高等数学考前冲刺卷(一)

一、单项选择题(本大题共 6 小题,每小题 3 分,共 18 分)

1. $\lim\limits_{x\to 0}2^{\frac{1}{x}}=($　　).

A. 0　　　　B. $+\infty$

C. ∞　　　　D. 不存在

2. $\varphi(x)=\int_0^{x^2}\sin t^2\,\mathrm{d}t$,则 $\varphi'(x)=($　　).

A. $\sin x^4$　　　　B. $2x\sin x^4$

C. $\cos x^4$　　　　D. $2x\cos x^4$

3. 对一切 n,$a_n<0$,且$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lambda$,要使级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,λ 应满足(　　).

A. $\lambda>1$　　　　B. $0\leqslant\lambda<1$

C. $\lambda=1$　　　　D. $\lambda\geqslant 0$

4. 下列说法正确的是(　　).

A. $f(x,y)$在点(x_0,y_0)连续,则 $f'_x(x_0,y_0)$,$f'_y(x_0,y_0)$均存在

B. $f'_x(x_0,y_0)$,$f'_y(x_0,y_0)$均存在,则 $f(x,y)$在点(x_0,y_0)连续

C. $f'_x(x_0,y_0)$,$f'_y(x_0,y_0)$均存在,则 $f(x,y)$在点(x_0,y_0)可微

D. $f'_x(x_0,y_0)$,$f'_y(x_0,y_0)$在点(x_0,y_0)连续,则 $f(x,y)$在点(x_0,y_0)连续

5. 设有平面 $\Pi_1:x-y+2z=6$,$\Pi_2:2x+y+z=5$,则(　　).

A. $\Pi_1/\!/\Pi_2$　　　　B. $\Pi_1\perp\Pi_2$

C. Π_1 与 Π_2 的交角为$\frac{\pi}{3}$　　　　D. Π_1 与 Π_2 的交角为$\frac{\pi}{4}$

6. 方程 $y''-4y'+4y=0$ 的两个线性无关的解为(　　).

A. e^{2x}与 $e^{2x}+1$　　　　B. e^{2x}与 ce^{2x}

C. e^{2x}与 xe^{2x}　　　　D. $3e^{2x}$与 $-e^{2x}$

二、填空题(本大题共 6 小题,每小题 3 分,共 18 分)

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=$____________.

8. 设 $f(x)$为连续函数,则$\int f^2(x)\mathrm{d}f(x)=$____________.

9. $\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2-1}=$____________.

10. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{\sqrt[3]{n}}$ 的收敛区间(不考虑端点)为____________.

11. 微分方程 $y'=\frac{y}{x}$满足初始条件 $y|_{x=1}=2$ 的特解是____________.

12. 曲面 $e^z-z+xy=3$ 在点$(2,1,0)$处的切平面方程为____________.

三、计算题(本大题共 7 小题,每小题 6 分,共 42 分)

13. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)^x$.

14. 设由方程 $e^y+x+2=\sin(x+y)$确定了一个隐函数 $y=y(x)$,求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

15. 求由参数方程$\begin{cases}x=\cos t,\\ y=\sin t-t\cos t\end{cases}$所确定的函数 $y=y(x)$的二阶导数$\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\frac{\pi}{3}}$.

16. 求 $f(x)=x^3-3x^2+1$ 的极值和单调区间.

17. 设 $f(u,v)$可微，$z=f\left(\dfrac{x}{y},xy\right)$，求 $\mathrm{d}z$.

18. 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\sin n}{3^n}$ 的收敛性，若收敛，是绝对收敛还是条件收敛？

19. 计算 $\int_L (x+\mathrm{e}^{\sin y})\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$ 的值，其中 L 是从 $A(1,0)$沿曲线 $y=\sqrt{1-x^2}$到 $B(-1,0)$的一段弧.

四、解答题(本大题共 2 小题，每小题 8 分，共 16 分)

20. 改变二次积分 $I=\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_x^{2x}\mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}y+\int_{\frac{1}{2}}^1\mathrm{d}x\int_x^1\mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}y$ 的积分次序，并计算 I.

