln x}+C=\frac{1}{x}+C$.

8.【答案】A

【解析】$\int_1^{+\infty}x^{-2}dx=-x^{-1}\Big|_1^{+\infty}=1$，A 项广义积分收敛；$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx=\ln x\Big|_1^{+\infty}=+\infty$，B 项广义积分发散；$\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}\Big|_1^{+\infty}=+\infty$，C 项广义积分发散；$\int_0^{+\infty}xdx=\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{+\infty}=+\infty$，C 项广义积分发散.

9.【答案】B

【解析】由于 $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\cdot 2^n}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}=\dfrac{1}{2}$，故收敛半径 $R=2$.

10.【答案】C

【解析】根据定义即可判断.

二、填空题

11.【答案】2

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\sin 2x+x\sin\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}+\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=2+0=2$.

12.【答案】$y=\dfrac{x}{2}$

【解析】把 $x=0$ 代入原方程得 $y^5+2y=0$，故 $y=0$，即切点为 $(0,0)$，原方程两边对 x 求导得，$5y^4y'+2y'-1-21x^2=0$，将 $x=0$，$y=0$ 代入得 $y'\Big|_{x=0}=\dfrac{1}{2}$，即切线斜率为 $\dfrac{1}{2}$，又切线过点 $(0,0)$，故切线方程为 $y=\dfrac{x}{2}$.

13.【答案】$xf'_1-\dfrac{xz}{y^2}f'_2$

【解析】$\dfrac{\partial u}{\partial y}=f'_1\cdot(xy)'_y+f'_2\cdot\left(\dfrac{xz}{y}\right)'_y=xf'_1-\dfrac{xz}{y^2}f'_2$.

14.【答案】1

【解析】由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的任意两行(或两列)都对应成比例，则 $R(\boldsymbol{A})\leqslant 1$；又 $a_i\neq 0$，$b_i\neq 0$，即 $\boldsymbol{A}$ 为非零矩阵，$R(\boldsymbol{A})\geqslant 1$，故 $R(\boldsymbol{A})=1$.

15.【答案】3；$(-2,4)$

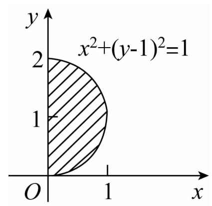
【解析】$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}=\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\cdot 3^n}{(n+1)\cdot 3^{n+1}}=\dfrac{1}{3}$，故收敛半径 $R=3$.

令 $t=x-1$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{t^n}{n\cdot 3^n}$ 的收敛区间为 $(-3,3)$，所以有 $-3<x-1<3$，即 $-2<x<4$，故原级数的收敛区间为 $(-2,4)$.

三、计算题

16.【解析】$\int_{-2}^{2}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-2}^{0}\dfrac{1}{1+\cos x}\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\int_{-2}^{0}\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{x}{2}}\mathrm{d}\left(\dfrac{x}{2}\right)+\int_{0}^{2}\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x^2=\tan\dfrac{x}{2}\Big|_{-2}^{0}-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}\Big|_{0}^{2}=\tan 1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-4}$.

17.【解析】积分区域 D 如图所示，令 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，则边界曲线化为极坐标形式为 $r=2\sin\theta$，区域 D 在极坐标系下可以表示为 $\theta\leqslant r\leqslant 2\sin\theta$，$0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}$，因此 $\iint\limits_D(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}r^2\cdot r\mathrm{d}r=\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\sin^4\theta\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2\theta)^2\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-2\cos 2\theta+\dfrac{1+\cos 4\theta}{2}\right)\mathrm{d}\theta=\left(\dfrac{3}{2}\theta-\sin 2\theta+\dfrac{1}{8}\sin 4\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{3}{4}\pi$.



18.【解析】记 $P=y^3$,$Q=3x-x^3$,区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant a^2\}$,则由格林公式得 $I=\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D[3-3(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a(3-3r^2)r\mathrm{d}r=2\pi\left(\frac{3}{2}r^2-\frac{3}{4}r^4\right)\Big|_0^a=\pi\left(3a^2-\frac{3}{2}a^4\right)$,$a>0$,$I'(a)=6\pi(a-a^3)$,令 $I'(a)=0$,得 $I(a)$ 在 $(0,+\infty)$ 内的唯一驻点 $a=1$,$I''(a)=6\pi(1-3a^2)$,$I''(1)=-12\pi<0$,故 $a=1$ 为 $I(a)$ 的极大值点.

19.【解析】该线性方程组所对应的增广矩阵为 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\left[\begin{array}{ccc:c}2&-5&2&-3\\1&2&-1&3\\-2&14&-6&12\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&2&-1&3\\0&1&-\frac{4}{9}&1\\0&0&0&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&0&-\frac{1}{9}&1\\0&1&-\frac{4}{9}&1\\0&0&0&0\end{array}\right]$,则 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=2<3$,线性方程组有无穷多解. 同解方程组为 $\begin{cases}x_1-\frac{1}{9}x_3=1,\\x_2-\frac{4}{9}x_3=1,\end{cases}$ 令 $x_3=k$,则线性方程组的通解为 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+\frac{1}{9}k\\1+\frac{4}{9}k\\k\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}\frac{1}{9}\\\frac{4}{9}\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$ (k 为任意常数).

四、应用题

20.【解析】由题意可知平均成本为 $\bar{C}(x)=x+20+\frac{900}{x}$.

故 $\bar{C}'(x)=1-\frac{900}{x^2}$,令 $\bar{C}'(x)=0$,得 $x_1=30$,$x_2=-30$(舍去).

又 $\bar{C}''(x)=\frac{1800}{x^3}$,且 $\bar{C}''(30)>0$,所以 $x=30$ 为 $\bar{C}(x)$ 的极小值点,也是最小值点,即月产量为 30 吨时的平均成本最低.

数学考前冲刺模拟试卷(四)参考答案及解析

一、单项选择题

1.【答案】C

【解析】$\frac{1}{\sqrt{x-1}}$ 有意义,则 $x-1>0$,即 $x>1$;$\ln(2-x)$ 有意义,则 $2-x>0$,即 $x<2$,综上,函数 $f(x)=$