第二章　一元函数微分学

本章知识串讲

第一节　导数与微分

知识脉络

- 导数与微分
  - 函数的导数
    - 导数的定义
    - 单侧导数
    - 函数可导性与连续性的关系
    - 导数的几何意义
  - 函数的求导法则
    - 函数的和、差、积、商的求导法则
    - 复合函数的求导法则
    - 隐函数的求导法则
    - 由参数方程所确定的函数的导数
  - 高阶导数
    - 高阶导数的定义
    - 隐函数和由参数方程所确定的函数的二阶导数
  - 函数的微分
    - 微分的定义与运算法则
    - 高阶微分
    - 一阶微分的形式不变性

知识精讲

一、函数的导数

1. 导数的定义

定义 1　设函数 $y=f(x)$在点 x_0 的某个邻域内有定义，自变量 x 在 x_0 处给定一个增量 Δx(Δx 可正可负)，相应地因变量 y 取得增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$. 若当 $\Delta x\to 0$ 时，Δy 与 Δx 之比的极限，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称 $y=f(x)$在点 x_0 处可导，并称此极限值为函数 $y=f(x)$在点 x_0 处的导数，记为 $f'(x_0)$，$f'\big|_{x=x_0}$，$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$或者$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$.

若极限$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$不存在，则称函数 $y=f(x)$在点 x_0 处不可导.

导数定义中的极限也可取不同的形式，常见的有

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

和

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

若函数 $y=f(x)$在区间(a,b)内每点处都有导数，则称函数 $y=f(x)$在区间(a,b)内可导. 此时，对任意 $x\in(a,b)$，都有唯一确定的导数 $f'(x)$与之对应. 这样就构成了一个函数，称这个函数为函数 $y=f(x)$的导函数，简称导数，记作 y'，$f'(x)$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$或者$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$.

例题 2.1.1　设 $f'(x_0)$，$f'(0)$均存在，以下四式中错误的一项是(　　).

A. $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

B. $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

C. $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

D. $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$

解析　$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$，当 $f(0)\neq 0$ 时，$f'(0)\neq\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$，D 项错误.

例题 2.1.2　求下列函数的导数.

(1)$f(x)=C$；　　(2)$f(x)=x^2$；　　(3)$f(x)=\mathrm{e}^x$.

解析 (1)对任意 $x\in\mathbf{R}$,有 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{C-C}{\Delta x}=0$,所以 $f'(x)=0$.

(2)对任意 $x\in\mathbf{R}$,有 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x(2x+\Delta x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x$,所以 $f'(x)=2x$.

(3)对任意 $x\in\mathbf{R}$,有 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{e^{x+\Delta x}-e^x}{\Delta x}=e^x\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}=e^x\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta x}=e^x$,所以 $f'(x)=e^x$.

如下是基本初等函数的导数,需要熟记.

(1) $(C)'=0$(C 为常数);

(2) $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}(\alpha\in\mathbf{R})$;

(3) $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}(a>0,a\neq 1)$;

(4) $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$;

(5) $(a^x)'=a^x\ln a(a>0,a\neq 1)$;

(6) $(e^x)'=e^x$;

(7) $(\sin x)'=\cos x$;

(8) $(\cos x)'=-\sin x$;

(9) $(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$;

(10) $(\cot x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}=-\csc^2 x$;

(11) $(\sec x)'=\sec x\tan x$;

(12) $(\csc x)'=-\csc x\cot x$;

(13) $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

(14) $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

(15) $(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$;

(16) $(\operatorname{arccot} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$.

2. 单侧导数

定义 2 设函数 $y=f(x)$在点 x_0 处及其左侧有定义.若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在,则称此极限值为函数 $y=f(x)$在点 x_0 处的左导数,记为 $f'_-(x_0)$.

定义 3 设函数 $y=f(x)$在点 x_0 处及其右侧有定义.若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在,则称此极限值为函数 $y=f(x)$在点 x_0 处的右导数,记为 $f'_+(x_0)$.

定理 1 函数 $y=f(x)$在点 x_0 处可导的充要条件是,$f'_-(x_0)$与 $f'_+(x_0)$都存在且相等.

例题 2.1.3 判断函数 $f(x)=|x|$在 $x=0$ 处的导数是否存在.

解析 左导数

$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}=-\frac{\Delta x}{\Delta x}=-1,$$

右导数

$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}=\frac{\Delta x}{\Delta x}=1.$$

因为 $f'_-(0)\neq f'_+(0)$,所以 $f(x)=|x|$在 $x=0$ 处的导数不存在.

例题 2.1.4　已知函数 $f(x)=\begin{cases}\ln(1+x), & -1<x\leqslant 0,\\ e^x-1, & 0<x<1,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处(　　).

A. 无极限　　　　B. 有极限但不连续

C. 连续但不可导　　　　D. 可导

解析　因为 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\ln(1+x)=0$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(e^x-1)=0$，$f(0)=\ln(1+0)=0$，所以 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$，从而 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 因为 $f'_-(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{\ln(1+\Delta x)}{\Delta x}=1$，$f'_+(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}=1$，所以 $f'_-(0)=f'_+(0)=1$，从而 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f'(0)=1$. 故本题选 D.

3. 函数可导性与连续性的关系

若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，则有 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$，于是 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim\limits_{x\to x_0}(x-x_0)+f(x_0)=f(x_0)$，即函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续. 反之，函数在某点处连续，却不一定在该点处可导. 例如，函数 $f(x)=|x|$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，但在 $x=0$ 处的导数不存在.

综上所述，函数在某点处连续是在该点处可导的必要不充分条件.

例题 2.1.5　设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ 2x-1, & 1<x\leqslant 4,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处(　　).

A. 可导但导函数不连续　　　　B. 可导且导函数连续

C. 连续但不可导　　　　D. 不连续

解析　由题意知，$f(x)$ 在 $x=1$ 处左连续，且 $f(1)=1$，$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(2x-1)=1$，所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续. 因为 $f'_-(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{(1+\Delta x)^2-1}{\Delta x}=2$，$f'_+(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{[2(1+\Delta x)-1]-1}{\Delta x}=2$，所以 $f'(1)=2$. 又由题意可知，$f'(x)=\begin{cases}2x, -1<x<1,\\ 2, 1<x<4,\end{cases}$ 所以 $\lim\limits_{x\to 1^-}f'(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}2x=2=\lim\limits_{x\to 1^+}2=\lim\limits_{x\to 1^+}f'(x)$，即 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导且导函数连续. 故本题选 B.

例题 2.1.6　设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x\leqslant 1,\\ ax+b, & x>1,\end{cases}$ 若要使 $f(x)$ 为可导函数，应如何选择 a,b?

解析　当 $x>1$ 和 $x<1$ 时，$f(x)$ 显然是可导的，故要使 $f(x)$ 为可导函数，只需使其在点 $x=1$ 处可导即可. 为此，应先选择 a,b 使其在点 $x=1$ 处连续.

因为 $f(1)=2$，$\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+1)=2$，$\lim\limits_{x\to 1^+}(ax+b)=a+b$，所以 $a+b=2$. 又

$$f'_-(1)=\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2+1-2}{x-1}=2;$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{ax+b-2}{x-1}=a,$$

而要使 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处可导，必须使 $f'_-(1)=f'_+(1)$，所以 $a=2$，从而 $b=0$.

4. 导数的几何意义

函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 就是曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_0,f(x_0))$ 处切线的斜率，应用直线的点斜式方程，可知曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_0,f(x_0))$ 处切线方程为

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0).$$

过切点 $M(x_0,f(x_0))$ 且与切线垂直的直线叫作曲线 $y=f(x)$ 在点 M 处的法线. 如果 $f'(x_0)\neq0$，那么曲线 $y=f(x)$ 在点 M 处的法线斜率为 $-\frac{1}{f'(x_0)}$，从而法线方程为

$$y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0).$$

例题 2.1.7　求曲线 $y=x^2$ 在点 $(-1,1)$ 处的切线方程和法线方程.

解析　根据导数的几何意义，曲线 $y=x^2$ 在点 $(-1,1)$ 处的切线的斜率为

$$y'|_{x=-1}=\lim_{x\to-1}\frac{x^2-1}{x+1}=\lim_{x\to-1}(x-1)=-2,$$

所以曲线 $y=x^2$ 在点 $(-1,1)$ 处的切线方程为

$$y-1=-2(x+1),$$

法线方程为

$$y-1=\frac{1}{2}(x+1).$$

二、函数的求导法则

1. 函数的和、差、积、商的求导法则

如果 $f(x)$，$g(x)$ 都在点 x 处可导，那么它们的和、差、积、商（除分母为零的点外）都在点 x 处可导，并且

(1) $[f(x)\pm g(x)]'=f'(x)\pm g'(x)$；

(2) $[f(x)g(x)]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$；

(3) $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

例题 2.1.8　求下列函数的导数.

(1) $y=x\ln x+\frac{1}{x}+1$；　　(2) $y=\frac{\ln x}{x}+\arcsin x$.