21. 将 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$展开成 x 的幂级数，并写出其收敛区间.

五、证明题(本大题共 6 分)

22. 证明：当 $x\geqslant 0$ 时，$\ln(1+x)\geqslant x-\dfrac{1}{2}x^2$.

高等数学考前冲刺卷(二)

一、单项选择题(本大题共 6 小题,每小题 3 分,共 18 分)

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^{2x}=$(　　).

A. e^{-6}　　B. ∞

C. 1　　D. e^3

2. 函数 $y=\ln\sin x$ 在闭区间$\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}\right]$上满足罗尔定理的 $\xi=$(　　).

A. $\dfrac{\pi}{2}$　　B. $\dfrac{3\pi}{2}$　　C. $\dfrac{5\pi}{6}$　　D. $\dfrac{\pi}{6}$

3. 下列级数中收敛的级数是(　　).

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\sin\dfrac{1}{n}$　　B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos n}{2^n}$

C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{3^n}{2^n}$　　D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$

4. 设区域 D:$1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$,则 $\iint\limits_D 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$(　　).

A. 6π　　B. 15π

C. 4π　　D. 2π

5. 设 $z=f(x,y)$有二阶偏导数,则(　　).

A. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$　　B. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\neq\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$

C. z 在(x,y)处可微　　D. 当$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$连续时,$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$

6. 设向量组 $\boldsymbol{a}_1=(1,0,0)$,$\boldsymbol{a}_2=(1,3,-1)$,$\boldsymbol{a}_3=(5,3,t)$线性相关,则 $t=$(　　).

A. 3　　B. 1

C. 0　　D. -1

二、填空题(本大题共 6 小题,每小题 3 分,共 18 分)

7. 函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{x}, & x>0,\\ x^2+a, & x\leqslant 0\end{cases}$在 $x=0$ 处连续,则 $a=$____________.

8. 设 $z=z(x,y)$由方程 $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10=0$ 确定,则 z 对 x 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$____________.

9. 设 L 是单连通区域 D 的边界,取负向,D 的面积为 A,则$\oint_L 5y\mathrm{d}x+3x\mathrm{d}y=$____________.

10. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$($|x|<1$)的和函数是____________.

11. 交换二次积分的积分次序 $\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}f(x,y)\mathrm{d}y=$____________.

12. 微分方程 $y''+y=0$ 的通解为____________.

三、计算题(本大题共 7 小题,每小题 6 分,共 42 分)

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{2(x-\sin x)}$.

14. 计算 $\int\dfrac{\sqrt{x-1}}{x}\mathrm{d}x$.

15. $\int_{e^2}^{e^5}\dfrac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x$.

16. 计算$\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 是由不等式 $1\leqslant x^2+y^2\leqslant e^2$ 所表示的区域.

17. 设曲线 $y=f(x)$ 与 $y=\sin 2x$ 在原点相切，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{nf\left(\frac{4}{n}\right)}$.

18. 计算 $I=\int_L(\mathrm{e}^x\sin 2y-y+2x)\mathrm{d}y+(-\mathrm{e}^x\cos^2 y-y)\mathrm{d}x$，其中 L 是上半圆 $x^2+y^2=2x$ 上从点 $A(2,0)$ 到 $B(0,0)$ 的一段弧.

19. 求微分方程 $y''-4y'-12y=0$ 满足初试条件 $y|_{x=0}=0,y'|_{x=0}=8$ 的特解.

四、解答题(本大题共 2 小题，每小题 8 分，共 16 分)

20. 设曲线积分 $L=\int_{\widehat{AB}}[\mathrm{e}^{-x}+f(x)]y\mathrm{d}x-f(x)\mathrm{d}y$ 与路径无关，其中 $f(x)$ 有一阶导数且 $f(0)=-1$，A 为 $(0,0)$，B 为 $(1,1)$，试求 $f(x)$ 和 L 的值.

21. 求微分方程 $y''-5y'+6y=3\mathrm{e}^{3x}$ 的通解.

