1 第一章 函数与极限

本章知识串讲

第一节 映射与函数

知识导图

- 映射与函数
  - 映射
    - 映射的概念
    - 逆映射
    - 复合映射
  - 函数的概念
    - 函数的定义
    - 分段函数
    - 复合函数
    - 反函数
    - 隐函数
  - 函数的基本性质
    - 函数的有界性
    - 函数的奇偶性
    - 函数的单调性
    - 函数的周期性
  - 基本初等函数
    - 幂函数
    - 指数函数
    - 对数函数
    - 三角函数
    - 反三角函数

精讲精析

一、映射

1. 映射的概念

定义 1 在两个非空集合 A,B 之间存在一个法则 f，使得对 A 中每个元素 x 在 B 中有唯一确定的元素 y 与之对应，那么称 f 为从 A 到 B 的映射，记作 $f:A\to B$. 其中 y 称为元素 x（在映射 f 下）的像，并记作 $f(x)$，即 $y=f(x)$，而元素 x 称为元素 y（在映射 f 下）的一个原像；集合 A 称为映射 f 的定义域，记作 D_f，即 $D_f=A$；A 中所有元素的像所组成的集合称为映射 f 的值域，记作 R_f 或 $f(A)$，即 $R_f=f(A)=\{f(x)\mid x\in A\}$.

若 $R_f=B$，即 B 中任一元素 y 都是 A 中某元素的像，则称 f 为 A 到 B 上的满射；若对 A 中任意两个不同的元素 $x_1\neq x_2$，它们的像 $f(x_1)\neq f(x_2)$，则称 f 为 A 到 B 上的单射；若映射 f 既是单射，又是满射，则称 f 为一一映射（或双射）.

> 注：(1) 构成一个映射必须具备以下三个要素：集合 A，即定义域 $D_f=A$；集合 B，其中值域 $R_f\subset B$；对应法则 f，使对每个 $x\in A$，B 中有唯一确定的 $y=f(x)$ 与之对应.
>
> (2) 集合 A 和 B 不仅可以是点集，也可以是数集等其他种类的非空集合.
>
> (3) 对每个 $x\in A$，元素 x 的像 y 都是唯一的；而对每个 $y\in R_f$，元素 y 的原像 x 不一定是唯一的；映射 f 的值域 R_f 是 B 的一个子集，即 $R_f\subset B$，不一定 $R_f=B$.

例 1 设 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，对每个 $x\in\mathbf{R}$，$f(x)=|x|$. 显然，f 是一个映射，f 的定义域 $D_f=\mathbf{R}$，值域 $R_f=\{y\mid y\geqslant 0\}$，它是 $\mathbf{R}$ 的一个真子集. 对于 R_f 中的元素 y，除 $y=0$ 外，它的原像不是唯一的. 如 $y=3$ 的原像就是 $x=3$ 或 $x=-3$ 两个. 所以 f 既非单射，也非满射.

例 2 设 $X=\{(x,y)\mid |x|+2|y|=4\}$，$Y=\{(x,0)\mid |x|\leqslant 4\}$，$f:(x,y)\to(x,0)$，对每个 $(x,y)\in X$，有唯一确定的 $(x,0)\in Y$ 与之对应. 显然 f 是一个映射，f 的定义域为 $D_f=X$，值域 $R_f=Y$. 在几何上，这个映射表示将平面上一个中心在原点的菱形上的点投影到 x 轴的区间 $[-4,4]$ 上. 所以 f 不是单射，是满射.

例 3 设 $f:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]$，对每个 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，$f(x)=\sin x$. f 是一个映射，其定义域 $D_f=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，值域 $R_f=[-1,1]$，f 既是单射，又是满射，因此是一一映射.

2. 逆映射

定义 2 设 f 是 A 到 B 的单射，则由定义，对每个 $y\in R_f$，有唯一的 $x\in A$，使得 $f(x)=y$. 于是，我们可定义一个从 R_f 到 A 的新映射 g，即 $g:R_f\to A$. 对每个 $y\in R_f$，规定 $g(y)=x$，这里的 x 满足 $f(x)=y$，这个映射 g 称为 f 的逆映射，记作 f^{-1}，其定义域 $D_{f^{-1}}=R_f$，值域 $R_{f^{-1}}=A$. 只有单射才存在逆映射.

3. 复合映射

定义 3 设有两个映射，$g:A\to B_1$，$f:B_2\to C$，其中 $B_1\subset B_2$，则由映射 g 和 f 可以定出一个从 A 到 C 的对应法则，它将每个 $x\in A$ 映成 $f[g(x)]\in C$. 显然，这个对应法则确定了一个从 A 到 C 的映射，这个映射称

为映射 g 和 f 构成的复合映射，记作 $f\circ g$，即 $f\circ g:A\to C,(f\circ g)(x)=f[g(x)],x\in A$.

由复合映射的定义可知，映射 g 和 f 构成复合映射的条件是：g 的值域 R_g 必须包含在 f 的定义域内，即 $R_g\subset D_f$，否则不能构成复合映射.

注：映射 g 和 f 的复合是有顺序的，$f\circ g$ 有意义并不表示 $g\circ f$ 也有意义，即使 $f\circ g$ 与 $g\circ f$ 都有意义，复合映射 $f\circ g$ 与 $g\circ f$ 也未必相同.

例 4　设有映射 $R\to[-1,1]$，对每个 $x\in\mathbf{R}$，$g(x)=\sin x$，映射 $f:[-1,1]\to[0,1]$，对每个 $u\in[-1,1]$，$f(u)=\sqrt{1-u^2}$，则映射 g 和 f 构成的复合映射 $f\circ g\to[0,1]$，对每个 $x\in\mathbf{R}$，有 $f\circ g(x)=f[g(x)]=f(\sin x)=\sqrt{1-\sin^2 x}=|\cos x|$.

二、函数的概念

1. 函数的定义

定义 4　设 D 是一个实数集. 如果存在一个对应法则 f，使得对 D 中的每一个数 x，在 $\mathbf{R}$ 中都有唯一确定的数 y 与之对应，那么称对应法则 f 为定义在 D 上的一个函数，记为

$$y=f(x),\quad x\in D.$$

其中 x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为函数 f 的定义域.

函数定义中，对 D 中的每一个数 x，按照对应法则，总有唯一确定的值 y 与之对应，这个值称为函数在点 x 处的函数值，记作 $f(x)$. 当自变量 x 遍取 D 的所有数值时，对应的函数值 $f(x)$ 的全体构成的集合称为函数 f 的值域，记作 $f(D)$，即

$$f(D)=\{y\,|\,y=f(x),x\in D\}.$$

由函数的定义可以看出，函数的定义域与对应法则是确定函数的两个必不可少的要素. 也就是说，如果两个函数的对应法则和定义域都相同，那么这两个函数就是相同的函数.

注：函数的定义域通常由问题的实际背景确定，如果只给出解析式 $y=f(x)$，而没有指明它的定义域，那么函数的定义域就是指能使这个式子有意义的实数的集合.

例 5　求下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{x+3}$；　(2) $y=\dfrac{1}{x+2}$；　(3) $y=\ln(x-1)$.

【解析】 (1)因为二次根式的被开方数不小于 0，

所以 $x+3\geqslant 0$，解得 $x\geqslant -3$.

故 $y=\sqrt{x+3}$ 的定义域为 $[-3,+\infty)$.

(2)因为分式的分母不能为 0，

所以 $x+2\neq 0$，即 $x\neq -2$.

故 $y=\dfrac{1}{x+2}$ 的定义域为 $(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)$.

(3)因为对数的真数大于 0，

所以 $x-1>0$，解得 $x>1$.

故 $y=\ln(x-1)$ 的定义域为 $(1,+\infty)$.

小贴士

历年专升本考试第一道选择题考查的都是求函数的定义域. 备考时，考生需要熟知基本初等函数的定义域与值域，并会解一些简单的不等式.

例 6 函数 $f(x)=\sqrt{x-3}+\arcsin\dfrac{1}{x}$ 的定义域是(　　).

A. $(-\infty,+\infty)$ B. $[1,3]$

C. $(-\infty,0)\cup(0,3)$ D. $[3,+\infty)$

【答案】 D

【解析】 使根式 $\sqrt{x-3}$ 有意义的实数 x 的集合是 $\{x|x-3\geqslant0\}=\{x|x\geqslant3\}$，使 $\arcsin\dfrac{1}{x}$ 有意义的实数 x 的集合是 $\left\{x\middle|-1\leqslant\dfrac{1}{x}\leqslant1\right\}=\{x|x\geqslant1$ 或 $x\leqslant-1\}$. 因此，函数 $f(x)$ 的定义域是 $\{x|x\geqslant3\}\cap\{x|x\geqslant1$ 或 $x\leqslant-1\}=\{x|x\geqslant3\}$，即 $[3,+\infty)$. 故选 D.