解析 (1) $\left(x\ln x+\frac{1}{x}+1\right)'=(x\ln x)'+\left(\frac{1}{x}\right)'+(1)'=(x)'\ln x+x(\ln x)'-\frac{1}{x^2}+0=\ln x+1-\frac{1}{x^2}$.

(2) $\left(\frac{\ln x}{x}+\arcsin x\right)'=\left(\frac{\ln x}{x}\right)'+(\arcsin x)'=\frac{x(\ln x)'-(x)'\ln x}{x^2}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1-\ln x}{x^2}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

2. 复合函数的求导法则

如果 $u=g(x)$在点 x 处可导，$y=f(u)$在点 $u=g(x)$处可导，那么复合函数 $y=f(g(x))$在点 x 处可导，并且

$$[f(g(x))]'=f'(u)g'(x).$$

复合函数的求导法则也叫作链式法则，这个法则可以推广至任意有限个函数的情形.

例题 2.1.9　求下列函数的导数.

(1) $y=\sin x^2$；　(2) $y=\sin^2 x$.

解析 (1) $y=\sin x^2$ 可以看成是 $y=\sin u$ 与 $u=x^2$ 的复合，因此

$$(\sin x^2)'=(\sin u)'\cdot(x^2)'=2x\cos x^2.$$

(2) $y=\sin^2 x$ 可以看成是 $y=u^2$ 与 $u=\sin x$ 的复合，因此

$$(\sin^2 x)'=(u^2)'\cdot(\sin x)'=2\sin x\cos x=\sin 2x.$$

例题 2.1.10　求下列函数的导数.

(1) $y=\ln\cos(e^x)$；　(2) $y=\cos(\ln\sqrt{2x})$.

解析 (1) $y=\ln\cos(e^x)$可以看成是 $y=\ln u, u=\cos v, v=e^x$ 的复合，因此

$$[\ln\cos(e^x)]'=(\ln u)'\cdot(\cos v)'\cdot(e^x)'=\frac{-e^x\sin(e^x)}{\cos(e^x)}=-e^x\tan(e^x).$$

(2) $y=\cos(\ln\sqrt{2x})$可以看成是 $y=\cos u, u=\ln v, v=\sqrt{w}, w=2x$ 的复合，因此

$$[\cos(\ln\sqrt{2x})]'=(\cos u)'\cdot(\ln v)'\cdot(\sqrt{w})'\cdot(2x)'=-\frac{\sin(\ln\sqrt{2x})}{2x}.$$

3. 隐函数的求导法则

设 $y=f(x)$是由隐函数 $F(x,y)=0$ 确定的函数，则有 $F(x,f(x))=0$，即得到一个关于 x 的方程. 由于这个方程左端是将 $y=f(x)$带入 $F(x,y)=0$ 所得到的复合函数，所以根据复合函数的求导法则将方程两边对 x 求导数便得到一个 y'满足的恒等式，从中即可解出 y'.

例题 2.1.11　求由方程 $e^y=x\sin y$ 所确定的隐函数的导数.

解析 方程两边对 x 求导数，得

$$e^y y'=\sin y+xy'\cos y,$$

解得

$$y'=\frac{\sin y}{e^y-x\cos y}.$$

例题 2.1.12　求双曲线$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$在点$(4\sqrt{2},3)$处的切线方程和法线方程.

解析　方程两边对 x 求导数,得

$$\frac{x}{8}-\frac{2yy'}{9}=0,$$

解得

$$y'=\frac{9x}{16y}.$$

于是

$$y'\big|_{x=4\sqrt{2}}=\frac{9\times 4\sqrt{2}}{16\times 3}=\frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

故所求切线方程为

$$y-3=\frac{3\sqrt{2}}{4}(x-4\sqrt{2}),$$

法线方程为

$$y-3=-\frac{2\sqrt{2}}{3}(x-4\sqrt{2}).$$

对于一些比较复杂的函数求导数,若从显函数出发来求比较复杂或不好求,这时可转化为隐函数来求导数,常用的方法是对数求导法,即函数 $y=f(x)$两边同时取对数,再用隐函数的求导法则计算导数.

例题 2.1.13　求下列函数的导数.

(1)$y=x^x$;　　(2)$y=\sqrt{\frac{x(x-1)}{(x-2)(x-3)}}$.

解析　(1)方程两边取对数,得

$$\ln y=x\ln x,$$

上式两边对 x 求导数,得

$$\frac{y'}{y}=\ln x+1,$$

于是

$$y'=y(\ln x+1)=x^x\ln x+x^x.$$

(2)方程两边取对数,得

$$\ln y=\frac{1}{2}[\ln x+\ln(x-1)-\ln(x-2)-\ln(x-3)],$$

上式两边对 x 求导数,得

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}\right],$$

于是

$$\begin{aligned}y'&=\frac{y}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}\right)\\&=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x(x-1)}{(x-2)(x-3)}}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}\right).\end{aligned}$$

例题 2.1.14 求方程 $x=e^{\frac{x-y}{y}}$ 所确定的隐函数的导数.

解析 方程两边取对数，得

$$\ln x=\frac{x-y}{y},$$

求导得

$$\frac{1}{x}=\frac{(1-y')y-(x-y)y'}{y^2},$$

整理得

$$y'=\frac{xy-y^2}{x^2}.$$

4. 由参数方程所确定的函数的导数

一般地，如果参数方程 $\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t)\end{cases}$ $(\alpha<t<\beta)$ 确定 y 与 x 之间的函数关系，则称此函数关系式所表达的函数为由参数方程所确定的函数.

对于参数方程所确定的函数的导数，通常不需要由参数方程消去参数，化为 y 与 x 之间的函数关系后再求导.

设 $y=f(x)$ 是由参数方程 $\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t)\end{cases}$ $(\alpha<t<\beta)$ 所确定的函数，若 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 都可导，且 $\varphi'(t)\neq 0$，则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

例题 2.1.15 参数方程 $\begin{cases}x=\ln(1+t^2),\\ y=t-\arctan t\end{cases}$ 所确定的函数的导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$________.

解析 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{(t-\arctan t)'}{[\ln(1+t^2)]'}=\frac{1-\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{t}{2}.$$

例题 2.1.16 求椭圆 $\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=b\sin t\end{cases}$ $(0\leqslant t<2\pi)$ 在点 $\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ 处切线的斜率.

解析 椭圆上的点 $\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ 对应的参数为 $t=\frac{\pi}{4}$，因此，所求切线的斜率为

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\left.\frac{(b\sin t)'}{(a\cos t)'}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\left.\frac{b\cos t}{-a\sin t}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=-\frac{b}{a}.$$

三、高阶导数

1. 高阶导数的定义

一般地，函数 $y=f(x)$ 的（一阶）导数 $y'=f'(x)$ 仍是 x 的函数. 如果 $y'=f'(x)$ 的导数 $[f'(x)]'$ 存在，那

么称$[f'(x)]'$为函数$y=f(x)$的二阶导数，记为$f''(x)$，y''，$\frac{d^2y}{dx^2}$或$\frac{d^2f(x)}{dx^2}$.

类似地，二阶导数的导数称为三阶导数，记为$f'''(x)$，y'''，$\frac{d^3y}{dx^3}$或$\frac{d^3f(x)}{dx^3}$；三阶导数的导数称为四阶导数，记为$f^{(4)}(x)$，$y^{(4)}$，$\frac{d^4y}{dx^4}$或$\frac{d^4f(x)}{dx^4}$. 一般地，$y=f(x)$的$n-1$阶导数的导数称为n阶导数，记为$f^{(n)}(x)$，$y^{(n)}$，$\frac{d^ny}{dx^n}$或$\frac{d^nf(x)}{dx^n}$.

例题 2.1.17　设$f(x)=\ln(1+x^2)$，则$f''(0)=$(　　).

A. 0　　B. 1

C. 2　　D. 3

解析　$f(x)=\ln(1+x^2)$，则$f'(x)=\frac{2x}{1+x^2}$，从而$f''(x)=\frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2}$，于是$f''(0)=2$. 故本题选 C.

例题 2.1.18　求下列函数的n阶导数.

(1)$f(x)=x^n$；

(2)$f(x)=\frac{1}{x}$；

(3)$f(x)=e^x$.

解析　(1)$f(x)=x^n$，则$f'(x)=nx^{n-1}$，$f''(x)=n(n-1)x^{n-2}$，…，$f^{(n)}(x)=n(n-1)(n-2)\cdots 1x^0=n!$.

(2)$f(x)=\frac{1}{x}=x^{-1}$，则$f'(x)=-x^{-2}$，$f''(x)=1\cdot 2x^{-3}$，…，$f^{(n)}(x)=(-1)^n n!x^{-(n+1)}$.

(3)$f(x)=e^x$，则$f'(x)=f''(x)=\cdots=f^{(n)}(x)=e^x$.

例题 2.1.19　已知函数$f(x)=\sin 2x+x^5+3x^4-2x+1$，则$f^{(5)}(x)=$(　　).