五、证明题(本大题共 6 分)

22. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且 $f(x)>0$，又 $g(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+\int_b^x\frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t$. 证明：在 (a,b) 内 $g(x)=0$ 有且仅有一个根.

高等数学考前冲刺卷(一)参考答案及解析

一、单项选择题

1.【答案】D

【解析】因为$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$，所以$\lim\limits_{x\to 0^-}2^{\frac{1}{x}}=0$，$\lim\limits_{x\to 0^+}2^{\frac{1}{x}}=+\infty$，故$\lim\limits_{x\to 0}2^{\frac{1}{x}}$不存在.

2.【答案】B

【解析】因为$\varphi'(x)=\sin x^4\cdot 2x=2x\sin x^4$，故选 B.

3.【答案】B

【解析】由$(-a_n)>0$知，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-a_n)$为正项级数，故当$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-a_{n+1}}{-a_n}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lambda<1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-a_n)$收敛，从而原级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，故选 B.

4.【答案】D

【解析】A，B 不对. 因为多元函数连续推不出其偏导数存在，反之也一样. C 不对. 因为由偏导数存在推不出函数可微. D 正确，因为偏导数连续函数一定可微，可微一定连续.

5.【答案】C

【解析】平面Π_1与Π_2的法向量分别为$\boldsymbol{n}_1=(1,-1,2)$，$\boldsymbol{n}_2=(2,1,1)$，显然它们既不垂直也不平行. 设两平面夹角为$\theta$，由$\cos\theta=\dfrac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\dfrac{|2-1+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}\sqrt{2^2+1^2+1^2}}=\dfrac{1}{2}$，知$\theta=\dfrac{\pi}{3}$，故选 C.

6.【答案】C

【解析】方程的特征方程为$r^2-4r+4=0$，特征根为$r_1=r_2=2$，方程有线性无关解，$y_1=\mathrm{e}^{2x}$，$y_2=x\mathrm{e}^{2x}$，故选 C.

二、填空题

7.【答案】1

【解析】由$\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}$，即$\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$. 又$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1$，故原极限为 1.

8.【答案】$\dfrac{1}{3}f^3(x)+C$

9.【答案】$\dfrac{\ln 3}{2}$

【解析】由积分公式$\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$，得

$$\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2-1}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\Bigg|_2^{+\infty}=\frac{1}{2}\left(0-\ln\frac{1}{3}\right)=\frac{\ln3}{2}.$$

10.【答案】$(1,3)$

【解析】收敛半径 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt[3]{n}}=1$，收敛区间为 $|x-2|<1$，即 $(1,3)$.

11.【答案】$y=2x$

【解析】分离变量，得，$\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$ 两边积分得，$\ln|y|=\ln|x|+\ln C$，则 $y=Cx$，由 $y(1)=2$ 得 $C=2$，

故所求特解为 $y=2x$.

12.【答案】$x+2y-4=0$

【解析】记 $F(x,y,z)=\mathrm{e}^z-z+xy-3$，则点 $(2,1,0)$ 处的法向量为 $\boldsymbol{n}=(y,x,\mathrm{e}^z-1)\Big|_{(2,1,0)}=(1,2,0)$，

所以在点 $(2,1,0)$ 处的切平面方程为 $x-2+2(y-1)=0$.

三、计算题

13.【解析】$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x^2-1}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2-1}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{x^2-1}\right)^{(x^2-1)}\right]^{\frac{1}{x^2-1}\cdot x}=\mathrm{e}^0=1.$

14.【解析】方程 $\mathrm{e}^y+x+2=\sin(x+y)$ 两边对 x 求导，得

$$\mathrm{e}^y\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+1=\cos(x+y)\cdot\left(1+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right),$$

整理得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\cos(x+y)-1}{\mathrm{e}^y-\cos(x+y)}$.

15.【解析】$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\cos t-\cos t+t\sin t=t\sin t$，$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\sin t$，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{t\sin t}{-\sin t}=-t,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=-1\cdot\left(-\frac{1}{\sin t}\right)=\frac{1}{\sin t},$$

故 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\Bigg|_{t=\frac{\pi}{3}}=\dfrac{1}{\sin t}\Bigg|_{t=\frac{\pi}{3}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$.