2. 分段函数

定义 5 在自变量的不同变化范围中，对应法则用不同式子来表示的函数，称为分段函数.

例如，分段函数 $f(x)=\begin{cases}x, & x\geqslant0,\\ -x, & x<0,\end{cases}$ 它的定义域为 $\mathbf{R}$，当 $x\in(-\infty,0)$ 时，对应的函数值 $f(x)=-x$；当 $x\in[0,+\infty)$ 时，对应的函数值 $f(x)=x$.

例 7 设函数 $f(x)=\begin{cases}1+\log_2(1-x), & x<1,\\ 2^{x-2}, & x\geqslant1,\end{cases}$ 则 $f(-1)+f(\log_2 4)=$ ________.

【答案】 3

【解析】 由题意，得 $f(-1)=1+\log_2 2=2$，$f(\log_2 4)=f(2)=2^{2-2}=1$，所以 $f(-1)+f(\log_2 4)=3$.

3. 复合函数

定义 6 设 $y=f(x)$ 和 $u=g(x)$ 是两个函数. 如果 $y=f(x)$ 的定义域包含函数 $u=g(x)$ 的值域，那么定义在 $u=g(x)$ 定义域上的函数 $y=f(g(x))$ 称为由 $u=g(x)$ 与 $y=f(x)$ 构成的复合函数，u 称为中间变量.

函数 g 与函数 f 构成的复合函数，即按“先 g 后 f”的次序复合的函数，通常记为 $f\circ g$，即

$$(f\circ g)(x)=f(g(x)).$$

例如，取 $f(x)=\sin x$，$g(x)=x^2$，则 $g(x)$ 与 $f(x)$ 构成的复合函数为 $f(g(x))=\sin x^2$，$f(x)$ 与 $g(x)$ 构成的复合函数为 $g(f(x))=\sin^2 x$.

注：(1) 不是任何两个函数都可以构成复合函数. 例如，函数 $y=\arcsin u$ 与函数 $u=2+x^2$ 就不能构成复合函数. 因为函数 $y=\arcsin u$ 的定义域为 $[-1,1]$，而 $u=2+x^2\geqslant2$，所以两函数不满足复合函数的条件.

(2) 复合函数可以有多个中间变量，如 $y=e^u$，$u=\sqrt{v}$，$v=x+1$ 复合成函数 $y=e^{\sqrt{x+1}}$，这里 u，v 都是中间变量.

例 8 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|\leqslant 1,\\ 2, & |x|>1,\end{cases}$ 求 $f(g(x)),g(f(x))$.

【解析】 $f[g(x)]=\begin{cases}1, & |g(x)|\leqslant 1,\\ 0, & |g(x)|>1\end{cases}=\begin{cases}1, & |x|=1,\\ 0, & |x|\neq 1.\end{cases}$

$g(f(x))=\begin{cases}2-[f(x)]^2, & |f(x)|\leqslant 1,\\ 2, & |f(x)|>1\end{cases}=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 2, & |x|>1.\end{cases}$

例 9 下列函数是由哪些较简单的函数复合而成的?

(1) $y=\mathrm{e}^{-x}$;

(2) $y=\sin^2(1+2x)$;

(3) $y=\arccos\sqrt{\tan(a^2+x^2)}$.

【解析】 (1) $y=\mathrm{e}^{-x}$ 是由 $y=\mathrm{e}^u$ 与 $u=-x$ 复合而成的.

(2) $y=\sin^2(1+2x)$ 是由 $y=\sin^2 u$ 与 $u=1+2x$ 复合而成的.

(3) $y=\arccos\sqrt{\tan(a^2+x^2)}$ 是由 $y=\arccos u,u=\sqrt{v},v=\tan w,w=a^2+x^2$ 复合而成的.

4. 反函数

定义 7 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D,值域为 $f(D)$. 如果对任一 $y\in f(D)$,都存在唯一的 $x\in D$,使得 $f(x)=y$,即确定了一个以 y 为自变量,x 为因变量的函数,那么称这个新确定的函数为 $y=f(x)$ 的反函数,记为 $x=f^{-1}(y)$. 由于习惯上用 x 表示自变量,用 y 表示因变量,所以将反函数中的 x 与 y 互换位置,即记为 $y=f^{-1}(x),x\in f(D)$.

注:从函数图像上来看,两个互为反函数的函数,它们的图像关于直线 $y=x$ 对称.

例 10 求函数 $y=\dfrac{3x-5}{2x+1}$ 的反函数.

【解析】 在 $y=\dfrac{3x-5}{2x+1}$ 两边同时乘 $2x+1$,移项整理得

$$x(3-2y)=5+y,$$

等号两边同时除以 $3-2y$,得

$$x=\frac{5+y}{3-2y}.$$

故函数 $y=\dfrac{3x-5}{2x+1}$ 的反函数为 $y=\dfrac{5+x}{3-2x}$.

小贴士

求函数 $y=f(x)$ 的反函数,通常是把解析式 $y=f(x)$ 变形为 x 关于 y 的等式 $x=g(y)$,然后互换 x 与 y 的位置,得到 $y=g(x)$,函数 $y=g(x)$ 即为函数 $y=f(x)$ 的反函数.

例 11 求函数 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 的反函数.

【解析】 分别以 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 的两边为指数,e 为底数,得

$$\mathrm{e}^y=x+\sqrt{x^2+1},$$

移项整理得

$$\sqrt{x^2+1}=\mathrm{e}^y-x,$$

等号两边同时平方，整理得

$$x=\frac{\mathrm{e}^y-\mathrm{e}^{-y}}{2}.$$

故函数 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 的反函数为 $y=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$.

5. 隐函数

定义 8 如果变量 x,y 满足方程 $F(x,y)=0$，且在一定条件下，当 x 取某区间内的任一值时，相应地总有满足这方程的唯一的 y 值存在，那么就说方程 $F(x,y)=0$ 在该区间确定了一个隐函数 $y=f(x)$.

例如，方程 $x^2+y^2=1$ 在 $[-1,1]$ 上确定了两个隐函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 和 $y=-\sqrt{1-x^2}$.

三、函数的基本性质

1. 函数的有界性

定义 9 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X\subset D$. 若存在一个正数 M，使得对任一 $x\in X$，恒有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$ 在 X 上有界，或称 $f(x)$ 是 X 上的有界函数. 若不存在这样的正数 M，则称 $f(x)$ 在 X 上无界.

例如，函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界，因为对任何实数 x，恒有 $|\sin x|\leqslant 1$. 又如，函数 $y=\frac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 上无界，在 $[1,+\infty)$ 上有界.

例 12 判断下列函数在给定区间上是否有界.

(1) $y=x, x\in(-\infty,+\infty)$；

(2) $y=\frac{1}{x^2+1}, x\in(-\infty,+\infty)$；

(3) $y=\mathrm{e}^x, x\in(-\infty,0)$；

(4) $y=\arctan x, x\in(-\infty,+\infty)$.

【解析】 (1) 显然，函数 $y=x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上无界.

(2) 因为当 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时，$\left|\frac{1}{x^2+1}\right|\leqslant\frac{1}{1}=1$，

所以函数 $y=\frac{1}{x^2+1}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界.

(3) 因为当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$|\mathrm{e}^x|\leqslant \mathrm{e}^0=1$，

所以函数 $y=\mathrm{e}^x$ 在 $(-\infty,0)$ 上有界.

(4) 因为当 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时，$|\arctan x|\leqslant\frac{\pi}{2}$，

所以函数 $y=\arctan x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界.

2. 函数的奇偶性

定义 10 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，且 D 关于原点对称，即对任一 $x\in D$，都有 $-x\in D$. 若

$$f(-x)=f(x),$$

对一切 $x\in D$ 成立,则称 $f(x)$为偶函数;若

$$f(-x)=-f(x),$$

对一切 $x\in D$ 成立,则称 $f(x)$为奇函数.

从函数图像上看,偶函数的图像关于 y 轴对称,奇函数的图像关于原点对称.

例 13　判断下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=x^2(1+x^2)$;

(2) $f(x)=x(x+1)(x-1)$.

【解析】 (1)因为函数 $f(x)=x^2(1+x^2)$的定义域为 $\mathbf{R}$,且

$$f(-x)=(-x)^2[1+(-x)^2]=x^2(1+x^2)=f(x),$$

所以 $f(x)=x^2(1+x^2)$是偶函数.

(2)因为函数 $f(x)=x(x+1)(x-1)$的定义域为 $\mathbf{R}$,且

$$f(-x)=(-x)[(-x)+1][(-x)-1]=-x(x+1)(x-1)=-f(x),$$

所以 $f(x)=x(x+1)(x-1)$是奇函数.

小贴士

在判断函数的奇偶性时,一定要先判断函数的定义域是否关于原点对称,再判断 $f(x)$与 $f(-x)$的关系.