A. $2^5\cos 2x$　　B. $2^5\cos 2x+5!$

C. $2^5\sin 2x$　　D. $2^5\sin 2x+5!$

解析　根据求导法则，$f^{(5)}(x)=(\sin 2x)^{(5)}+(x^5)^{(5)}+(3x^4)^{(5)}-(2x)^{(5)}+(1)^{(5)}$. 由上例知，$(x^5)^{(5)}=5!$，$(3x^4)^{(5)}=(2x)^{(5)}=(1)^{(5)}=0$，又$(\sin 2x)^{(5)}=2^5\cos 2x$，所以$f^{(5)}(x)=2^5\cos 2x+5!$. 故本题选 B.

2. 隐函数和由参数方程所确定的函数的二阶导数

1)隐函数的二阶导数

一般地，隐函数$F(x,y)=0$的(一阶)导数y'也是由隐函数确定的，这个新隐函数对x求导，即可得到一个x,y,y'与y''的关系式，其中y'可以由x,y表示，由此可以解出y''，即得到隐函数$F(x,y)=0$的二阶导数.

例题 2.1.20　求由方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(y\geqslant 0)$所确定的隐函数的二阶导数.

解析 方程两边对 x 求导，得

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2yy'}{b^2}=0,$$

于是

$$y'=-\frac{b^2x}{a^2y}.$$

上式两边再对 x 求导，得

$$y''=\frac{b^2xy'-b^2y}{a^2y^2}=\frac{b^2x\cdot\left(-\frac{b^2x}{a^2y}\right)-b^2y}{a^2y^2}=-\frac{b^4\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}{a^2y^3}=-\frac{b^4}{a^2y^3}.$$

例题 2.1.21 求由方程 $y+\arctan y=x$ 所确定的隐函数的二阶导数.

解析 方程两边对 x 求导，得

$$y'+\frac{y'}{1+y^2}=1,$$

于是

$$y'=\frac{1+y^2}{2+y^2}.$$

上式两边再对 x 求导，得

$$y''=\frac{2yy'}{(2+y^2)^2}=\frac{2y\cdot\left(\frac{1+y^2}{2+y^2}\right)}{(2+y^2)^2}=\frac{2y(1+y^2)}{(2+y^2)^3}.$$

例题 2.1.22 求方程 $x=\mathrm{e}^{\frac{x-y}{y}}$ 所确定的隐函数的二阶导数.

解析 方程 $x=\mathrm{e}^{\frac{x-y}{y}}$ 等号两边取对数，得

$$\ln x=\frac{x-y}{y},$$

求导得

$$\frac{1}{x}=\frac{(1-y')y-(x-y)y'}{y^2},$$

整理得

$$y'=\frac{xy-y^2}{x^2}.$$

上式两边再对 x 求导，得

$$y''=\frac{(y+xy'-2yy')x^2-2x(xy-y^2)}{x^4}=\frac{(xy'-y)(x-2y)}{x^3},$$

将 $y'=\frac{xy-y^2}{x^2}$ 代入上式，整理得

$$y''=-\frac{y^2(x-2y)}{x^4}.$$

2)由参数方程所确定的函数的二阶导数

与隐函数的二阶导数类似,由参数方程所确定的函数的(一阶)导数 y'是关于 t 的函数,对 y'与 x 应用由参数方程所确定的函数的求导法则,即可得到 y''.

例题 2.1.23　求由参数方程$\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=b\sin t\end{cases}$所确定的函数的二阶导数.

解析 根据由参数方程所确定的函数的导数公式,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{(b\sin t)'}{(a\cos t)'}=-\frac{b}{a}\cot t,$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x}=\frac{\left(-\frac{b}{a}\cot t\right)'}{(a\cos t)'}=\frac{\frac{b}{a}\cdot\frac{1}{\sin^2 t}}{-a\sin t}=-\frac{b}{a^2\sin^3 t}.$$

例题 2.1.24　求由参数方程$\begin{cases}x=3\mathrm{e}^{-t},\\ y=2\mathrm{e}^{t}\end{cases}$所确定的函数的二阶导数.

解析 根据由参数方程所确定的函数的导数公式,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{(2\mathrm{e}^t)'}{(3\mathrm{e}^{-t})'}=-\frac{2}{3}\mathrm{e}^{2t},$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x}=\frac{\left(-\frac{2}{3}\mathrm{e}^{2t}\right)'}{(3\mathrm{e}^{-t})'}=\frac{-\frac{4}{3}\mathrm{e}^{2t}}{-3\mathrm{e}^{-t}}=\frac{4}{9}\mathrm{e}^{3t}.$$

例题 2.1.25　已知$\begin{cases}x(t)=a(\cos t+t\sin t),\\ y(t)=a(\sin t-t\cos t),\end{cases}$求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$和$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解析 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{(a(\sin t-t\cos t))'}{(a(\cos t+t\sin t))'}=\frac{at\sin t}{at\cos t}=\tan t,$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x}=\frac{(\tan t)'}{(a(\cos t+t\sin t))'}=\frac{1}{at\cos^3 t}.$$

四、函数的微分

1. 微分的定义与运算法则

定义 4　设函数 $y=f(x)$在点 x_0 的某个邻域内有定义.若存在某个常数 A,使得当 $\Delta x\to 0$ 时,

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+o(\Delta x),$$

则称 $y=f(x)$在点 x_0 处可微,并称 $A\Delta x$ 为 $y=f(x)$在点 x_0 处的微分,记为 $\mathrm{d}y$ 或 $\mathrm{d}f(x_0)$.

定理 2　函数 $y=f(x)$在点 x_0 处可微的充要条件是 $y=f(x)$在点 x_0 处可导,并且在可导时 $\mathrm{d}y=f'(x_0)\mathrm{d}x$.

函数 $y=f(x)$ 在任意一点 x 的微分，称为函数的微分，记作 $\mathrm{d}y$ 或 $\mathrm{d}f(x)$，即 $\mathrm{d}y=f'(x)\Delta x$. 为了统一记号，通常把自变量 x 的增量称为自变量的微分，记为 $\mathrm{d}x$，于是函数 $y=f(x)$ 的微分又可记为 $\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$.

例题 2.1.26　设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的自变量的改变量为 Δx，相应的函数改变量为 Δy，$o(\Delta x)$ 表示 Δx 的高阶无穷小. 若函数 $y=f(x)$ 在 x_0 可微，则下列表述不正确的是(　　).

A. $\Delta y=f'(x_0)\mathrm{d}x$　　B. $\mathrm{d}y=f'(x_0)\mathrm{d}x$

C. $\Delta y=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x)$　　D. $\Delta y=\mathrm{d}y+o(\Delta x)$

解析　若 $y=f(x)$ 在 x_0 可微，则有 $\Delta y=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x)$，其中 $f'(x_0)\Delta x=f'(x_0)\mathrm{d}x=\mathrm{d}y$. 故本题选 A.

例题 2.1.27　设函数 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，则 $\mathrm{d}y=$________.

解析　因为 $y'=[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]'=\dfrac{1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$，所以 $\mathrm{d}y=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$.

根据导数与微分的关系，可以得到：

(1)$\mathrm{d}(f+g)=\mathrm{d}f+\mathrm{d}g$；

(2)$\mathrm{d}(f\cdot g)=g\mathrm{d}f+f\mathrm{d}g$；

(3)$\mathrm{d}\left(\dfrac{f}{g}\right)=\dfrac{g\mathrm{d}f-f\mathrm{d}g}{g^2}$.

例题 2.1.28　求 $y=x^2\ln x+x\cos x$ 的微分.

解析
$$\begin{aligned}\mathrm{d}y&=\mathrm{d}(x^2\ln x+x\cos x)=\mathrm{d}(x^2\ln x)+\mathrm{d}(x\cos x)\\&=\ln x\mathrm{d}(x^2)+x^2\mathrm{d}(\ln x)+\cos x\mathrm{d}(x)+x\mathrm{d}(\cos x)\\&=(2x\ln x+x+\cos x-x\sin x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

2. 高阶微分

若函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内可微，则有 $\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$，其中 $f'(x)$ 是 x 的函数，而 $\mathrm{d}x$ 是与 x 无关的一个量. 把一阶微分 $\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$ 看成 x 的函数，再求一次微分 $\mathrm{d}(\mathrm{d}y)$，就称为 $y=f(x)$ 的二阶微分，记为 d^2y，即

$$\mathrm{d}^2y=\mathrm{d}(\mathrm{d}y)=(f'(x)\mathrm{d}x)'\mathrm{d}x=f''(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}x=f''(x)\mathrm{d}x^2,$$

其中 $\mathrm{d}x^2=\mathrm{d}x\mathrm{d}x$(需要注意 $\mathrm{d}x^2\neq\mathrm{d}(x^2)=2x\mathrm{d}x$).

一般地，定义 n 阶微分为

$$\mathrm{d}^ny=\mathrm{d}(\mathrm{d}^{n-1}y)=(f^{(n-1)}(x)\mathrm{d}x^{n-1})'\mathrm{d}x=f^{(n)}(x)\mathrm{d}x^{n-1}\mathrm{d}x=f^{(n)}(x)\mathrm{d}x^n.$$

3. 一阶微分的形式不变性

根据复合函数的求导法则，设 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 都可导，则复合函数 $y=f(g(x))$ 的微分为

$$\mathrm{d}y=f'(u)g'(x)\mathrm{d}x.$$

注意到 $g'(x)\mathrm{d}x=\mathrm{d}u$，所以

$$\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u.$$

从形式上看，$\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$ 与 $\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u$ 是一样的，即无论是中间变量还是自变量，一阶微分在形式上是不变的，这就是一阶微分的形式不变性.