16.【解析】$f'(x)=3x^2-6x$，令 $f'(x)=0$ 解得驻点 $x_1=0$，$x_2=2$.

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	上升	极大	下降	极小	上升

由表可知函数的极值：极大值 $f(0)=1$，极小值 $f(2)=-3$.

函数的单调区间：单增区间是 $(-\infty,0]$，$(2,+\infty)$；单减区间是 $(0,2]$.

17.【解析】令 $u=\dfrac{x}{y}$，$v=xy$，$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_u\dfrac{1}{y}+f_v y$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=f_u\left(-\dfrac{x}{y^2}\right)+f_v x$，

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y=\left[f_u\ \frac{1}{y}+f_v y\right]\mathrm{d}x+\left[f_u\left(-\frac{x}{y^2}\right)+f_v x\right]\mathrm{d}y.$$

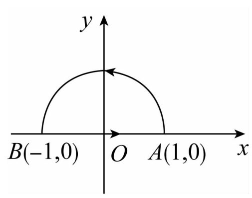
18.【解析】因为 $|\sin n|<1$,故 $\frac{n}{3^n}>\left|\frac{n\sin n}{3^n}\right|$.

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$ 中,$u_n=\frac{n}{3^n}$,$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{3^{n+1}}\cdot\frac{3^n}{n}=\frac{1}{3}<1$,由比值判别法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$ 收敛,再由比较判别法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{n\sin n}{3^n}\right|$ 收敛,故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin n}{3^n}$ 绝对收敛.

19.【解析】令 $P(x,y)=-y$,$Q(x,y)=x+\mathrm{e}^{\sin y}$,$\frac{\partial P}{\partial y}=-1$,$\frac{\partial Q}{\partial x}=1$,作图添加辅助路线 BA:$y=0$,x:$-1\to 1$,则

$$\begin{aligned}\int_L(x+\mathrm{e}^{\sin y})\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x&=\oint_{L+BA}(x+\mathrm{e}^{\sin y})\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x-\int_{BA}(x+\mathrm{e}^{\sin y})\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x\\&=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_{-1}^{1}0\mathrm{d}x\\&=2\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y-0\\&=\pi,\end{aligned}$$

其中 D 是曲线 $y=\sqrt{1-x^2}$ 与线段 AB 围成的闭区域.



第 19 题图

四、解答题

20.【解析】交换积分次序后为:$I=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\frac{y}{2}}^{y}\mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}x$,由此得

$$I=\int_0^1\mathrm{e}^{y^2}\ \frac{y}{2}\mathrm{d}y=\frac{1}{4}\int_0^1\mathrm{d}\mathrm{e}^{y^2}=\frac{1}{4}(\mathrm{e}-1).$$

21.【解析】$f(x)=\frac{1}{(x-1)(x-2)}=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{2-x}=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{2}\ \frac{1}{1-\frac{x}{2}}$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}x^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n,\text{收敛区间为}(-1,1).$$

五、证明题

22.【证明】令 $f(x)=\ln(1+x)-x+\frac{1}{2}x^2$,$x\in[0,+\infty)$.

$f'(x)=\frac{1}{1+x}-1+x$,$f''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2}+1$,

当 $x\geqslant 0$ 时,$f''(x)\geqslant 0$(等号仅在 $x=0$ 处成立),所以 $f'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内单调递增,

故 $x \geqslant 0$ 时，$f'(x) \geqslant f'(0) = 0$（等号仅在 $x = 0$ 处成立），所以 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 内单调递增，

故 $x \geqslant 0$ 时，$f(x) \geqslant f(0) = 0$，即 $\ln(1-x) \geqslant x - \frac{1}{2}x^2$.

高等数学考前冲刺卷(二) 参考答案及解析

一、单项选择题

1.【答案】A

【解析】$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{-2}{x}\right)^{\frac{x}{-2}(-4)}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}} = \frac{e^{-4}}{e^2} = e^{-6}$.

2.【答案】A

【解析】令 $y' = \cot x = 0$，得驻点 $\xi = \frac{\pi}{2}$，它属于区间 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$.