3. 函数的单调性

定义 11　设函数 $f(x)$定义域为 D,区间 $I\subset D$.若对于区间 I 上任意两点 x_1,x_2,当 $x_1<x_2$ 时,恒有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称 $f(x)$在 I 上是单调增加的;若对于区间 I 上任意两点 x_1,x_2,当 $x_1<x_2$ 时,恒有

$$f(x_1)>f(x_2),$$

则称 $f(x)$在 I 上是单调减少的.

例 14　判断下列函数的单调性.

(1) $f(x)=\dfrac{1}{1-x},x\in(-\infty,1)$;

(2) $f(x)=x^2-2x,x\in(1,+\infty)$.

【解析】 (1)任取 $x_1,x_2\in(-\infty,1)$,且 $x_1<x_2$,则

$$1-x_1>1-x_2>0,$$

从而

$$\frac{1}{1-x_1}<\frac{1}{1-x_2},$$

即得

$$f(x_1)<f(x_2).$$

故 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$在$(-\infty,1)$上单调增加.

(2)任取 $x_1,x_2\in(1,+\infty)$,且 $x_1<x_2$,则

$$x_1+x_2>2, x_2-x_1>0,$$

从而

$$f(x_2)-f(x_1)=x_2^2-x_1^2-2(x_2-x_1)=(x_2+x_1-2)(x_2-x_1)>0,$$

即得

$$f(x_1)<f(x_2).$$

故 $f(x)=x^2-2x$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调增加.

小贴士

作差与作商是判断函数单调性常用的方法,需要注意的是,作商判断单调性时,要考虑函数值的正负.

4. 函数的周期性

定义 12 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D. 若存在一个正数 T,使得对任一 $x\in D$,有 $(x+T)\in D$,且

$$f(x+T)=f(x)$$

恒成立,则称 $f(x)$ 为周期函数,称 T 为 $f(x)$ 的一个周期. 如果函数 $f(x)$ 的所有周期中,存在一个最小的周期 T_0,那么称 T_0 为 $f(x)$ 的最小正周期.

注: 并非所有的周期函数都有最小正周期. 例如,对狄利克雷函数 $D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 是有理数},\\ 0, & x\text{ 是无理数},\end{cases}$ 任何正有理数都是它的周期,由于不存在最小的正有理数,所以它没有最小正周期.

例 15 判断下列函数的周期性,如果是周期函数,写出它们的最小正周期.

(1) $f(x)=\tan 2x$;

(2) $f(x)=x\tan x$;

(3) $f(x)=|\sin 2x|$.

【解析】 (1) 函数 $f(x)=\tan 2x$ 是周期函数,它的最小正周期是 $\frac{\pi}{2}$.

(2) 函数 $f(x)=x\tan x$ 不是周期函数.

(3) 函数 $f(x)=|\sin 2x|$ 是周期函数,它的最小正周期是 $\frac{\pi}{2}$.

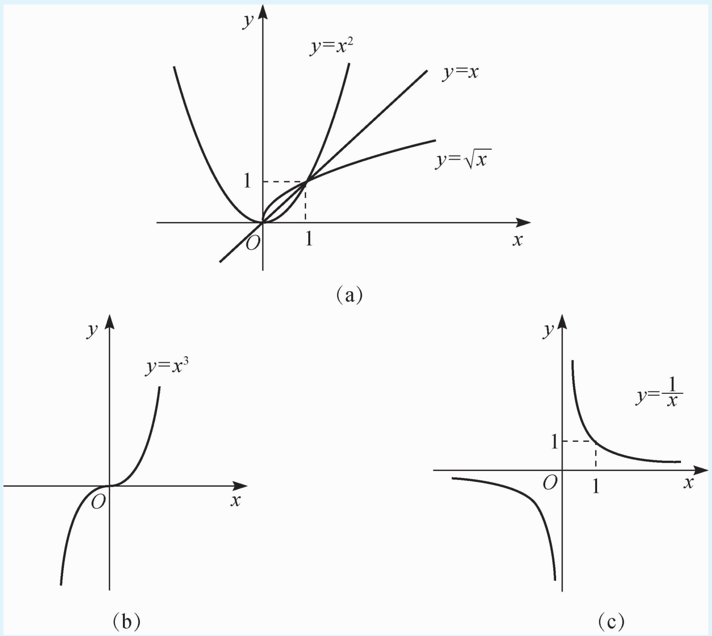
小贴士

如果函数 $f(x)$ 的周期是 T,那么函数 $f(\omega x)(\omega>0)$ 的周期是 $\frac{T}{\omega}$.

四、基本初等函数

1. 幂函数

形如 $y=x^a$ (a 为常数)的函数称为幂函数. 当 $a=1,2,3,\frac{1}{2},-1$ 时,幂函数 $y=x^a$ 的图像如图所示.



(a)
(b)
(c)

幂函数 $y=x^a$ 的图像恒过点(1,1). 当 $a>0$ 时,幂函数 $y=x^a$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调增加;当 $a<0$ 时,幂函数 $y=x^a$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调减少.

备考提示

指数幂及其运算性质:

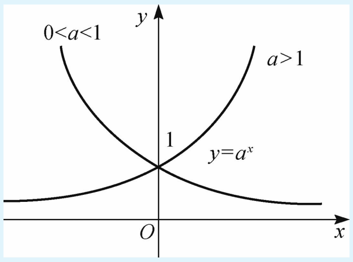
$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m};\ a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}};\ a^m a^n=a^{m+n};\ (a^m)^n=a^{mn};\ (ab)^m=a^m b^m.$$

其中 $a>0,b>0,m\in\mathbf{R},n\in\mathbf{R}$.

2. 指数函数

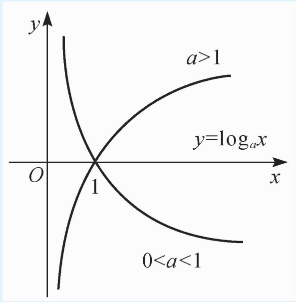
形如 $y=a^x(a>0,a\neq1)$ 的函数称为指数函数. 指数函数的定义域为 $\mathbf{R}$,值域为 $(0,+\infty)$,它的图像如图所示.

指数函数 $y=a^x$ 的图像恒过点(0,1). 当 $a>1$ 时,指数函数 $y=a^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调增加;当 $0<a<1$ 时,指数函数 $y=a^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调减少.



3. 对数函数

形如 $y=\log_a x(a>0,a\neq1)$ 的函数称为对数函数. 对数函数的定义域为 $(0,+\infty)$,值域为 $\mathbf{R}$,它的图像如图所示.



特别地，以 10 为底的对数函数称为常用对数函数，简记为 $y=\lg x$；以 e（e=2.718 28…是一个无理数）为底的对数函数称为自然对数函数，简记为 $y=\ln x$.

对数函数 $y=\log_a x$ 的图像恒过点(1,0). 当 $a>1$ 时，对数函数 $y=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调增加；当 $0<a<1$ 时，对数函数 $y=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调减少.

对于确定的实数 $a(a>0,a\neq1)$，指数函数 $y=a^x$ 与对数函数 $y=\log_a x$ 互为反函数，它们的图像关于直线 $y=x$ 对称.

备考提示

对数的运算性质：

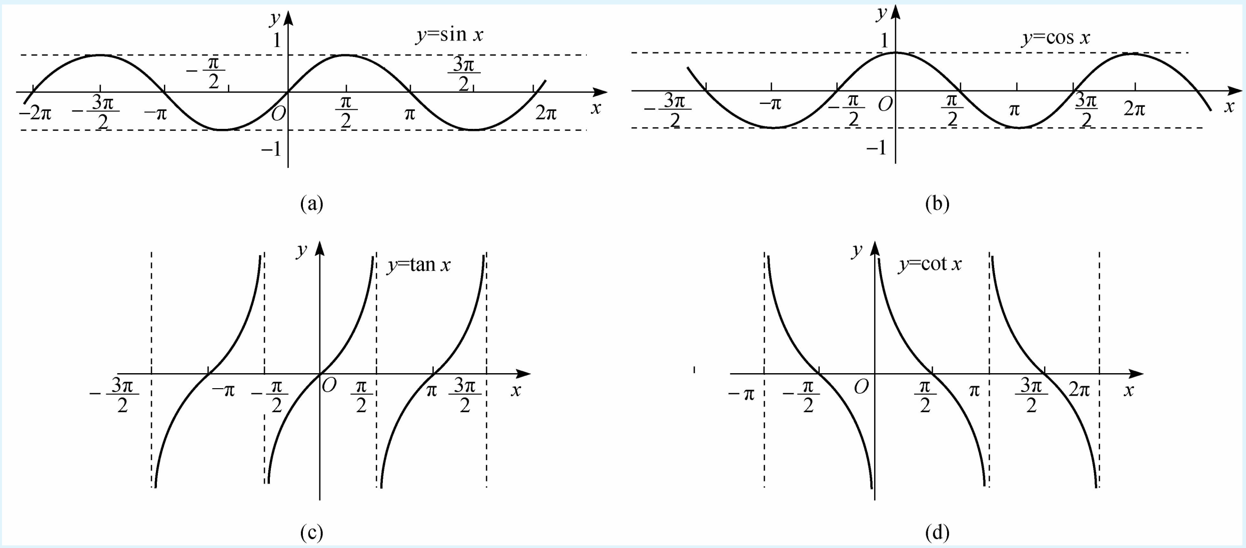
$\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$；　　$\log_a \dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$；

$\log_a M^n=n\log_a M$；　　$\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$（换底公式）.