例题 2.1.29　设函数 $y=1+xe^y$，则 $\mathrm{d}y=$________.

解析　根据一阶微分的形式不变性，在题中等式两边求微分，得

$$\mathrm{d}y=e^y\mathrm{d}x+xe^y\mathrm{d}y,$$

于是

$$\mathrm{d}y=\frac{e^y}{1-xe^y}\mathrm{d}x.$$

利用一阶微分的形式不变性也可以计算隐含数的导数.

例题 2.1.30　求由函数 $e^{x+y}=y\sin x$ 所确定的隐函数的导数.

解析　方程两边求微分，得

$$e^{x+y}(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)=\sin x\mathrm{d}y+y\cos x\mathrm{d}x,$$

于是

$$(e^{x+y}-\sin x)\mathrm{d}y=(y\cos x-e^{x+y})\mathrm{d}x,$$

从而

$$y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y\cos x-e^{x+y}}{e^{x+y}-\sin x}.$$

例题 2.1.31　椭圆 $x^2+4y^2=4$ 在点 $\left(1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 处的切线斜率为(　　).

A. $-\frac{\sqrt{3}}{6}$　　B. -1

C. $\frac{\sqrt{3}}{6}$　　D. 1

解析　(方法一)$x^2+4y^2=4$ 在点 $\left(1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 处的显式表达为 $y=\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$，从而所求斜率为 $y'(1)=$

$$-\left.\frac{x}{4\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}\right|_{x=1}=-\frac{1}{2\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{6}.$$

(方法二)$x^2+4y^2=4$ 化成参数方程为 $\begin{cases}x=2\cos t,\\y=\sin t,\end{cases}$ 点 $\left(1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 对应的参数为 $t=\frac{\pi}{3}$，从而所求斜率为

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\frac{\pi}{3}}=\left.\frac{\cos t}{-2\sin t}\right|_{t=\frac{\pi}{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{6}.$$

(方法三)$x^2+4y^2=4$ 两边求微分，得 $2x\mathrm{d}x+8y\mathrm{d}y=0$，于是 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}=-\left.\frac{x}{4y}\right|_{x=1,y=\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{\sqrt{3}}{6}.$

巩固练习

1. 设函数 $f(x)$在点 $x=x_0$ 处可导，且 $f'(x_0)=1$，则$\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f\left(x_0-\frac{1}{n}\right)-f\left(x_0+\frac{1}{n}\right)\right]=$(　　).

A. -2　　B. 2

C. $-\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{2}$

2. 设 $f(x)=x^2\ln x$，则 $f'(1)=$(　　).

A. 0　　B. 1

C. 2　　D. 3

3. 设 $y=x^n+\mathrm{e}^x$，则 $y^{(n)}=$(　　).

A. $n!+\mathrm{e}^x$　　B. $n!+n\mathrm{e}^x$

C. $n!$　　D. e^x

4. 设 $y=x\ln x$，则 $y^{(8)}=$(　　).

A. $\frac{6!}{x^7}$　　B. $-\frac{6!}{x^7}$

C. $\frac{1}{x^7}$　　D. $-\frac{1}{x^7}$

5. 下列结论错误的是(　　).

A. 如果函数 $f(x)$在 $x=x_0$ 处连续，则 $f(x)$在 $x=x_0$ 处可微

B. 如果函数 $f(x)$在 $x=x_0$ 处不连续，则 $f(x)$在 $x=x_0$ 处不可微

C. 如果函数 $f(x)$在 $x=x_0$ 处可微，则 $f(x)$在 $x=x_0$ 处连续

D. 如果函数 $f(x)$在 $x=x_0$ 处不可微，则 $f(x)$在 $x=x_0$ 处也可能连续

6. 由方程 $\mathrm{e}^y-xy=\mathrm{e}$ 所确定的隐函数的导数$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$(　　).

A. $\frac{y}{\mathrm{e}^y-x}$　　B. $\frac{y}{\mathrm{e}^y+x}$

C. $\frac{x}{\mathrm{e}^y-x}$　　D. $\frac{x}{\mathrm{e}^y+x}$

7. 由方程 $xy=\mathrm{e}^{7x+y}$所确定的隐函数 y 的导数$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$(　　).

A. $\frac{\mathrm{e}^{7x+y}-y}{x-\mathrm{e}^{7x+y}}$　　B. $\frac{7\mathrm{e}^{7x+y}-y}{x-\mathrm{e}^{7x+y}}$

C. $\frac{\mathrm{e}^{7x+y}-y}{x-7\mathrm{e}^{7x+y}}$　　D. $\frac{7\mathrm{e}^{7x+y}-y}{x-7\mathrm{e}^{7x+y}}$

8. 由方程 $y=\pi-x\mathrm{e}^y$ 所确定的隐函数在 $x=0$ 处的导函数值$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=$(　　).

A. e^π　　B. $-\mathrm{e}^\pi$　　C. 1　　D. -1

9. 参数方程$\begin{cases} x=\ln(1+t^2), \\ y=t-\arctan t \end{cases}$所确定的函数的导数$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$________.

10. 求曲线 $y=2\sin x+x^2$ 在横坐标为 $x=0$ 的点处的切线方程.

11. 求方程 $y=1+xe^y$ 所确定的隐函数的二阶导数.

12 已知$\begin{cases} x=at^2, \\ y=bt^3, \end{cases}$求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$和$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

第二节 微分中值定理与导数的应用

知识脉络

- 微分中值定理与导数的应用
  - 微分中值定理
    - 罗尔中值定理
    - 拉格朗日中值定理
  - 洛必达法则
    - $\frac{0}{0}$型未定式
    - $\frac{\infty}{\infty}$型未定式
    - 其他类型的未定式
  - 函数的单调性
  - 函数的极值与最值
    - 极值的定义与判定
    - 函数的最值
  - 曲线的凹凸性与拐点

知识精讲

一、微分中值定理

1. 罗尔中值定理

定理 1(罗尔中值定理) 如果函数 $f(x)$满足下面三个条件：

(1)在闭区间$[a,b]$上连续；

(2)在开区间(a,b)内可导；

(3)在闭区间$[a,b]$的端点处的函数值相等，即 $f(a)=f(b)$，

那么在开区间(a,b)内至少有一点$\xi(\xi\in(a,b))$，使得 $f'(\xi)=0$.

罗尔中值定理的几何意义：在一段两端点高度相同，且除端点外每点都有切线的曲线上，至少存在一条水平切线(如图 2.2.1).

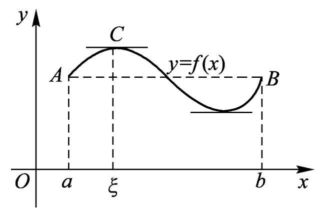

图 2.2.1

例题 2.2.1　设 $f(x)$在$[1,\mathrm{e}]$上连续，$(1,\mathrm{e})$内可导，且 $f(1)=0$，$f(\mathrm{e})=1$. 证明方程 $f'(x)=\dfrac{1}{x}$在$(1,\mathrm{e})$上至少有一个根.

解析　构造辅助函数 $F(x)=f(x)-\ln x$，则 $F(x)$也在$[1,\mathrm{e}]$上连续，$(1,\mathrm{e})$内可导，且

$$F(1)=f(1)-\ln 1=0=f(\mathrm{e})-\ln \mathrm{e}=F(\mathrm{e}),$$

于是由罗尔中值定理知，存在一点 $\xi\in(1,\mathrm{e})$，使得

$$F'(\xi)=f'(\xi)-\frac{1}{\xi}=0,$$

即证得方程 $f'(x)=\dfrac{1}{x}$在$(1,\mathrm{e})$上至少有一个根.

例题 2.2.2　设函数 $f(x)$在$[0,3]$上连续，在$(0,3)$内可导，且 $f(0)+f(1)+f(2)=3$，$f(3)=1$. 证明存在 $\xi\in(0,3)$，使得 $f'(\xi)=0$.

解析　因为函数 $f(x)$在$[0,3]$上连续，所以 $f(x)$在$[0,2]$也连续，由最值定理，$f(x)$在$[0,2]$上有最大值 M 和最小值 m. 于是

$$m\leqslant f(0)\leqslant M,m\leqslant f(1)\leqslant M,m\leqslant f(2)\leqslant M,$$

从而

$$m\leqslant\frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}\leqslant M.$$

根据介值定理，存在 $\eta\in[0,2]$，使得 $f(\eta)=1=f(3)$. 于是由罗尔中值定理知，存在一点 $\xi\in(\eta,3)\subseteq(0,3)$，使得 $f'(\xi)=0$.