3.【答案】B

【解析】因为 B 中 $|u_n| = \frac{|\cos n|}{2^n} \leqslant \frac{1}{2^n}$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 收敛，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{2^n}$ 绝对收敛，故选 B.

4.【答案】A

【解析】$\iint\limits_D 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2S_D = 2(\pi\cdot 2^2 - \pi\cdot 1^2) = 6\pi$.

5.【答案】D

【解析】选项 D 是关于二阶混合偏导数的一个定理的表述，故选 D.

6.【答案】D

【解析】$(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}) = \begin{pmatrix}1 & 1 & 5\\ 0 & 3 & 3\\ 0 & -1 & \mathrm{t}\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 1 & 5\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & \mathrm{t}+1\end{pmatrix}$,

由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关当且仅当 $R(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) < 3$，得 $t = -1$.

二、填空题

7.【答案】2

【解析】因为 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续，所以 $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = f(0)$，又 $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin 2x}{x} = 2$，$f(0) = a$，所以 $a = 2$.

8.【答案】$\frac{x-1}{2-z}$

【解析】令 $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10$，则 $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x - 2$，$\frac{\partial F}{\partial z} = 2z - 4$，于是 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{x-1}{2-z}$.

9.【答案】$2A$

【解析】由格林公式,$\oint_L 5y\mathrm{d}x+3x\mathrm{d}y=-\left[\iint_D\left(\frac{\partial(3x)}{\partial x}-\frac{\partial(5x)}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]=2\left(\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)=2A.$

10.【答案】$S(x)=\frac{1}{(1-x)^2},x\in(-1,1)$

【解析】令 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$,对 $S(x)$ 逐项积分,则有 $\int S(x)\mathrm{d}x=\int\left(\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int nx^{n-1}\mathrm{d}x\right)=$

$\sum_{n=1}^{\infty}x^n+C=\frac{1}{1-x}+C$,所以 $S(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$.

11.【答案】$\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{y}}f(x,y)\mathrm{d}x$

12.【答案】$y=C_1\cos x+C_2\sin x$

【解析】特征方程:$r^2+1=0$,特征值:$r_{1,2}=\pm\mathrm{i}$ 方程通解为 $y=C_1\cos x+C_2\sin x$.

三、计算题

13.【解析】$\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{2(x-\sin x)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{\cos x(x-\sin x)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x-\sin x}=\frac{1}{4}\lim_{x\to0}\frac{3x^2}{1-\cos x}=$

$\frac{3}{4}\lim_{x\to0}\frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2}=\frac{3}{2}$.

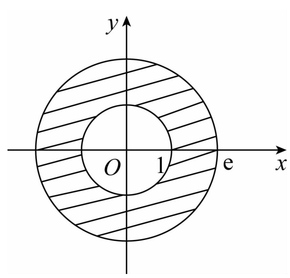
14.【解析】令 $\sqrt{x-1}=t$,则 $x=t^2+1$,$\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$,故

$$\begin{aligned}\int\frac{\sqrt{x-1}}{x}\mathrm{d}x&=\int\frac{t}{t^2+1}\cdot2t\mathrm{d}t=2\int\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t\\&=2t-2\arctan t+C\\&=2\sqrt{x-1}-2\arctan\sqrt{x-1}+C.\end{aligned}$$

15.【解析】$\int_{e^2}^{e^5}\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x=\int_{e^2}^{e^5}\frac{1}{\ln x}\mathrm{d}\ln x=\ln(\ln x)\Big|_{e^2}^{e^5}=\ln\frac{5}{2}$.

16.【解析】由题意知,积分区域如图阴影部分所示. 由被积函数知用极坐标的形式计算较为简单,积分区域 $D=\{(\theta,r)\mid0\leqslant\theta\leqslant2\pi,1\leqslant r\leqslant\mathrm{e}\}$,故

$\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^{\mathrm{e}}r\cdot r\mathrm{d}r=2\pi\cdot\frac{1}{3}r^3\Big|_1^{\mathrm{e}}=\frac{2\pi}{3}(\mathrm{e}^3-1)$.