其中 $a>0$，且 $a\neq1$；$b>0$；$c>0$，且 $c\neq1$；$M>0$，$N>0$；$n\in\mathbf{R}$.

4. 三角函数

正弦函数 $y=\sin x$、余弦函数 $y=\cos x$、正切函数 $y=\tan x$、余切函数 $y=\cot x$ 统称为三角函数，它们的图像如图所示.



正弦函数 $y=\sin x$ 和余弦函数 $y=\cos x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，值域为 $[-1,1]$；正切函数 $y=\tan x$ 的定义域为 $\left\{x \middle| x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbf{Z}\right\}$，值域为 $\mathbf{R}$；余切函数 $y=\cot x$ 的定义域为 $\{x|x\neq k\pi, k\in\mathbf{Z}\}$，值域为 $\mathbf{R}$.

备考提示

三角函数的常用公式：

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$；　　$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$；

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$；　　$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$；

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$；　　$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$.

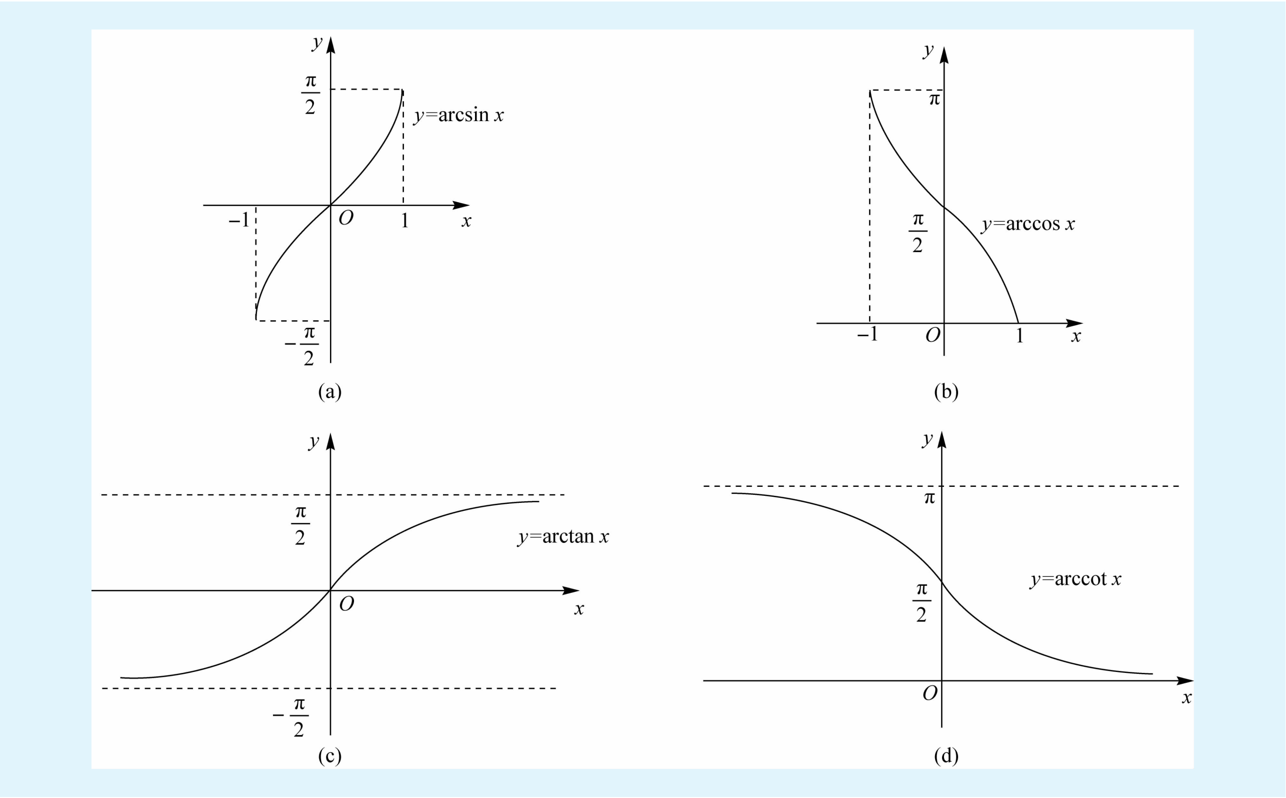
5. 反三角函数

正弦函数 $y=\sin x$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上的反函数，称为反正弦函数，记作 $y=\arcsin x$，其定义域为 $[-1,1]$，值域为 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，图像如图所示.

余弦函数 $y=\cos x$ 在区间 $[0,\pi]$ 上的反函数，称为反余弦函数，记作 $y=\arccos x$，其定义域为 $[-1,1]$，值域为 $[0,\pi]$，图像如图所示.

正切函数 $y=\tan x$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上的反函数，称为反正切函数，记作 $y=\arctan x$，其定义域为 $\mathbf{R}$，值域为 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，图像如图所示.

余切函数 $y=\cot x$ 在区间 $(0,\pi)$ 上的反函数，称为反余切函数，记作 $y=\operatorname{arccot} x$，其定义域为 $\mathbf{R}$，值域为 $(0,\pi)$，图像如图所示.



定义 13 由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合所构成的函数,称为初等函数.

巩固练习

1. 函数 $f(x)=\dfrac{x-1}{\ln x}+\sqrt{16-x^2}$ 的定义域为( ).

A. $(0,1)$　　B. $(0,1)\cup(1,4)$

C. $(0,4)$　　D. $(0,1)\cup(1,4]$

2. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 1,\\ x+\dfrac{6}{x}-6, & x>1,\end{cases}$ 则 $f(f(-3))=$( ).

A. $\dfrac{11}{3}$　　B. 9

C. $\dfrac{2}{3}$　　D. 6

3. 设函数 $y=2+\ln(x+3)$,则此函数的反函数是( ).

A. $y=\mathrm{e}^{2x+3}-3$　　B. $y=\mathrm{e}^{x-2}-3$

C. $x=\ln(y-2)-3$　　D. $y=\ln(x-2)-3$

4. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数. 若 $f(x)$ 的最小正周期为 4,且 $f(1)>0$,$f(3)=\dfrac{m-3}{m+1}$,则 m 的取值范围是( ).

A. $-3<m<1$　　B. $m>1$ 或 $m<-3$

C. $-1<m<3$　　D. $m>3$ 或 $m<-1$

5. 函数 $f(x)=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$ 是( ).

A. 奇函数　　B. 偶函数

C. 非奇非偶函数　　D. 以上都不对

6. 下列函数中,图形关于 y 轴对称的有( ).

A. $y=x\cos x$　　B. $y=x+x^3+1$

C. $y=\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$　　D. $y=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$

7. 函数 $y=\cos 3x$ 的周期 $T=$________.

8. 设集合 A 和 B 都是自然数集合,映射 $f:A\to B$ 把集合 A 中的任一元素 n 映射称集合 B 中的元素 2^n+n,则在映射 f 下,像 20 的原像是________.

9. 设 $f(x)=x+1$,$\varphi(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$,则 $f[\varphi(x)+1]=$________.

10. 已知 $f(\mathrm{e}^x+1)=\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x+1$,则 $f(x)=$________________.

11. 设 $f(x)=\begin{cases}1 & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ -2 & 1< x\leqslant 2,\end{cases}$ 求函数 $f(x+3)$ 的定义域.

12. 设函数 $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$, $g(x)=\sqrt{x+2}$, 求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$.