2. 拉格朗日中值定理

定理 2(拉格朗日中值定理)　如果函数 $f(x)$满足下面两个条件：

(1)在闭区间$[a,b]$上连续;

(2)在开区间(a,b)内可导;

那么在开区间(a,b)内至少有一点$\xi(\xi\in(a,b))$,使得$f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

拉格朗日中值定理的几何意义:在一段除端点外每点都有切线的曲线上,至少有一点的切线平行于两个端点的连线(如图2.2.2).

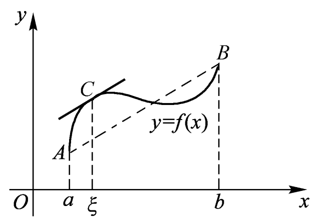

图 2.2.2

注:罗尔中值定理是拉格朗日中值定理当$f(a)=f(b)$时的特殊情况,拉格朗日中值定理是罗尔定理的推广.

例题 2.2.3　函数$f(x)=x^2$在区间$[1,2]$上满足拉格朗日中值定理的点是$\xi=$________.

解析　函数$f(x)=x^2$在区间$[1,2]$上应用拉格朗日中值定理,得$f'(\xi)=\dfrac{f(2)-f(1)}{2-1}$,即$2\xi=3$,解得$\xi=\dfrac{3}{2}$.

例题 2.2.4　设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,在开区间(a,b)内可导,$a<x_1<x_2<b$,则下列等式不一定成立的是(　　).

A. $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),\xi\in(a,b)$

B. $f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1),\xi\in(a,b)$

C. $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),\xi\in(x_1,x_2)$

D. $f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1),\xi\in(x_1,x_2)$

解析　根据拉格朗日中值定理,$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$,其中$\xi\in(a,b)$. 因为$a<x_1<x_2<b$,所以$(x_1,x_2)\subseteq(a,b)$,从而$\xi\in(a,b)$但可能$\xi\notin(x_1,x_2)$. 故本题选C.

二、洛必达法则

如果当$x\to x_0$(或$x\to\infty$)时,函数$f(x)$和$g(x)$都趋于零或者无穷大,那么极限$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$(或$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$)可能存在、也可能不存在.通常把这种极限叫作未定式,并分别简记为$\dfrac{0}{0}$或$\dfrac{\infty}{\infty}$.

利用导数可以得到一个计算某些特殊未定式的方法,即洛必达法则.

1. $\frac{0}{0}$型未定式

定理 3　设函数 $f(x)$，$g(x)$满足：

(1)$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$；

(2)$f(x)$和 $g(x)$在点 x_0 的某一去心邻域内可导，并且 $g'(x)\neq 0$；

(3)极限$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$存在(或为无穷大)，

则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

注：上述定理中的 $x\to x_0$ 可以改为 $x\to x_0^-$，$x\to x_0^+$，$x\to\infty$，$x\to-\infty$或 $x\to+\infty$. 当改为 $x\to\infty$，$x\to-\infty$或 $x\to+\infty$时，需要将条件(2)改为在相应区域上可导，且 $g'(x)\neq 0$.

需要注意的是，在应用洛必达法则求极限时，必须要确认导数之比的极限存在. 此外，即使导数之比的极限不存在，原不定式的极限仍可能存在，即洛必达法则是极限存在的充分不必要条件.

例题 2.2.5　计算下列极限.

(1)$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{1-2\cos x}{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}$；

(2)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x-\sin x}$；

(3)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 2x}{x^2}$.

解析　(1)应用洛必达法则，

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{1-2\cos x}{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\sin x}{\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}=\sqrt{3}.$$

(2)应用洛必达法则，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2}=2.$$

(3)应用两次洛必达法则，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x-\sin x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{4\cos 2x-\cos x}{2}=\frac{3}{2}.$$

备考提示

应用洛必达法则求极限的过程中，可以结合其他求极限的方法，如上例(2)中就用到了等价无穷小 $\tan x \sim x, 1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$. 此外，若不定式应用洛必达法则后得到一个新的未定式，且新未定式满足洛必达法则的条件，则可以对它再应用洛必达法则，如上例(3).

例题 2.2.6 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}}$；

(2) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x - 2\sin x}{3x + \cos x}$.

解析 (1)应用洛必达法则，

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1.$$

(2)应当注意，当 $x \to \infty$ 时，分子和分母的导数之比的极限，即 $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1-2\cos x}{3-\sin x}$ 不存在，所以本题不能使用洛必达法则. 正确做法如下：

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x - 2\sin x}{3x + \cos x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 - \frac{2\sin x}{x}}{3 + \frac{\cos x}{x}} = \frac{1 - 2\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x}}{3 + \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\cos x}{x}} = \frac{1}{3}.$$

2. $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式

定理 4 设函数 $f(x), g(x)$ 满足：

(1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$；

(2) $f(x)$ 和 $g(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内可导，并且 $g'(x) \neq 0$；

(3)极限 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在(或为无穷大)，

则

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

注：上述定理中的 $x \to x_0$ 可以改为 $x \to x_0^-, x \to x_0^+, x \to \infty, x \to -\infty$ 或 $x \to +\infty$. 当改为 $x \to \infty, x \to -\infty$ 或 $x \to +\infty$ 时，需要将条件(2)改为在相应区域上可导，且 $g'(x) \neq 0$.

例题 2.2.7　计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}$;

(2) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln\sin 3x}{\ln\sin 5x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan x}{\tan 3x}$.

解析　(1)应用洛必达法则,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x}=0.$$

(2)应用洛必达法则,

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln\sin 3x}{\ln\sin 5x}=\lim_{x\to0^+}\frac{3\tan 5x}{5\tan 3x},$$

再利用等价无穷小替换,

$$\lim_{x\to0^+}\frac{3\tan 5x}{5\tan 3x}=\lim_{x\to0^+}\frac{15x}{15x}=1.$$

(3)应用三次洛必达法则,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan x}{\tan 3x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2(3x)}{3\cos^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 6x}{\sin 2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{3\cos 6x}{\cos 2x}=3.$$

例题 2.2.8　$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{99}}{e^{3x}}=$________.

解析　连续应用 99 次洛必达法则,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{99}}{e^{3x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{99!}{3^{99}e^{3x}}=0.$$

注:事实上,对任意 $a>0,b>1$,有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^a}{b^x}=0$.

3. 其他类型的未定式

除了$\dfrac{0}{0}$型和$\dfrac{\infty}{\infty}$型两种基本未定式外,还有 $0\cdot\infty,\infty-\infty,0^0,1^\infty,\infty^0$ 型未定式,它们都可以经过适当变形,化为$\dfrac{0}{0}$型或$\dfrac{\infty}{\infty}$型.

例题 2.2.9　计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to0^+}x^a\ln x(a>0)$;

(2) $\lim\limits_{x\to1^+}(x-1)\tan\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$.

解析 (1)这是 $0\cdot\infty$型未定式,将其化为 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x^{-a}}$,有

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x^{-a}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-ax^{-a-1}}=\lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{1}{a}x^{a}\right)=0.$$

(2)这是 $0\cdot\infty$型未定式,将其化为 $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x-1}{\cot\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$,有

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{\cot\left(\frac{\pi x}{2}\right)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{-\frac{\pi}{2}\csc^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}=-\frac{2}{\pi}.$$

例题 2.2.10 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\sin x}\right]$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right]$.

解析 (1)这是$\infty-\infty$型未定式,将其化为 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin x-x}{x^2\sin x}$,有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^2\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=-\frac{1}{6}.$$

(2)这是$\infty-\infty$型未定式,将其化为$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}$,有

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2(1+x)}=\frac{1}{2}.$$

例题 2.2.11 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\sin x)^{\frac{5}{3+4\ln x}}$; (2) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\sin x}$.

解析 (1)这是 0^0 型未定式,根据初等函数的连续性,取对数得

$$\lim_{x\to 0^+}(\sin x)^{\frac{5}{3+4\ln x}}=\lim_{x\to 0^+}e^{\frac{5\ln\sin x}{3+4\ln x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{5\ln\sin x}{3+4\ln x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{5\cos x}{\sin x}}{\frac{4}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{5x\cos x}{4\sin x}}=e^{\frac{5}{4}}.$$

(2)这是 0^0 型未定式,根据初等函数的连续性,取对数得

$$\lim_{x\to 0^+}x^{\sin x}=\lim_{x\to 0^+}e^{\sin x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\sin x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x}=e^0=1.$$

注:这里直接应用了例题 2.2.9(1)的结果.

例题 2.2.12 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$;

(2) $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

解析 (1)这是 1^{∞} 型未定式，根据初等函数的连续性，取对数得

$$\lim_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}=\lim_{x\to 1}\mathrm{e}^{\frac{\ln x}{1-x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{-1}}=\mathrm{e}^{-1}.$$

(2)这是 1^{∞} 型未定式，根据初等函数的连续性，取对数得

$$\lim_{x\to 1}(2-x)^{\frac{1}{\ln x}}=\lim_{x\to 1}\mathrm{e}^{\frac{\ln(2-x)}{\ln x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln(2-x)}{\ln x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{-\frac{1}{2-x}}{\frac{1}{x}}}=\mathrm{e}^{-1}.$$

例题 2.2.13　计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0^{+}}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\tan x}$；

(2) $\lim\limits_{x\to +\infty}(x+\sqrt{1+x^{2}})^{\frac{1}{\ln x}}$.

