

13. 求不定积分 $\int \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} dx$.

14. 求曲线 $y=\sqrt{x}$ 与直线 $x=1, x=4, y=0$ 所围成的图形的面积和该图形绕 y 轴旋转产生的旋转体的体积.

15. 设 $k>0$, 求函数 $f(x)=\ln(1+x)+kx^2-x$ 的极值点, 并判断是极大值点还是极小值点.

16. 求二重积分 $\iint_D x^2 dx dy$, 区域 D 为 $2 \leq x^2 + y^2 \leq 4$.

17. 设函数 $z=f(x^2+y^2, y \sin x)$, f 具有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

18. 设 x_n 是 $x^n + nx - 1 = 0$ 在 $(0, 1)$ 内的根, 证明: 当 $a > 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^a$ 收敛.

四、综合题(本大题共 2 小题,第 19 题 10 分,第 20 题 12 分,共 22 分)

19. 设函数 $f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2$, 证明:

(1) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 是比 x 高阶的无穷小量;

(2) 当 $x > 0$ 时, $f(x) > 0$.

20. 设二元函数 $z = f(x, y) = x^y \ln x (x > 0, x \neq 1)$, 平面区域 $D = \{(x, y) \mid 2 \leq x \leq e, -1 \leq y \leq 1\}$.

(1) 求全微分 dz ;

(2) $\iint_D f(x, y) d\sigma$.

考前冲刺试卷(二)

一、单项选择题(本大题共 5 小题,每小题 3 分,共 15 分.每小题只有一个选项符合题目要求)

1. 函数 $f(x) = \sqrt{x-3} + \arctan \frac{1}{x}$ 的定义域是().

- A. $(-\infty, +\infty)$ B. $[0, 3]$
C. $(-\infty, 0) \cup (0, 3)$ D. $[3, +\infty)$

2. 设 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1+a)x^4 + bx^3 + 2}{x^3 + x^2 - 1} = -2$, 则 a, b 的值分别为().

- A. $a = -3, b = 0$ B. $a = -1, b = -2$
C. $a = 0, b = -2$ D. $a = -1, b = 0$

3. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \tan \frac{\pi}{n^3}$ ().

- A. 绝对收敛 B. 条件收敛
C. 发散 D. 敛散性不能确定

4. 下列关系式不正确的是().

- A. $d\left[\int f(x) dx\right] = f(x) dx$ B. $\int f'(x) dx = f(x) + C$
C. $\frac{d}{dx} \int f(x) dx = f'(x)$ D. $\left[\int f(x) dx\right]' = f(x)$

5. 交换二次积分次序后, $\int_1^e dy \int_0^{\ln y} f(x, y) dx$ 为().

- A. $\int_0^1 dx \int_{e^x}^e f(x, y) dy$ B. $\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x, y) dy$
C. $\int_1^e dx \int_0^{e^x} f(x, y) dy$ D. $\int_0^1 dx \int_0^{e^x} f(x, y) dy$

二、填空题(本大题共 5 小题,每小题 3 分,共 15 分)

6. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x + e^{2ax} - 1}{x}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则 $a =$ _____.

7. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_0^1 e^t dt}{x^2 - 1} =$ _____.

8. 曲线 $\begin{cases} x = t^3, \\ y = e^t \end{cases}$ 在 $t=1$ 处的切线方程是_____.

9. 设函数 $z = f(x+y, y^2)$, f 具有连续偏导数, 则全微分 $dz =$ _____.

10. 微分方程 $y'' - 4y' + 4y = 0$ 的通解为_____.

三、计算题(本大题共 8 小题,每小题 6 分,共 48 分)

11. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x - \tan x}$.

12. 求不定积分 $\int \frac{\sin^2 x \cos x}{1 + 4 \sin^2 x} dx$.