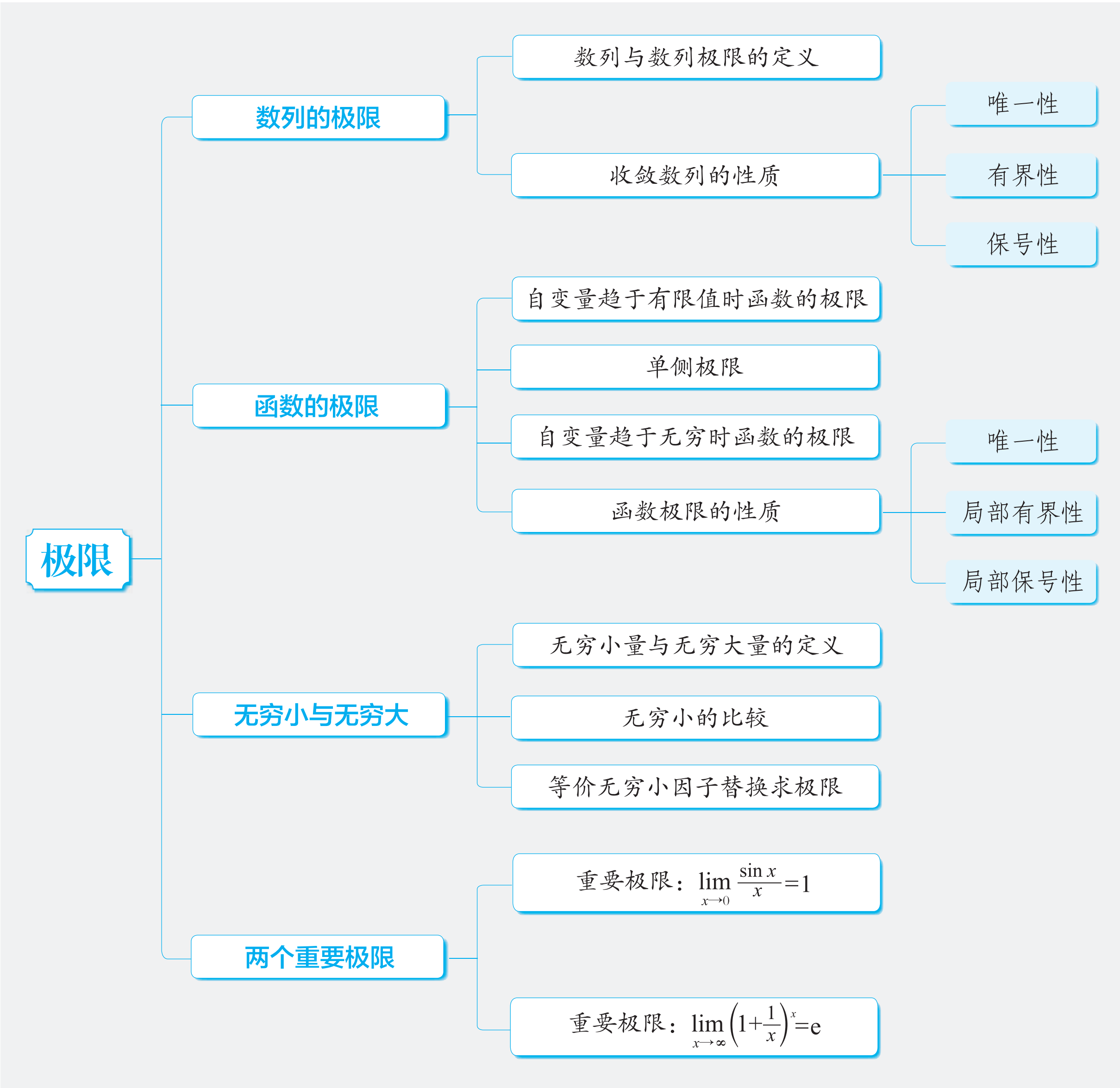
13. 求下列函数的反函数.

(1) $y=1+\ln(x+2)$；

(2) $y=3^{2x+5}$.

第二节 极 限

知识导图



精讲精析

一、数列的极限

1. 数列与数列极限的定义

按照一定顺序排列的一列数

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$$

称为数列，简记为$\{x_n\}$，其中x_n称为通项. 例如，

$$1,2,3,\cdots,n,\cdots$$

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$$

$$2,\frac{1}{2},\frac{4}{3},\cdots,\frac{n+(-1)^{n-1}}{n},\cdots$$

它们的通项分别是$n,\frac{1}{n},\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}$.

> **注:** 数列可以看成是定义在正整数集上的函数$x_n=f(n)$，数列的通项就是这个函数的表达式. 需要注意的是，并不是所有的数列都能写出它的通项.

定义 1 给定一个数列$\{x_n\}$，如果当n无限增大时(即$n\to\infty$时)，x_n能无限接近于某个确定的实数a，那么称数列$\{x_n\}$是收敛的，并称a为数列$\{x_n\}$的极限(或者说数列$\{x_n\}$收敛于a)，记作

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a \text{ 或者 } x_n\to a(n\to\infty).$$

如果不存在实数a，使得数列$\{x_n\}$收敛于a，那么称$\{x_n\}$是发散的，习惯上也称$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$不存在.

例如，数列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$，当$n$无限增大时，$\frac{1}{n}$无限减小并接近于0，即$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. 又如，数列$\left\{\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}\right\}$，当$n$增大时，$\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}$无限接近于1，即$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}=1$.

收敛数列的特性是"随着n的无限增大，x_n能无限地接近某一常数a"，这就是说，当n充分大时，数列的通项x_n与常数a之差的绝对值可以任意小. 下述定义2是数列极限的精确定义.

定义 2 设$\{x_n\}$为一个数列，如果存在常数a，对于任意给定的正数ε(不论它多么小)，总存在正整数N，使得当$n>N$时，不等式

$$|x_n-a|<\varepsilon$$

都成立，那么常数a是数列$\{x_n\}$的极限，即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

数列极限研究的是当n足够大时数列的变化趋势，因此数列的极限与数列的有限项无关，改变或者删去数列的有限项不会改变数列的极限.

例 1 计算下列极限.

(1)$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)$；　　(2)$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

【解析】 (1)当n无限增大时，$1+\frac{1}{n}$无限接近于1，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$.

(2)当n无限增大时，$\left(\frac{1}{3}\right)^n$无限接近于0，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$.

例 2 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1(a>1)$.

【证明】 令$h_n=\left|\sqrt[n]{a}-1\right|=\sqrt[n]{a}-1$，则

$$(1+h_n)^n=a.$$

利用二项式定理，上式可化为

$$1+nh_n+\frac{n(n-1)}{2}(h_n)^2+\cdots+(h_n)^n=a,$$

于是

$$nh_n<a,$$

从而

$$0<h_n<\frac{a}{n}.$$

对任意给定的正数 ε，要使 $\left|\sqrt[n]{a}-1\right|=h_n<\varepsilon$，只需令 $\frac{a}{n}<\varepsilon$. 现在取 $N=\left[\frac{a}{\varepsilon}\right]$ $\left(\left[\frac{a}{\varepsilon}\right]\right.$表示不超过$\frac{a}{\varepsilon}$的最大正整数$\left.\right)$，则当 $n>N$ 时，就有 $\left|\sqrt[n]{a}-1\right|<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

2. 收敛数列的性质

定理 1（数列极限的唯一性） 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛，那么它的极限唯一.

定理 2（收敛数列的有界性） 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛，那么它是有界的，即存在正常数 M，对一切正整数 n，有 $|x_n|<M$.

定理 3（收敛数列的保号性） 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，且 $a>0$（或 $a<0$），那么存在正整数 N，当 $n>N$ 时，有 $x_n>0$（或 $x_n<0$）.

推论 1 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，且存在正整数 N，当 $n>N$ 时，有 $x_n\geqslant0$（或 $x_n\leqslant0$），那么 $a\geqslant0$（或 $a\leqslant0$）.

定理 4（数列极限的四则运算） 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$，则

①$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=a\pm b$；②$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=a\cdot b$；③$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{a}{b}(b\neq0)$.

推论 2 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}cx_n=ca(c\in\mathbf{R})$，$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n)^n=a^n(n\in\mathbf{N}^*)$.

注： 定理 4 可以推广至有限多个收敛数列的情形. 利用定理 4 和推论 2 可以计算一些稍复杂的数列的极限.

例 3 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+n+1}{2n^2+5n+2}$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.

【解析】 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+n+1}{2n^2+5n+2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}3+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}2+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}}=\frac{3}{2}$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$.

显然，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0$.

小贴士

定理 4 和推论 2 的应用前提是单个数列的极限存在，如果单个数列的极限不存在，那么就要寻找其他方法计算极限. 通常，如果分子分母都是关于 n 的多项式，那么可以同时除以分子和分母的最高次幂项. 此外，对于无穷项相加的情形不能直接使用定理 4.

例 4 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+q+q^2+\cdots+q^n)$，其中 $|q|<1$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}\right]$.

【解析】 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+q+q^2+\cdots+q^n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-q^{n+1}}{1-q}=\frac{1}{1-q}\lim\limits_{n\to\infty}(1-q^{n+1})=\frac{1}{1-q}$.

(2) 由于 $\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$，

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=1$.

定理 5(夹逼准则) 设数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 都以 a 为极限，数列 $\{z_n\}$ 满足：存在正整数 N_0，当 $n>N_0$ 时，有

$$x_n\leqslant z_n\leqslant y_n,$$

则数列 $\{z_n\}$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$.