解析 (1)这是 ∞^{0} 型未定式，根据初等函数的连续性，取对数得

$$\lim_{x\to 0^{+}}\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}=\lim_{x\to 0^{+}}\mathrm{e}^{-\tan x\ln x}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^{+}}-x\ln x\cdot\lim\limits_{x\to 0^{+}}\frac{\tan x}{x}}=\mathrm{e}^{0\cdot 1}=1.$$

(2)这是 ∞^{0} 型未定式，根据初等函数的连续性，取对数得

$$\lim_{x\to +\infty}(x+\sqrt{1+x^{2}})^{\frac{1}{\ln x}}=\lim_{x\to +\infty}\mathrm{e}^{\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^{2}})}{\ln x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^{2}})}{\ln x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^{2}}}}{x+\sqrt{1+x^{2}}}}{\frac{1}{x}}}=\mathrm{e}.$$

三、函数的单调性

定理 5　设函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导.

(1)如果在 (a,b) 内 $f'(x)\geqslant 0$，且等号仅在有限多个点处成立，那么函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加；

(2)如果在 (a,b) 内 $f'(x)\leqslant 0$，且等号仅在有限多个点处成立，那么函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减少.

注：如果把定理中的闭区间换成其他各种区间(对于无穷区间，要求在其任一有限的子区间上满足定理的条件)，那么结论也成立.

例题 2.2.14　判断函数 $y=x-\sin x$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的单调性.

解析 因为函数 $y=x-\sin x$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续，在 $(-\pi,\pi)$ 内

$$y'=1-\cos x\geqslant 0,$$

且等号仅在 $x=0$ 处成立，所以函数 $y=x-\sin x$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上单调增加.

例题 2.2.15　讨论函数 $f(x)=2x^{2}-\ln x$ 的单调性.

解析 函数 $f(x)$ 是定义域为 $(0,+\infty)$ 的连续函数，且

$$f'(x)=4x-\frac{1}{x}=\frac{4x^{2}-1}{x}=\frac{(2x-1)(2x+1)}{x}.$$

因为在区间$\left(0,\frac{1}{2}\right)$内，$f'(x)<0$，在区间$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$内，$f'(x)>0$，所以$f(x)$在$\left(0,\frac{1}{2}\right]$上单调减少，在$\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$上单调增加.

例题 2.2.16 讨论函数$f(x)=(x-1)\sqrt[3]{x^2}$的单调性.

解析 函数$f(x)$是定义域为$(-\infty,+\infty)$的连续函数，且

$$f'(x)=\sqrt[3]{x^2}+\frac{2(x-1)}{3\sqrt[3]{x}}=\frac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}}.$$

因为在区间$(-\infty,0)$和$\left(\frac{2}{5},+\infty\right)$内，$f'(x)>0$；在区间$\left(0,\frac{2}{5}\right)$内，$f'(x)<0$，所以$f(x)$在$(-\infty,0]$和$\left[\frac{2}{5},+\infty\right)$上单调增加，在$\left[0,\frac{2}{5}\right]$上单调减少.

例题 2.2.17 证明：当$x>0$时，$\ln(1+x)>x-\frac{x^2}{2}$.

解析 令$f(x)=\frac{x^2}{2}-x+\ln(1+x)$，则$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续，且当$x>0$时，

$$f'(x)=x-1+\frac{1}{1+x}=\frac{x^2}{1+x}>0,$$

从而$f(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增，于是，当$x>0$时，

$$f(x)=\frac{x^2}{2}-x+\ln(1+x)>f(0)=0,$$

即得

$$\ln(1+x)>x-\frac{x^2}{2}.$$

四、函数的极值与最值

1. 极值的定义与判定

定义 1 设函数$f(x)$在点x_0的某一邻域内有定义. 若对该邻域内任意一点$x(x\neq x_0)$，有

$$f(x)<f(x_0)（或 f(x)>f(x_0)），$$

则称$f(x)$在点x_0处取得极大值（或极小值），并称x_0为函数$f(x)$的极大值点（或极小值点）.

极大值与极小值统称为函数的极值，极大值点与极小值点统称为函数的极值点.

注：根据极值的定义，函数的极值点一定是在函数定义域的内部，而不能是在端点.

需要注意的是，函数的极值是一个局部概念，所谓极大值（或极小值）只意味着在该点附近的局部范围内是最大的（或最小的），在更大的范围内并不一定是最大的（或最小的）. 此外，极大值也不一定大于极小

值. 如图 2.2.3,函数 $f(x)$有两个极大值 $f(x_1)$和 $f(x_3)$,两个极小值 $f(x_2)$和 $f(x_4)$,其中极大值 $f(x_1)$要比极小值 $f(x_4)$还小.

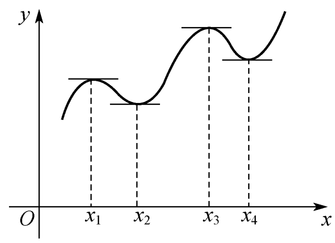

图 2.2.3

定理 6(费马定理)　若函数 $f(x)$在点 x_0 处可导,并且 x_0 为 $f(x)$的极值点,则 $f'(x_0)=0$.

由上述定理可知,极值点处的导数如果存在,则一定为零. 但导数为零的点不一定是极值点,如函数 $y=x^3$ 在点 $x=0$ 处的导数为零,但 $x=0$ 并不是极值点. 通常称导数为零的点为函数的驻点. 因此,函数的极值点只能是驻点或不可导的点.

当求出函数的所有驻点和不可导的点后,还需要进一步判断这些点是不是极值点,对此有下面两个判定定理.

定理 7(第一充分条件)　设函数 $f(x)$在点 x_0 处连续,在 x_0 的某一去心邻域内可导,x 是该去心邻域内的任意一点.

(1)若当 $x<x_0$ 时,$f'(x)>0$,而当 $x>x_0$ 时,$f'(x)<0$,则 $f(x)$在点 x_0 处取得极大值;

(2)若当 $x<x_0$ 时,$f'(x)<0$,而当 $x>x_0$ 时,$f'(x)>0$,则 $f(x)$在点 x_0 处取得极小值;

(3)若在该去心邻域内 $f'(x)$不变号,则 x_0 不是 $f(x)$的极值点.

例题 2.2.18　求函数 $f(x)=(x+2)^2(x-1)^3$ 的极值.

解析　函数 $f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$,且

$$f'(x)=2(x+2)(x-1)^3+3(x+2)^2(x-1)^2=(x+2)(5x+4)(x-1)^2.$$

由此可知,$f(x)$有三个驻点:

$$x_1=-2,x_2=-\frac{4}{5},x_3=1.$$

这三个驻点将$(-\infty,+\infty)$分为四个区间:

$$(-\infty,-2),\left(-2,-\frac{4}{5}\right),\left(-\frac{4}{5},1\right),(1,+\infty).$$

因为 $f'(x)$在这四个区间上的符号分别为

$$+,-,+,+,$$

所以 $f(x)$在 $x_1=-2$ 处取得极大值 $f(-2)=0$,在 $x_2=-\frac{4}{5}$处取得极小值 $f\left(-\frac{4}{5}\right)=-\frac{26244}{3125}$,在点 $x_3=1$ 处不取极值.

例题 2.2.19　求函数 $f(x)=2-|x^5-1|$的极值.

解析 函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续,且

$$f'(x)=\begin{cases}5x^4, & x<1,\\ \text{不存在}, & x=1,\\ -5x^4, & x>1.\end{cases}$$

由此可知,$f(x)$有一个驻点 $x=0$ 和一个不可导点 $x=1$,这两个点将$(-\infty,+\infty)$分为三个区间:

$$(-\infty,0),\quad (0,1),\quad (1,+\infty).$$

因为 $f'(x)$在这三个区间上的符号分别为

$$+,+,-,$$

所以 $f(x)$在 $x=1$ 处取得极大值 $f(1)=2$.

定理 8(第二充分条件) 设函数 $f(x)$在点 x_0 处有二阶导数,且 $f'(x_0)=0,f''(x_0)\neq0$,则

(1)当 $f''(x_0)>0$ 时,$f(x)$在点 x_0 处取得极小值.

(2)当 $f''(x_0)<0$ 时,$f(x)$在点 x_0 处取得极大值.

例题 2.2.20 设函数 $f(x)$满足 $f''(x)-5'f(x)+6f(x)=0$,若 $f(x_0)>0,f'(x_0)=0$,则(　　).

A. $f(x)$在点 x_0 处取得极大值

B. $f(x)$在点 x_0 的某个领域内单调增加

C. $f(x)$在点 x_0 处取得极小值

D. $f(x)$在点 x_0 的某个领域内单调减少

解析 根据题意,$f'(x_0)=0,f''(x_0)=-6f(x_0)<0$,因此,由极值的第二充分条件知,$f(x)$在 $x=x_0$ 处取得极大值. 故本题选 A.

例题 2.2.21 函数 $f(x)=x+\sqrt{1-x}$在 $x=\dfrac{3}{4}$处(　　).