13. 设函数 $\begin{cases} e^x, & x < 0, \\ 1 + \sin x, & x \geq 0, \end{cases}$ 计算定积分 $\int_{\frac{1}{2}}^2 f(1-x) dx$.

14. 求 $f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + 2x - 3xy + \frac{3}{2}y^2$ 的极值.

15. 计算 $\iint_D \frac{3x}{y^2} dx dy$, 其中 D 是由 $xy=1, y=x$ 及 $x=2$ 围成的闭区域.

16. 求微分方程 $2ydy - (1 + \cos x)(1 + y^2)dx = 0$ 满足初始条件 $y|_{x=0} = 0$ 的特解.

17. 设 $z = z(x, y)$ 是由方程 $yz + zx + xy = 1$ 确定的隐函数, 试求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

18. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + \ln n}$ 是否收敛, 若收敛, 则判断是条件收敛还是绝对收敛.

四、综合题(本大题共 2 小题,第 19 题 10 分,第 20 题 12 分,共 22 分)

19. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} (1+3x^2)^{\frac{1}{2}} \sin 3x + 1, & x \neq 0, \\ a, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续.

- (1) 求常数 a 的值;
- (2) 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, a)$ 处的切线方程.

20. 设图形 D 由曲线 $y=x^2+1$ 与其在点 $(1, 2)$ 处的切线及 y 轴所围成.

- (1) 求该图形的面积;
- (2) 求该图形绕 x 轴旋转一周所生成的旋转体体积.

13. 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $e^{x^2 y}=x-y$ 所确定, 求 y' .

14. 设函数 $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{1+\cos x}, & -\pi < x < 0, \\ xe^{-x^2}, & x \geq 0, \end{cases}$ 计算定积分 $\int_{-2}^2 f(x)dx$.

15. 求不定积分 $\int \frac{x-3}{x^2+1} dx$.

16. 计算 $\iint_D (x^2+y^2) dx dy$, 区域 D 为圆 $x^2+(y-1)^2=1$ 所围成的 y 轴右半部分.

17. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin \frac{2n\pi}{3}}{2^n}$ 的敛散性.

18. 已知函数 $z=x \sin \frac{y}{x}$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

四、综合题(本大题共 2 小题,第 19 题 10 分,第 20 题 12 分,共 22 分)

19. 交换二次积分 $I = \int_0^1 dx \int_{e^x}^e \frac{(2x+1)(2y+1)}{\ln y+1} dy$ 的积分次序,并求 I 的值.

20. 已知 $f(x)$ 是定义在区间 $[0, +\infty)$ 上的非负可导函数,且曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=0, x=0$ 及 $x=t(t \geq 0)$ 围成的曲边梯形面积为 $f(t)-t^2$.

(1) 求函数 $f(t)$;

(2) 证明:当 $x > 0$ 时, $f(x) > x^2 + \frac{x^3}{3}$.

13. 求定积分 $\int_1^5 e^{\sqrt{2x-1}} dx$.

14. 求微分方程 $y' + y = e^x + x$ 的通解.

15. 已知函数 $z = f(u, v)$ 可微, $u = x \arcsin y, v = \frac{y}{x}$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

16. 计算二重积分 $I = \iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy$, 其中 D 是由 $xy=1, x=2, y=x$ 所围成的封闭区域.

17. 设 $k > 0$, 求函数 $f(x) = 2\ln(1+x) + kx^2 - 2x$ 的极值点, 并判断是极大值点还是极小值点.

18. 求由直线 $x=0, x=2, y=0$ 和曲线 $y=e^x$ 所围成的图形绕 x 轴旋转一周所成的旋转体的体积.

四、综合题(本大题共 2 小题,第 19 题 10 分,第 20 题 12 分,共 22 分)

19. 已知曲线 C 上任意一点 $P(x, y)$ ($x \neq 0$) 处的切线斜率与直线 OP (O 为坐标原点) 的斜率之差等于 ax (常数 $a > 0$).