例 5 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

【解析】 因为

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\frac{n}{\sqrt{n^2+1}},$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1.$$

例 6 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

【证明】 令 $\sqrt[n]{n}=1+h_n(h_n>0)$，则当 $n>3$ 时，

$$n=(1+h_n)^n=1+nh_n+\frac{n(n-1)}{2}(h_n)^2+\cdots+(h_n)^n\geqslant\frac{n(n-1)}{2}(h_n)^2,$$

于是

$$0<h_n<\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}},$$

从而

$$1\leqslant\sqrt[n]{n}=1+h_n\leqslant 1+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}}.$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}}\right)=1$，所以由夹逼准则知，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

定义 3 如果数列 $\{x_n\}$ 满足条件

$$x_1\leqslant x_2\leqslant x_3\leqslant\cdots\leqslant x_n\leqslant x_{n+1}\leqslant\cdots,$$

就称数列 $\{x_n\}$ 是单调增加的；

如果数列 $\{x_n\}$ 满足条件

$$x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant \cdots \geqslant x_n \geqslant x_{n+1} \geqslant \cdots,$$

就称数列$\{x_n\}$是单调减少的. 单调增加和单调减少的数列统称为单调数列.

定理 6(单调有界定理) 单调有界数列必有极限.

例 7 设 $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^n}$. 证明:数列$\{x_n\}$收敛.

【证明】 显然,数列$\{x_n\}$是单调增加的,且

$$\begin{aligned} x_n &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^n} \\ &\leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{1 - \frac{1}{2}} \leqslant \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

因此,由单调有界定理,数列$\{x_n\}$收敛.

例 8 证明:数列$\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \cdots$收敛.

【证明】 设数列的第 n 项为 x_n,则

$$x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}.$$

因为

$$x_1 = \sqrt{2} < 2,$$

所以

$$x_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}} < 2.$$

以此类推,$0 < x_n < 2$,于是

$$x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n} > x_n,$$

即数列$\{x_n\}$是单调递增,且有界的数列. 由单调有界定理,数列$\{x_n\}$收敛.

二、函数的极限

1. 自变量趋于有限值时函数的极限

定义 4 设函数 $f(x)$在点 x_0 的某一去心邻域内有定义. 如果当 x 无限接近 x_0 时(即 $x \to x_0$ 时),对应的函数值 $f(x)$无限接近于某个确定的实数 A,那么称当 x 趋于 x_0 时,函数 $f(x)$以 A 为极限(或者说函数 $f(x)$在点 x_0 处的极限存在,其极限为 A),记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \text{ 或者 } f(x) \to A(x \to x_0).$$

上述定义中,只要求 $f(x)$在点 x_0 的某一去心邻域内有定义,所以$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$与函数 $f(x)$在点 x_0 处的取值没有关系,$f(x_0)$是否改变,甚至是否存在都不影响$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$. 下述定义 5 是自变量趋于有限值时函数的极限的精确定义.

定义 5 设函数 $f(x)$在点 x_0 的某一去心邻域内有定义. 如果存在常数 A,对任意给定的正数 ε(不论它多么小),总存在正数 δ,使得当 x 满足不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,对应的函数值都满足不等式

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

那么常数 A 是函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

例 9　计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 1}(x+2)$；　　　　(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$.

【解析】 (1)当 x 趋于 1 时，$x+2$ 无限接近于 3，

所以 $\lim\limits_{x\to 1}(x+2)=3$.

(2)当 x 趋于 1 时，$\dfrac{x^2-1}{x-1}=\dfrac{(x+1)(x-1)}{x-1}=x+1$，

所以 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2$.

2. 单侧极限

在 x 趋于 x_0 时函数 $f(x)$ 的极限的定义中，x 既从 x_0 的左侧也从 x_0 的右侧趋于 x_0. 如果当 x 仅从 x_0 的左侧趋于 x_0（记作 $x\to x_0^-$）时，$f(x)$ 趋于某个确定的实数 A，那么就说函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的左极限存在，并称 A 为 $f(x)$ 在点 x_0 处的左极限，记作

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A \text{ 或 } f(x_0^-)=A.$$

如果当 x 仅从 x_0 的右侧趋于 x_0（记作 $x\to x_0^+$）时，$f(x)$ 趋于某个确定的实数 A，那么就说函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的右极限存在，并称 A 为 $f(x)$ 在点 x_0 处的右极限，记作

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A \text{ 或 } f(x_0^+)=A.$$

定理 7　函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的极限存在的充要条件是函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的左、右极限都存在并且相等.

例 10　判断下列函数在 $x=1$ 处的极限是否存在，如果存在请写出极限值.

(1) $f(x)=\begin{cases}3x-1, & x\leqslant 1,\\ x+1, & x>1;\end{cases}$

(2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x\leqslant 1,\\ x^2-2, & x>1.\end{cases}$

【解析】 (1)因为 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(3x-1)=2$，$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x+1)=2$，

所以 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=2$，

从而 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=2$.

(2)因为 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x^2-2)=-1$，

所以 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)$，

从而 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 不存在.

例 11　设函数 $f(x)=\begin{cases}x, & -1<x<0,\\ 1, & x=0,\\ -x, & 0<x<1,\\ x-1, & x\geqslant 1.\end{cases}$ 下列陈述中，正确的是(　　).

A. $\lim\limits_{x\to0}f(x)$不存在　　B. $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$

C. $\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$　　D. $\lim\limits_{x\to1}f(x)=1$

【答案】 B

【解析】 因为 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}x=0$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(-x)=0$，所以 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$，从而 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$. 因为 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(-x)=-1$，$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(x-1)=0$，所以 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$，从而 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$不存在. 故本题选 B.

3. 自变量趋于无穷时函数的极限

定义 6 设函数 $f(x)$在$|x|$大于某一正数时有定义. 如果当$|x|$无限增大时（即 $x\to\infty$时），对应的函数值 $f(x)$无限接近于某个确定的实数 A，那么称当 $x\to\infty$时，函数 $f(x)$以 A 为极限，记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \text{ 或者 } f(x)\to A(x\to\infty).$$

特别地，如果 x 取正值且无限增大时，对应的函数值 $f(x)$无限接近于某个确定的实数 A，那么称当 $x\to+\infty$时，函数 $f(x)$以 A 为极限，记作

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A \text{ 或者 } f(x)\to A(x\to+\infty).$$

如果 x 取负值且$|x|$无限增大时，对应的函数值 $f(x)$无限接近于某个确定的实数 A，那么称当 $x\to-\infty$时，函数 $f(x)$以 A 为极限，记作

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=A \text{ 或者 } f(x)\to A(x\to-\infty).$$

需要注意的是，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 包含了 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$. 因此，如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$和 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$中至少有一个不存在，或 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$和 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$都存在，但不相等，那么$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$不存在.

> 注：由于数列是特殊的函数，所以给定一个函数 $f(x)$，若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在，则数列$\{f(n)\}$的极限也存在，并且$\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$. 需要注意，$\lim\limits_{n\to\infty}f(n)$存在不一定能推出 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$也存在，如 $f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{N},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

例 12　判断极限$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 是否存在.

【解析】 由反正切函数的图像可知，$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$，

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x\neq\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x$，

从而$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在.

例 13　判断极限$\lim\limits_{x\to\infty}e^x$ 是否存在.

【解析】 由指数函数 $y=e^x$ 的图像可知，$\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}e^x$ 不存在，

所以$\lim\limits_{x\to\infty}e^x$ 不存在.

4. 函数极限的性质

这里以自变量趋于有限值时函数的极限为代表说明函数极限的性质，至于其他形式的函数极限的性质，只要相应地做一些修改即可得到.

定理 8（函数极限的唯一性） 如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$，那么该极限值唯一.

定理 9（函数极限的局部有界性）　如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，那么存在常数 $\delta>0$ 和 $M>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)|\leqslant M$.

定理 10（函数极限的局部保号性）　如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，且 $A>0$（或 $A<0$），那么存在常数 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$）.

推论 3　如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，且存在常数 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)\geqslant0$（或 $f(x)\leqslant0$），那么 $A\geqslant0$（或 $A\leqslant0$）.

备考提示

函数在一点处（或无穷远处）的极限存在是指函数在这一点附近（或无穷远处）满足函数极限存在的定义，所以定理 9，定理 10 都是局部性质（定理中的 $0<|x-x_0|<\delta$ 就是将自变量限制在 x_0 附近）. 但是在更大的区间上有界性和保号性可能不成立，如函数 $f(x)=x$，它在任意点处的极限都存在，所以它满足局部有界性和局部保号性，但在 $\mathbf{R}$ 上 $f(x)$ 无界且变号.

定理 11（函数极限的四则运算）　设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$，则

①$\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=A\pm B$；

②$\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=A\cdot B$；

③$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}(B\neq0)$.

推论 4　设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} cf(x)=cA(c\in\mathbf{R})$，$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^n=A^n(n\in\mathbf{N}^*)$.

例 14　计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to2}(x^2+3x)$；　　(2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2+x+1}{x^3+2x^2-1}$；

(3) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-16}{x-4}$.