A. 取得极大值　　　　B. 取得极小值

C. 不取极值　　　　D. 导数不为 0

解析 根据题意,$f'(x)=1-\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}},f''(x)=-\dfrac{1}{4(1-x)^{\frac{3}{2}}}$,于是 $f'\left(\dfrac{3}{4}\right)=0,f''\left(\dfrac{3}{4}\right)=-2<0$,从而由极值的第二充分条件知,$f(x)$在 $x=\dfrac{3}{4}$处取极大值. 故本题选 A.

例题 2.2.22 求函数 $f(x)=x^3-3x$ 的极值.

解析 $f'(x)=3x^2-3$,令 $f'(x)=0$,解得 $f(x)$有驻点 $x_1=-1,x_2=1$.

因为 $f''(x)=6x$,所以 $f''(-1)=-6<0,f''(1)=6>0$,从而 $f(x)$在 $x_1=-1$ 处取得极大值 $f(-1)=2$,在 $x_2=1$ 处取得极小值 $f(1)=-2$.

2. 函数的最值

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则由最值定理知，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最大值和最小值. 如果 $f(x)$ 的最值不是在区间端点处取得，那么函数的最值一定是函数的一个极值. 因此，可以通过比较 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上所有驻点、不可导点和端点处的函数值来确定函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 的最大值和最小值，具体步骤如下：

第一步，求出 $f(x)$ 在 (a,b) 内的驻点和不可导点；

第二步，计算所有驻点和不可导点处的函数值和端点处的函数值；

第三步，比较求出的所有函数值，其中最大的就是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值，最小的就是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值.

例题 2.2.23　求函数 $f(x)=(x-3)^{\frac{1}{3}}(x-6)^{\frac{2}{3}}$ 在区间 $[0,6]$ 上的最大值和最小值.

解析　因为

$$f'(x)=\frac{1}{3}(x-3)^{-\frac{2}{3}}(x-6)^{\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}(x-3)^{\frac{1}{3}}(x-6)^{-\frac{1}{3}}=\frac{x-4}{(x-3)^{\frac{2}{3}}(x-6)^{\frac{1}{3}}},$$

所以 $f(x)$ 在 $(0,6)$ 上的驻点为 $x_1=4$，导数不存在的点为 $x_2=3$.

由于 $f(4)=\sqrt[3]{4}$，$f(3)=0$，$f(0)=-3\sqrt[3]{4}$，$f(6)=0$，所以 $f(x)$ 在 $[0,6]$ 上的最大值为 $f(4)=\sqrt[3]{4}$，最小值为 $f(3)=f(6)=0$.

备考提示

在实际问题中，往往根据问题的性质就可断定可导函数 $f(x)$ 确有最大值或最小值，而且一定在定义区间内部取得. 此时，如果 $f(x)$ 在定义区间内只有一个驻点 x_0，那么不必讨论 $f(x_0)$ 是否为极值，就可断定 $f(x_0)$ 是所求的最大值或最小值.

例题 2.2.24　一商家销售某种商品，其价格函数为 $P(x)=7-0.2x$，其中 x 为销售量（千克），商品的成本函数是 $C(x)=3x+1$（百元）.

(1)若每销售一千克商品，政府要征税 t（百元），求商家获得最大利润时的销售量？

(2)在商家获得最大利润的前提下，t 为何值时，政府的税收总额最大？

解析　(1)根据题意，商家的利润函数为

$$L(x)=xP(x)-C(x)-tx=-0.2x^2+(4-t)x-1,$$

于是

$$L'(x)=-0.4x+(4-t),$$

从而 $L(x)$ 有唯一的驻点 $x=10-2.5t$，进而 $x=10-2.5t$ 就是 $L(x)$ 的最大值点，即当销售量为 $10-2.5t$ 千克时，商家获得最大利润.

(2)由(1)知，当销售量为 $10-2.5t$ 千克时，商家获得最大利润，所以在商家获得最大利润的前提下，政府的税收总额为

$$f(t)=t(10-2.5t)=10t-2.5t^2.$$

对 $f(t)$ 求导，得

$$f'(t)=10-5t,$$

于是 $f(t)$ 有唯一的驻点 $t=2$，从而当 $t=2$ 时，政府的税收总额最大.

例题 2.2.25　欲做一个容积为 300 立方米的无盖圆柱形蓄水池，已知池底单位造价为周围单位造价的两倍，问蓄水池的尺寸怎样设计才能使总造价最低.

解析　设蓄水池的池底半径为 x 米，池底单位造价为 $2a$，则蓄水池的高为 $\frac{300}{\pi x^2}$ 米，周围造价为 a. 于是，蓄水池的造价为

$$f(x)=\pi x^2\cdot 2a+\frac{300}{\pi x^2}\cdot 2\pi x\cdot a=2a\left(\pi x^2+\frac{300}{x}\right).$$

对 $f(x)$ 求导，得

$$f'(x)=2a\left(2\pi x-\frac{300}{x^2}\right),$$

令 $f'(x)=0$，解得 $x=\sqrt[3]{\frac{150}{\pi}}$. 因此，函数 $f(x)$ 有唯一的驻点 $x=\sqrt[3]{\frac{150}{\pi}}$，从而 $f(x)$ 在该点处取得最小值，即当蓄水池的池底半径为 $\sqrt[3]{\frac{150}{\pi}}$ 米时，总造价最低.

五、曲线的凹凸性与拐点

定义 2　设函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续，若对 I 上任意两点 x_1,x_2 恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

则称 $f(x)$ 在区间 I 上的图形是凹的；若恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

则称 $f(x)$ 在区间 I 上的图形是凸的.

曲线的凹凸性具有明显的几何意义，对于凹曲线（如图 2.2.4），当 x 逐渐增大时，其上每一点的切线（假设切线存在）的斜率是逐渐增大的，即导函数 $f'(x)$ 是单调增加的；而对于凸曲线（如图 2.2.5），当 x 逐渐增大时，其上每一点的切线（假设切线存在）的斜率是逐渐减小的，即导函数 $f'(x)$ 是单调减少的.

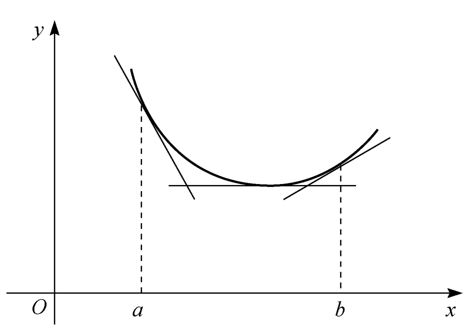

图 2.2.4

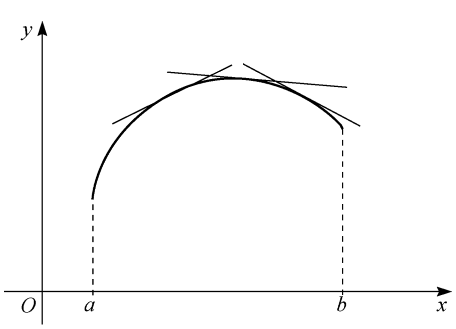

图 2.2.5

定理 9　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内具有一阶和二阶导数，

(1)若在 (a,b) 内，$f''(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的图形是凹的；

(2)若在 (a,b) 内，$f''(x)<0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的图形是凸的

定义 3　如果曲线 $y=f(x)$ 在经过点 $(x_0,f(x_0))$ 时，曲线的凹凸性改变了，那么就称点为这条曲线的拐点.

由上述定理可知，如果 $f''(x)$ 在 x_0 的左、右两侧临近异号，那么点 $(x_0,f(x_0))$ 就是曲线 $(x_0,f(x_0))$ 的一个拐点.

例题 2.2.26　讨论曲线 $y=x^4-2x^3+1$ 的凹凸性，并求出该曲线的拐点.

解析　函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，且

$$y'=4x^3-6x^2,y''=12x^2-12x=12x(x-1).$$

令 $y''=0$，解得

$$x_1=0,x_2=1.$$

这两个点将 $(-\infty,+\infty)$ 分为三个区间：

$$(-\infty,0),(0,1),(1,+\infty),$$

因为 y'' 在这三个区间上的符号分别为

$$+,-,+,$$

所以曲线在 $(-\infty,0]$ 和 $[1,+\infty)$ 上是凹的，在 $[0,1]$ 上是凸的，点 $(0,1)$ 和 $(1,0)$ 是这条曲线的拐点.

例题 2.2.27　讨论曲线 $y=e^{-x^2}$ 的凹凸性，并求出该曲线的拐点.

解析　函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，且

$$y'=-2xe^{-x^2},y''=2(2x^2-1)e^{-x^2}.$$

令 $y''=0$，解得

$$x_1=\frac{\sqrt{2}}{2},x_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

这两个点将 $(-\infty,+\infty)$ 分为三个区间：

$$\left(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right),$$

因为 y'' 在这三个区间上的符号分别为

$$+,-,+,$$

所以曲线在 $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ 和 $\left[\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$ 上是凹的，在 $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ 上是凸的，点 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},e^{-\frac{1}{2}}\right)$ 和 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},e^{-\frac{1}{2}}\right)$ 是这条曲线的拐点.