第 16 题图

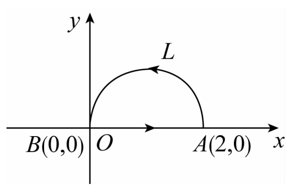
17.【解析】由曲线 $y=f(x)$ 与 $y=\sin2x$ 在原点相切知,$f(0)=0$,$f'(0)=2\cos2x\Big|_{x=0}=2$,则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{nf\left(\frac{4}{n}\right)} = 2\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{f\left(\frac{4}{n}\right)}{\frac{4}{n}}} = 2\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{f\left(\frac{4}{n}\right)-f(0)}{\frac{4}{n}-0}} = 2\sqrt{f'_{+}(0)} = 2\sqrt{f'(0)} = 2\sqrt{2}.$$

18.【解析】$P(x,y)=-e^{x}\cos^{2}y-y, Q(x,y)=e^{x}\sin 2y-y+2x, \frac{\partial P}{\partial y}=e^{x}\sin 2y-1, \frac{\partial Q}{\partial x}=e^{x}\sin 2y+2$,如图,添加辅助线 $BA: y=0, x: 0\to 2$,则

$$\begin{aligned}
I &= \oint_{L+BA} Q\mathrm{d}y+P\mathrm{d}x-\int_{BA} Q\mathrm{d}y+P\mathrm{d}x \\
&= \iint_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_{BA} Q\mathrm{d}y+P\mathrm{d}x \\
&= 3\iint_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_{0}^{2}-e^{x}\mathrm{d}x \\
&= \frac{3\pi}{2}+e^{2}-1,
\end{aligned}$$

其中 D 是上半圆 $x^{2}+y^{2}=2x$ 与线段 AB 围成的闭区域.



第 18 题图

19.【解析】微分方程 $y''-4y'-12y=0$ 对应的特征方程为 $r^{2}-4r-12=0$,解得 $r_1=-2, r_2=6$,于是微分方程的通解为 $y=C_1e^{-2x}+C_1e^{6x}$. 又 $\begin{cases} y|_{x=0}=C_1+C_2=0, \\ y'|_{x=0}=-2C_1+6C_2=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} C_1=-1, \\ C_2=1, \end{cases}$ 所以微分方程的特解为 $y=-e^{-2x}+e^{6x}$.

四、解答题

20.【解析】$P(x,y)=[e^{-x}+f(x)]y, Q(x,y)=-f(x)$. 因积分与路径无关,故有 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$,即 $-f'(x)=e^{-x}+f(x)$,整理得 $f'(x)+f(x)=-e^{-x}$,根据一阶线性非齐次微分方程的通解公式,

$$f(x)=e^{-\int 1\mathrm{d}x}\left[\int(-e^{-x})e^{\int 1\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=e^{-x}\left[\int(-e^{-x})e^{x}\mathrm{d}x+C\right]=e^{-x}(-x+C).$$

由条件 $f(0)=-1$ 得,$-1=e^{-0}(-0+C), C=-1$,故 $f(x)=-e^{-x}(x+1)$,

从而有 $L=\int_{0}^{1}[e^{-x}+f(x)]\cdot 0\mathrm{d}x-f(x)\mathrm{d}0+\int_{0}^{1}[e^{-x}+f(1)]\cdot y\mathrm{d}1-f(1)\mathrm{d}y=0+\int_{0}^{1}-f(1)\mathrm{d}y=-f(1)=e^{-1}(1+1)=2e^{-1}$.

21.【解析】$r^{2}-5r+6=0, r_1=2, r_2=3, Y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$. $y^{*}=Axe^{3x}$,代入原方程解得 $A=3$,故原方程的通解为 $y=Y+y^{*}=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}+3xe^{3x}$.

五、证明题

22.【证明】因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且 $f(x)>0$,

所以由定积分性质知 $g(a)=\int_{b}^{a}\frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t=-\int_{a}^{b}\frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t<0, g(b)=\int_{a}^{b}f(t)\mathrm{d}t>0$,