【解析】 (1) $\lim\limits_{x\to2}(x^2+3x)=\lim\limits_{x\to2}x^2+\lim\limits_{x\to2}3x=4+6=10$.

(2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2+x+1}{x^3+2x^2-1}=\dfrac{\lim\limits_{x\to1}(2x^2+x+1)}{\lim\limits_{x\to1}(x^3+2x^2-1)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to1}2x^2+\lim\limits_{x\to1}x+\lim\limits_{x\to1}1}{\lim\limits_{x\to1}x^3+\lim\limits_{x\to1}2x^2-\lim\limits_{x\to1}1}=\dfrac{2+1+1}{1+2-1}=2$.

(3) 需要注意，当 $x\to4$ 时，分母 $x-4$ 的极限为 0，不能直接使用极限的运算，这里可以先将分子和分母约去公因式 $x-4$，再计算函数的极限.

$$\lim_{x\to4}\frac{x^2-16}{x-4}=\lim_{x\to4}\frac{(x-4)(x+4)}{x-4}=\lim_{x\to4}(x+4)=\lim_{x\to4}x+\lim_{x\to4}4=8.$$

三、无穷小与无穷大

1. 无穷小量与无穷大量的定义

定义 7　如果当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时，函数 $f(x)$ 的极限为零，那么称 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的无穷小. 特别地，以零为极限的数列 $\{x_n\}$ 是当 $n\to\infty$ 时的无穷小.

备考提示

(1)无穷小并不是一个"非常小的数"(如 10^{-100}),而是一个极限为零的变量,它的绝对值可以小于任一给定的数的绝对值.常数列$\{0\}$是一个特殊的无穷小.

(2)由无穷小的定义和函数极限的四则运算可知,无穷小与有界量的乘积仍为无穷小,有限个无穷小的和仍为无穷小.

定义 8 如果当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时,函数 $f(x)$的绝对值$|f(x)|$可以大于预先指定的任何正数 M,那么称函数$f(x)$为当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的无穷大,记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty(\text{或}\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty).$$

定理 12 在 x 的同一变化过程中,无穷大的倒数为无穷小;不恒为零的无穷小的倒数为无穷大.

例 15 判断下列变量是无穷小还是无穷大.

(1)3^x-1,当 $x\to 0^+$时;

(2)$\dfrac{\arctan x}{x}$,当 $x\to\infty$时;

(3)$e^{\frac{1}{x}}$,当 $x\to 0^+$时;

(4)$e^{\frac{1}{x}}$,当 $x\to 0^-$时.

【解析】 (1)因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}(3^x-1)=0$,

所以当 $x\to 0^+$ 时,3^x-1 是无穷小.

(2)当 $x\to\infty$时,$\dfrac{1}{x}$是无穷小,$\arctan x$ 是有界量,因为无穷小与有界量的乘积仍为无穷小,

所以此时$\dfrac{\arctan x}{x}$是无穷小.

(3)令 $t=\dfrac{1}{x}$,则 $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{t\to+\infty} e^t=+\infty$,

所以当 $x\to 0^+$ 时,$e^{\frac{1}{x}}$是无穷大.

(4)令 $t=-x$,则当 $x\to 0^-$ 时,$t\to 0^+$,因为当 $t\to 0^+$ 时,$e^{\frac{1}{t}}$是无穷大,

所以此时 $e^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{-t}}=\dfrac{1}{e^{\frac{1}{t}}}$是无穷小.

2.无穷小的比较

设 $f(x)$,$g(x)$都是 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的无穷小,且 $g(x)\neq 0$.

(1)若$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0\left(\text{或}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0\right)$,则称 $f(x)$是比 $g(x)$高阶的无穷小,记作 $f(x)=o(g(x))$;

(2)若$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty\left(\text{或}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty\right)$,则称 $f(x)$是比 $g(x)$低阶的无穷小,记作 $g(x)=o(f(x))$;

(3)若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=c(c\neq 0)\left(\text{或}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=c(c\neq 0)\right)$,则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同阶无穷小,特别地,若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$,则称 $f(x)$与 $g(x)$是等价无穷小,记作 $f(x)\sim g(x)$.

备考提示

常用的 $x\to0$ 时的等价无穷小：

$\sin x\sim x$，　$\tan x\sim x$，　$\arcsin x\sim x$，

$\arctan x\sim x$，　$e^x-1\sim x$，　$\ln(1+x)\sim x$，

$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$，　$a^x-1\sim x\ln a$，　$(1+x)^a-1\sim ax(a\neq0)$.

利用变量替换可以将上述等价无穷小中的 x 换成任一趋于 0 的变量，如 $\sin x^3\sim x^3$，$(1+2x)^a-1\sim2ax$.

例 16　当 $x\to1$ 时，与 $1-x$ 等价的是(　　).

A. $\frac{1}{2}(1-x^3)$　　B. $\frac{1}{2}(1-\sqrt{x})$

C. $\frac{1}{2}(1-x^2)$　　D. $\frac{1}{2}(1+\sqrt{x})$

【答案】　C

【解析】　因为 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\frac{1}{2}(1-x^3)}{1-x}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(1-x)(1+x+x^2)}{1-x}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to1}(1+x+x^2)=\frac{3}{2}\neq1$，所以 $\frac{1}{2}(1-x^3)$ 与 $1-x$ 是 $x\to1$ 时的同阶无穷小，但不是等价无穷小；因为 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\frac{1}{2}(1-\sqrt{x})}{1-x}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-\sqrt{x}}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}=\frac{1}{4}$，所以 $\frac{1}{2}(1-\sqrt{x})$ 与 $1-x$ 是 $x\to1$ 时的同阶无穷小，但不是等价无穷小；因为 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\frac{1}{2}(1-x^2)}{1-x}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(1+x)(1-x)}{1-x}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to1}(1+x)=1$，所以 $\frac{1}{2}(1-x^2)$ 与 $1-x$ 是 $x\to1$ 时的等价无穷小；因为 $\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{2}(1+\sqrt{x})=1\neq0$，所以 $\frac{1}{2}(1+\sqrt{x})$ 不是无穷小. 故本题选 C.

例 17　下列说法中错误的是(　　).

A. 有限个无穷小的和仍为无穷小

B. 当 $x\to1$ 时，$1-x^3$ 是 $1-x$ 的同阶无穷小

C. 若 α,β,γ 是同一极限过程的无穷小，且 $\alpha\sim\beta,\beta\sim\gamma$，则 $\alpha\sim\gamma$

D. 已知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x}{1-x}=1$，由此断言，当 $x\to0$ 时，$\cos x$ 与 $1-x$ 是等价无穷小

【答案】　D

【解析】　根据极限的四则运算，有限个无穷小的和仍为无穷小，A 项说法正确；因为 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x^3}{1-x}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(1-x)(1+x+x^2)}{1-x}=3$，所以当 $x\to1$ 时，$1-x^3$ 是 $1-x$ 的同阶无穷小，B 项说法正确；因为 $\alpha\sim\beta,\beta\sim\gamma$，所以 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}=1,\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta}{\gamma}=1$，从而 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\gamma}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}\cdot\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta}{\gamma}=1$，即 $\alpha\sim\gamma$，C 项说法正确；当 $x\to0$ 时，$\cos x$ 与 $1-x$ 都

不是无穷小，D 项说法错误. 故本题选 D.

例 18 当 $x\to 0$ 时，$(1+x^2)^k-1$ 与 $1-\cos x$ 为等价无穷小，则 k 的值为(　　).

A. 1　　　　B. $-\dfrac{1}{2}$

C. $\dfrac{1}{2}$　　　　D. -1

【答案】 C

【解析】 当 $x\to 0$ 时，$(1+x^2)^k-1\sim kx^2$，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，因为 $(1+x^2)^k-1$ 与 $1-\cos x$ 为等价无穷小，所以 $k=\dfrac{1}{2}$. 故本题选 C.

3. 等价无穷小因子替换求极限

设当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时 $f(x)\sim h(x)$，根据等价无穷小的定义及极限的乘法运算，有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{h(x)}{f(x)}=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{h(x)}{f(x)}\right)=\lim_{x\to x_0}\frac{h(x)}{g(x)}.$$

因此，在包含无穷小的乘除式中可以直接将做乘法因子或除法因子的无穷小用与其等价的无穷小替换.

例 19 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$；　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{\ln(1+x)}$；　(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{1-e^x}$.

【解析】 (1) 因为当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{2x^2}=\dfrac{1}{2}$.

(2) 因为当 $x\to 0$ 时，$\tan 2x\sim 2x$，$\ln(1+x)\sim x$，

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{x}=2$.

(3) 因为当 $x\to 0$ 时，$\sqrt{1+x}-1\sim\dfrac{1}{2}x$，$e^x-1\sim x$，

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{1-e^x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{-2x}=-\dfrac{1}{2}$.