(1) 求曲线 C 的方程;

(2) 试确定 a 的值, 使曲线 C 与直线 $y = ax$ 围成的平面图形的面积等于 $\frac{8}{3}$.

20. 若当 $x \rightarrow 0$ 时, 函数 $f(x) = \int_0^x 2^{t^3-3t+a} dt$ 与 x 是等价无穷小量.

(1) 求常数 a 的值;

(2) 证明: $\frac{1}{2} \leq f(2) \leq 8$.

考前冲刺试卷(五)

一、单项选择题(本大题共 5 小题,每小题 3 分,共 15 分. 每小题只有一个选项符合题目要求)

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时,无穷小 $\tan 2x$ 是 x 的().
 A. 高阶无穷小
 B. 低阶无穷小
 C. 等价无穷小
 D. 同阶非等价无穷小
2. 函数 $y = xe^x$ 的拐点为().
 A. $(-2, -2e^{-2})$
 B. $(-1, -e^{-1})$
 C. $(0, 0)$
 D. $x = -2$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2\sin x)^{\frac{2}{\sin x}} =$ ().
 A. e
 B. e^2
 C. e^4
 D. 1
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ 的和为().
 A. 0
 B. 1
 C. 2
 D. 3
5. $y'' + 2y' + y = 0$ 的通解为().
 A. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$
 B. $y = (C_1 + C_2 x) e^x$
 C. $y = (C_1 + C_2 x) e^{-x}$
 D. $y = C_1 + C_2 e^{-x}$

二、填空题(本大题共 5 小题,每小题 3 分,共 15 分)

6. $\int_{-1}^1 (2\sin x^5 + 3) dx =$ _____.
7. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 3x+2, & x > 0, \\ 2a, & x \leq 0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续,则常数 $a =$ _____.
8. 已知 $f'(x_0) = -1$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 2x) - f(x_0 - x)}{x} =$ _____.
9. 直线 $x=4, y=0$ 与曲线 $y = \sqrt{x}$ 所围成的平面图形的面积 $S =$ _____.
10. 已知函数 $f(x, y)$ 在 \mathbf{R} 连续, 设 $I = \int_0^1 dx \int_0^{1-\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y) dy$, 交换积分次序后 $I =$ _____.

三、计算题(本大题共 8 小题,每小题 6 分,共 48 分)

11. 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+2}{x-1} - x \right)$.

12. 求不定积分 $\int x^2 \ln x dx$.

13. 函数 $y=(1+2x)^{\sin x}$, 求 y'

14. 求定积分 $\int_1^{\sqrt{2}} x \sqrt{x^2-1} dx$.

15. 已知函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $e^{x-y} \cdot \sin(x+z)=0$ 所确定, 求 dz .

16. 求 $\iint_D x^2 e^{-y^2} dx dy$, D 由直线 $y=x, y=1$ 及 $x=0$ 所围成.

17. 求曲线 $y=\sin x \left(\frac{\pi}{4} < x < \pi\right)$, $y=\cos x \left(\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$ 与 x 轴所围成图形的面积.

18. 求一阶微分方程 $y' + 3x^2 y = e^{-x^3}$ 的通解.

四、综合题(本大题共 2 小题,第 19 题 10 分,第 20 题 12 分,共 22 分)

19. 过坐标原点作曲线 $y = e^x$ 的切线 l , 切线 l 与曲线 $y = e^x$ 及 y 轴围成的平面图形记为 G . 求:

- (1) 切线 l 的方程;
- (2) G 的面积;
- (3) G 围绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

20. 若定义在区间 $(0, \pi)$ 内的可导函数 $y = f(x)$ 满足 $x \cdot y' = (x \cdot \cot x - 1) \cdot y$, 且 $y \Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$.

- (1) 求函数 $y = f(x)$ 的表达式;
- (2) 证明: 函数 $y = f(x)$ 在区间 $(0, \pi)$ 内单调递减.