巩固练习

1. 关于函数 $y=2x+\frac{32}{x}(x>0)$ 的单调性，下列描述正确的是(　　).

A. y 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加　　B. y 在 $[4,+\infty)$ 内单调增加

C. y 在 $[4,+\infty)$ 内单调减少　　D. y 在 $(0,+\infty)$ 内单调减少

2. 曲线 $y=x^2e^{-x}$ 的单调递增区间为(　　).

A. $(-\infty,0]$　　B. $[2,+\infty)$

C. $[0,2]$　　D. $(-\infty,+\infty)$

3. 函数 $f(x)=x-2\sqrt{x}+1$，下列描述正确的是(　　).

A. $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内单调增加　　B. $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 内单调减少

C. $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有极大值 $f(1)=0$　　D. $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有极小值 $f(1)=0$

4. 函数 $y=x^3-3x^2-9x+1$ 的极大值为(　　).

A. -26　　B. -6

C. 6　　D. 26

5. 曲线 $y=6x^2-\frac{1}{4}x^4$ 的凹区间为(　　).

A. $(-\infty,-2)$　　B. $(2,+\infty)$

C. $(-2,2)$　　D. $(-4,4)$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x^3}=$________.

7. 曲线 $y=x^3-3x^2+5x-4$ 的拐点坐标为________.

8. 函数 $y=e^x$ 在区间 $[1,2]$ 上满足朗格朗日中值定理的点为 $\xi=$__________.

9. 要制作一个体积为 576 cm^3 的长方体带盖的盒子，其底面长宽之比为 2∶1，问长、宽、高各取何值时，才能使盒子的表面积最小.

10. 某工厂需要围建一个面积为 64 平方米的长方形堆料长，一边可利用原来的墙壁，而现有的存砖只够砌 24 米长的墙壁，问这些存砖是否足够建此堆料场.

11. 设 $\frac{a}{4}+\frac{b}{3}+\frac{c}{2}+d=0$，证明：方程 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 在 $(0,1)$ 上至少有一个根.

复习题

一、选择题

1. 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导，且 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-2\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=1$，则 $f'(x_0)=$(　　).

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$

C. 2　　D. -2

2. 设函数 $f(x)$ 可导,则下列式子中正确的是(　　).

A. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(0)-f(x)}{x}=-f'(0)$

B. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x_0+2x)-f(x_0)}{x}=f'(x_0)$

C. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}=f'(x_0)$

D. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0+\Delta x)}{\Delta x}=2f'(x_0)$

3. 下列说法中正确的是(　　).

A. 若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点连续,则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点可导

B. 若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点不可导,则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点不连续

C. 若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点不可微,则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点极限不存在

D. 若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点不连续,则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点不可导

4. 函数 $f(x)=|x-1|$ 在 $x=1$ 处(　　).

A. 连续、可导　　　　B. 不连续、不可导

C. 连续、不可导　　　　D. 不连续、可导

5. 函数 $f(x)=\begin{cases} x, & x<0, \\ xe^x, & x\geqslant 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处(　　).

A. 不可导　　　　B. 不可微

C. 不连续　　　　D. 连续

6. 曲线 $y=\cos x$ 在点 $\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{1}{2}\right)$ 处的法线的斜率是(　　).

A. $\dfrac{1}{2}$　　　　B. 2

C. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　　　D. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

7. 曲线 $y=e^x-1$ 过点(0,0)处的切线方程是(　　).

A. $y=x$　　　　B. $y=-x$

C. $y=x-1$　　　　D. $y=1-x$

8. 曲线 $y=x\ln x$ 的平行于直线 $x-y+1=0$ 的切线方程是(　　).

A. $y=x-1$　　　　B. $y=-(x+1)$

C. $y=-x+1$　　　　D. $y=(\ln x+1)(x-1)$

9. 曲线方程为 $\begin{cases} x=\cos t, \\ y=\sin 2t, \end{cases}$ 则曲线在 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 处的切线方程为(　　).

A. $y=1$　　　　B. $y=x$

C. $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　　　D. $y=0$

10. 已知 $f(x)=\arctan x^2$,则 $f'(2)=$(　　).

A. $\dfrac{4}{5}$　　　　B. $\dfrac{4}{17}$

C. $\frac{1}{5}$　　D. $\frac{1}{17}$

11. $y=e^{2x}$,则 $dy=($　　$)$.

A. $e^{2x}dx$　　B. $2e^{2x}dx$

C. e^{2x}　　D. $2e^{2x}$

12. 若 $f(u)$可导,且 $y=f(e^{2x})$,则有(　　).

A. $dy=f'(e^{2x})dx$　　B. $dy=e^{2x}f'(e^{2x})dx$

C. $dy=2e^{2x}f'(e^{2x})dx$　　D. $dy=[f(e^{2x})]'de^{x}$

13. 下列等式中,(　　)是正确的.

A. $\sin x dx=d(\cos x)$　　B. $\arctan x dx=d\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$

C. $\frac{dx}{\sqrt{x}}=d(2\sqrt{x})$　　D. $\frac{dx}{x}=d(\ln x)$

14. 函数 $y=x^3-6x^2+9x+2$ 在区间$(1,3)$内(　　).

A. 单调增加　　B. 单调减少

C. 有最大值　　D. 有最小值

15. 下列结论错误的是(　　).

A. 若 $f(x)$可导,则 $f(x)$一定连续

B. 若 $f(x)$可微,则 $f(x)$一定可导

C. 若 $f'(a)=0$,则 $f(x)$在 $x=a$ 处取得极值

D. 若 $f(x)$在 $x=a$ 处可导且 $f(x)$在 $x=a$ 处取得极值,则 $f'(a)=0$

16. 函数 $f(x)=\ln(\sin x)$在区间$\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$上满足罗尔中值定理的 $\xi=($　　$)$.

A. $\frac{\pi}{2}$　　B. $\frac{3\pi}{2}$

C. $\frac{5\pi}{6}$　　D. $\frac{\pi}{6}$

17. $f(x)=x^3+1$ 在区间$[1,2]$上满足拉格朗日中值定理的 $\xi=($　　$)$.

A. 1　　B. $\sqrt{\frac{4}{3}}$

C. $\sqrt{\frac{7}{3}}$　　D. $\sqrt{\frac{3}{7}}$

18. 已知 $f(x)=x^3+ax^2+bx$ 在 $x=1$ 处取得极小值-2,则必有(　　).

A. $a=1,b=2$　　B. $a=0,b=-3$

C. $a=2,b=2$　　D. $a=-3,b=0$

19. 设 $f(x)$在$[a,b]$上连续，且 $f'(x)>1$，$f(a)<a$，$f(b)>b$，则方程 $f(x)=x$ 在(a,b)内有（　　）个实根.

A. 0　　　　B. 1

C. 2　　　　D. 3

20. 设 $f(x)=x^3-3x^2+3$，则曲线 $y=f(x)$的拐点是（　　）.

A. $(0,3)$　　　　B. 0

C. 1　　　　D. $(1,1)$

二、填空题

1. 已知 $f'(x_0)=-1$，则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}{x}=$________.

2. 曲线 $y=-\ln(x+1)+1$ 在点$(0,1)$处的切线方程为________.

3. $y=\sqrt{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}\,(x>4)$的导数 $y'=$________.

4. 若 $y=2e^x-x^2+x+1$，则 $y^{(520)}=$________.

5. 设 $y=2^x$，则 $y^{(50)}=$________.

6. 函数 $y=xe^{-x}$的单调递增区间是________.

7. 已知 $x=2$ 为函数 $f(x)=3x^2+ax+2$ 的极值点，则 $a=$________.

8. 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=2$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1009)-f(x)]=$________.

9. 已知 $f(x)$有连续的一阶导数，且 $f(0)=0$，$f'(0)=2$，则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)}{x}=$________.

10. 函数 $y=x-e^x$ 的极大值点是________，极大值是________.

三、解答题

1. 已知 $f(x-1)=af(x)$，$f'(0)=b$，求 $f'(1)$.

2. 设函数 $f(x)$在 $x=x_0$ 处连续，且$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{x-x_0}=A$（$A$ 为常数）. 问 $f'(x_0)$是否存在？若存在，试求其值.

3. 已知 $y=\ln x^2+2^x-\sqrt[3]{x}+3\sin 2x-\cos\dfrac{\pi}{x}$，求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

4. 求由方程 $x^2+xy+\mathrm{e}^y=\mathrm{e}$ 所确定的隐函数在 $x=0$ 处的导数$y'|_{x=0}$.

5. 求函数 $f(x)=2x^3+9x^2+12x-3$ 的单调区间和极值点.

6. 求曲线 $y=x^3-3x^2-9x+5$ 的凹凸区间和拐点.

7. 设函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=\ln(\sqrt{3+t^2}+t), \\ y=\sqrt{3+t^2} \end{cases}$ 所确定，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$（结果要化为最简形式）.

8. 证明：$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}(-1\leqslant x\leqslant 1)$.

9. 证明：当 $x>0$ 时，$1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}$.

10. 若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，$f(0)=0$，证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $\xi f'(\xi)+f(\xi)=f'(\xi)$.