小贴士

等价无穷小因子替换的原理是极限的乘法运算，所以替换的是作为乘、除因子的无穷小，对于作为加、减因子的无穷小，不能随意替换. 如极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$，如果直接用 $\sin x$ 替换 x，就会得到 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x}{x^3}=0$，但实际上这个结果是错误的.

例 20 当 $x\to 0$ 时，与 x 等价的无穷小是(　　).

A. $\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$　　　　B. $2\sin x$

C. $\ln(1+x)$　　　　D. $\ln(1+x^2)$

【答案】 C

【解析】 当 $x\to 0$ 时，$\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\sim\frac{x}{\sqrt{x}}=\sqrt{x}$，所以 $\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ 是 x 的低阶无穷小；当 $x\to 0$ 时，$2\sin x\sim 2x$，所以 $2\sin x$ 是 x 的同阶无穷小，但不是等价无穷小；当 $x\to 0$ 时，$\ln(1+x)\sim x$，所以 $\ln(1+x)$ 是 x 的等价无穷小；当 $x\to 0$ 时，$\ln(1+x^2)\sim x^2$，所以 $\ln(1+x^2)$ 是 x 的高阶无穷小. 故本题选 C.

四、两个重要极限

两个重要极限是 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ 和 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$，这两个极限需要考生熟记. 与两个重要极限相关的题目，通常利用变量替换法进行求解.

例 21　$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin 2x}{x}$ 的值为(　　).

A. 0　　　　B. 1

C. 2　　　　D. ∞

【答案】 A

【解析】 当 $x\to\infty$ 时，$\sin 2x$ 是有界量，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin 2x}{x}=0$. 故本题选 A.

例 22　计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}$；　　(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

【解析】 (1)令 $t=3x$，则当 $x\to 0$ 时，$t\to 0$，从而 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=3\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=3$.

(2)令 $t=\frac{1}{x}$，则当 $x\to\infty$ 时，$t\to 0$，从而 $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$，令 $t=\frac{x}{2}$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{2\sin^2 t}{4t^2}=\frac{1}{2}\lim\limits_{t\to 0}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2=\frac{1}{2}\left(\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\right)^2=\frac{1}{2}$.

小贴士

关于两个重要极限一定要注意自变量的变化趋势，特别注意的是 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$，$\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=1$.

例 23　计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{2x}\right)^x$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$；　　(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x$.

【解析】 (1)令 $t=-2x$，则当 $x\to\infty$ 时，$t\to\infty$，从而 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{2x}\right)^x=\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-\frac{t}{2}}=\left[\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^{-\frac{1}{2}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

(2)令 $t=\frac{1}{2x}$，则当 $x\to 0$ 时，$t\to\infty$，从而 $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t}=\left[\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^2=\mathrm{e}^2$.

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x+1}\right)^x$. 令 $t=-\frac{x+1}{2}$，则当 $x\to\infty$ 时，$t\to\infty$，从而 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x+1}\right)^x=$

$\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-2t-1}=\left[\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{-2}\cdot\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-1}=e^{-2}\cdot 1=e^{-2}$.

小贴士

对类似于$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$的“$1^{\infty}$”型极限$\lim\limits_{x\to\square}(1+u)^{v}$($x\to\square$时,$u\to 0$,$v\to\infty$),除上述变量替换法外还有一个简单的计算公式$\lim\limits_{x\to\square}(1+u)^{v}=e^{\lim\limits_{x\to\square}uv}$. 例如$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{2x}\right)^{x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(-\frac{1}{2x}\right)\cdot x\right]}=e^{-\frac{1}{2}}$.

真题链接

1. (2022 年广东)$\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{1}{x}}=$(　　).

A. e^{-3}　　B. $e^{-\frac{1}{3}}$

C. 1　　D. e^{3}

【答案】 A

【解析】 $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left\{[1+(-3x)]^{-\frac{1}{3x}}\right\}^{-3}=e^{-3}$.

2. (2021 年广东)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 6x}{2x}=$(　　).

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

【答案】 C

【解析】 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 6x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{6x}{2x}=3$. 故选 C.

3. (2020 年广东)设$\lim\limits_{x\to 0}[\cos x-f(x)]=1$,则下列等式正确的是(　　).

A. $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$　　B. $\lim\limits_{x\to 0}f(x)\cos x=1$

C. $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-1$　　D. $\lim\limits_{x\to 0}[f(x)+\cos x]=1$

【答案】 D

【解析】 因为$\lim\limits_{x\to 0}[\cos x-f(x)]=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$,所以$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$存在,且$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$,则$\lim\limits_{x\to 0}f(x)\cos x=0$, $\lim\limits_{x\to 0}[f(x)+\cos x]=0+1=1$. 故选 D.

4. (2019 年广东)设函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0,\\ 2, & x=0,\\ \cos x, & x>0,\end{cases}$ 则$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$(　　).

A. 等于 1　　B. 等于 2

C. 等于 1 或 2　　D. 不存在

【答案】 A

【解析】 因为 $\lim\limits_{x\to 0^{+}}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^{+}}\cos x=1$, $\lim\limits_{x\to 0^{-}}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^{-}}(x+1)=1$,所以$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$. 故选 A.

5. (2018 年广东)$\lim\limits_{x\to 0}\left(3x\sin\frac{1}{x}+\frac{\sin x}{x}\right)=$(　　).

A. 0　　B. 1

C. 3　　D. 4

【答案】 B

【解析】 $\lim\limits_{x\to 0}\left(3x\sin\dfrac{1}{x}+\dfrac{\sin x}{x}\right)=3\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=0+1=1$. 故选 B.

6.(2017 年广东)下列极限等式不正确的是(　　).

A. $\lim\limits_{n\to\infty}e^{-n}=0$　　B. $\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}}=1$

C. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2-1}=0$　　D. $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$

【答案】 C

【解析】 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{(x+1)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{2}$. 故选 C.

7.(2017 年广东)若$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x=4$,则常数 $a=$(　　).

A. $\ln 2$　　B. $2\ln 2$

C. 1　　D. 4

【答案】 B

【解析】 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a}\cdot a}=e^a=4$,所以 $a=\ln 4=2\ln 2$. 故选 B.

8.(2022 年广东)若 $x\to 0$ 时,无穷小量 $2x$ 与 $3x^2+mx$ 等价,则常数 $m=$________.

【答案】 2

【解析】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2+mx}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3}{2}x+\dfrac{m}{2}=\dfrac{m}{2}=1$,所以 $m=2$.

9.(2017 年广东)已知当 $x\to 0$ 时,$f(x)\sim 2x$,则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{f(x)}=$__________.

【答案】 3

【解析】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{f(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6x}{2x}=3$.

10.(2021 年广东)求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+3}-x)$.

【解析】 $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+3}-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x(\sqrt{x^2+3}-x)(\sqrt{x^2+3}+x)}{\sqrt{x^2+3}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x}{\sqrt{x^2+3}+x}=\dfrac{3}{2}$.

巩固练习

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=$(　　).

A. -1　　B. 0

C. 1　　D. 2

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\sqrt{x}-x}{x-1}=$(　　).

A. -1　　B. 0

C. 1　　D. $\dfrac{1}{2}$

3. 当 $x\to0$ 时，与 $\tan x$ 等价的无穷小是(　　).

A. x^2-x　　B. $1-\cos x$

C. $x^2+\sin x$　　D. $\sqrt{1+x}-1$

4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan 3x}{x\cos x}=$(　　).

A. 0　　B. 1

C. 3　　D. ∞

5. 下列等式正确的是(　　).

A. $\lim\limits_{x\to0}x\sin x=1$　　B. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-1}{3x^2-x-1}=1$

C. $\lim\limits_{x\to0}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$　　D. $\lim\limits_{x\to0}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=\infty$

6. 下列结论正确的是(　　).

A. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{2x}=\mathrm{e}$　　B. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{-x}=\mathrm{e}$

C. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{1-x}=\mathrm{e}$　　D. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{-2x}=\mathrm{e}$

7. 下列说法正确的是(　　).

A. $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=1$　　B. $\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{1}{x}=1$

C. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=1$　　D. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x}=1$

8. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos\dfrac{x}{2}}{x^2}=$____________.

9. $\lim\limits_{x\to0}\left(1-\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{3}{x}}=$____________.

10. $f(x)=\begin{cases}1-x, & x<0,\\ x^2+1, & x\geqslant0.\end{cases}$ 则 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=$____________.

11. 求下列数列的极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+2n+1}{n^2+1}$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$；　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{4}{n^2}+\cdots+\dfrac{2n}{n^2}\right)$.

12. 求下列函数的极限.

(1)$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\sin x}{\sqrt{1+x^2}-1}$;

(2)$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$;

(3)$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$;

(4)$\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x}{\sqrt{1-\cos 2x}}$;

(5)$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^x$;

(6)$\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$.

13. 已知$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+1}{n+1}-an-b\right)=1$,求实数 a,b 的值.